

LOS AUTORES:

HECTOR OSVALDO PUEYO

Profesor Titular Interino de "Teoría de los Circuitos I", Director del Departamento de Electrónica y Vicedecano Normalizador de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

Es Director de Planeamiento y Asistencia Técnica de ORT ARGENTINA.

Inició su actividad docente universitaria en 1956, como ayudante de los doctores Charola y Cicchini, y los Ingenieros Poli, Poncet y Dufour, en la F.R.B.A. - UTN.

Fue fundador del Laboratorio de Electrónica de la F.R.B.A. - UTN, estando a cargo de la Jefatura del mismo hasta 1970, en que fue designado Profesor Adjunto con dedicación exclusiva.

Ha tenido a su cargo seminarios de formación de docentes en el área de Teoría de los Circuitos en la F.R.B.A. - UTN.

Ha presentado trabajos, desarrollado conferencias e integrado paneles en diversos Congresos y Jornadas de ingeniería y formado parte de la Comisión Organizadora y el Comité Ejecutivo de las Primeras Jornadas Latinoamericanas y Quintas Argentinas de Ingeniería Eléctrica realizadas en 1972.

Los datos curriculares del Ing. Carlos Marco se reproducen en la solapa de la contratapa.

ANÁLISIS DE MODELOS CIRCUITALES

TONO 1

Prof. Héctor O. Pueyo

Profesor de
"Teoría de los Circuitos I",
Director del Depto. de Electrónica y
Vicedecano Normalizador de la
Fac. Reg. Bs. As. de la
Universidad Tecnológica Nacional.
Director de Planeamiento y
Asistencia Técnica de ORT Argentina

Ing. Carlos Marco

Profesor de
"Teoría de los Circuitos I"
y Secretario Técnico del Depto.
de Electrónica de la Fac. Reg. Bs. As.
de la Universidad Tecnológica Nacional.
Director del Depto. de Electrónica de la
Escuela Técnica ORT, Bs. As.



Arbó
ARBÓ S.A.C. e I.

1ª edición
1ª reimpresión, año 1985
2ª reimpresión, año 1993
Copyright Arbó S.A.C. e I., 1981

*Queda prohibida la reproducción
total o parcial sin expresa autorización
de los editores.*

Queda hecho el depósito
que marca la ley 11.723

PRINTED IN ARGENTINE
LIBRO DE EDICION ARGENTINA

ISBN 950-0022-00-1 Obra Completa
ISBN 950-0022-01-X Tome I

Prólogo

En el presente libro, sus autores tratan los fundamentos básicos del análisis de circuitos partiendo de conceptos físicos sencillos, de forma tal, que no es necesario que el lector posea conocimientos previos sobre el tema, sino solamente los de física y matemática corriente en los primeros años de estudio de ingeniería.

Los temas están bien tratados, desarrollados y ejemplificados con problemas de aplicación bien elegidos, resultando por lo tanto de fácil comprensión al lector, permitiéndole así manejar con soltura el análisis básico de los circuitos. La obra sirve adecuadamente como texto para un primer curso de Teoría de Circuitos y capacita al estudiante para encarar el estudio de un curso avanzado de circuitos.

Uno de los propósitos de este libro es el empleo de los métodos de ataque modernos, desde el punto de vista matemático, para el tratamiento de los problemas que plantea el análisis de circuitos. Con ello se pretende lograr una preparación adecuada del estudiante en el tema.

El enfoque que se da a las funciones de transferencia en régimen sinusoidal y su representación por medio de diagramas de Bode es acertado, pues su aplicación ya es corriente en el estudio de los circuitos electrónicos. Asimismo, la introducción de los conceptos de polos y ceros de las funciones circuitales, como así también el de frecuencia compleja en la respuesta de los circuitos, conduce a una comprensión más general y amplia del comportamiento de los mismos.

Resulta interesante la introducción de los conceptos fundamentales de la teoría de los cuadripolos lineales, en un primer curso de circuitos, pues así el lector sacará más provecho de su aplicación en estudios posteriores.

El libro se adapta perfectamente a los programas de los Cursos de Teoría de Circuitos de la carrera Ingeniería Electrónica que se dicta en la Universidad Tecnológica Nacional.

Ing. Juan Manuel Barcala

Prefacio

Esta obra está destinada a quienes desean adquirir una sólida formación básica en análisis de circuitos eléctricos, con el fin de encarar estudios posteriores de Ingeniería Electrónica o Eléctrica.

El desarrollo del libro está planificado para su utilización en un primer curso de Teoría de los Circuitos. Es por ello que resulta admisible un conocimiento prácticamente nulo del análisis de circuitos.

Solo se requieren los conocimientos de Física y Matemáticas incluidos en los ciclos básicos de las carreras de Ingeniería. Los problemas se estudian de lo particular a lo general, pero partiendo siempre de conceptualizaciones en las que se definen claramente las limitaciones de cada método.

Esto es, se ha buscado compatibilizar el rigor matemático con el análisis conceptual y el desarrollo didáctico.

El contenido de esta obra, ha sido ensayado y perfeccionado durante más de 20 años en los cursos de Teoría de los Circuitos de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional. Es por ello que los autores quedan reconocidos a los docentes y alumnos de dicha cátedra, con quienes analizaron y discutieron dicho material, permitiendo su sucesivo mejoramiento.

Se ha tratado de presentar todos los temas con una introducción conceptual, para luego desarrollar métodos generales de análisis que puedan ser aplicados por los que recién se inician en el tema, sin las dudas e inseguridades propias de un conocimiento parcial. Los ejemplos elegidos corresponden, en lo posible a casos prácticos de frecuente aplicación.

En síntesis, se ha buscado lograr que al concluir el estudio de este libro se posea:

- a) Un sólido conocimiento de los conceptos asociados a cada variable, parámetro o factor.
- b) Una segura aplicación de los métodos de resolución de circuitos como herramienta operativa.
- c) Una formación metodológica adecuada para el trabajo en Ingeniería Electrónica y Eléctrica.
- d) El conocimiento del comportamiento y las principales propiedades de los circuitos de uso más frecuente en la práctica.

Por otra parte, se ha buscado la autoconsistencia de este texto, efectuando revisiones o introducciones de los temas de análisis matemático necesarios, inmediatamente antes de su aplicación. Se han incluido también prácticamente todas las demostraciones inherentes a los temas de la Teoría de los Circuitos abarcados. De este modo, el material presentado resulta particularmente apto para estudiantes universitarios que dispongan de poco tiempo o medios para recopilar el material adicional de referencia, así como para autodidactas o docentes que tengan a su cargo cursos similares.

La división de la obra en dos tomos ha de facilitar la consulta de la misma. El primer tomo abarca los capítulos 1 a 9; el segundo, los enumerados del 10 al 17.

Cada capítulo comienza con una introducción donde se plantean los objetivos del mismo y se comentan los principales temas a tratar. Luego se desarrollan dichos temas y se introducen ejemplos aclaratorios. Finalmente se incluyen algunos problemas resueltos y se proponen otros con sus resultados.

Los primeros cinco capítulos se desarrollan en el dominio del tiempo, donde los problemas conducen al empleo de ecuaciones diferenciales que se resuelven por métodos clásicos. Se considera que el estudio de estos capítulos, da seguridad al lector, por tratarse de un campo más cercano a sus experiencias y conocimientos intuitivos. Una vez afirmados los conceptos básicos se introducen en los capítulos 6 y 7 las ideas fundamentales de los métodos de transformación. Se inicia el análisis en el dominio de la frecuencia; dado que esto se hace para el régimen permanente de los circuitos excitados por señales senoidales, los conceptos resultan fácilmente comprensibles y se preparan las bases para las sucesivas generalizaciones que se presentan en los capítulos posteriores. En el capítulo 8 se estudian los lugares geométricos de las variables complejas asociadas a los circuitos en régimen permanente senoidal, en los que varía algún parámetro o la frecuencia.

Ampliando los conceptos introducidos en los capítulos 6 y 7, mediante el uso de la Serie de Fourier, en el capítulo 9 se estudia la respuesta de los circuitos excitados por señales poliarmónicas, en régimen permanente.

En los capítulos 10 y 11 se generaliza la aplicación de los métodos de transformación mediante la introducción de la transformación de Laplace, que permite extender la metodología al régimen transitorio y señales de excitación aperiódicas o impulsivas, trabajando en el dominio de frecuencia compleja.

Se remarca entonces la similitud operativa con los procedimientos aplicados en los capítulos 6 y 7. Asimismo se introducen los métodos de análisis con polos y ceros, mostrando la relación con la síntesis de circuitos. Se completa el capítulo 11 con las respuestas asintóticas de Bode.

La última parte está dedicada a la aplicación de los métodos de transformación y la utilización de los teoremas de los circuitos y los métodos de resolución sistemática.

En el capítulo 12 se estudia la resonancia en circuitos simples.

En el capítulo 13 se introduce la topología de circuitos y los métodos de resolución sistemática.

En el capítulo 14 se presentan los teoremas de los circuitos y sus aplicaciones.

El capítulo 15 se dedica a la teoría de los cuadripolos lineales.

En el capítulo 16 se definen los circuitos acoplados inductivamente mostrando las diversas formas en que se los puede resolver y sus circuitos equivalentes. Como aplicación se estudian las respuestas de frecuencia de los transformadores con acoplamiento débil doble sintonizados y los transformadores con acoplamiento ferromagnético.

Finalmente, en el capítulo 17 se plantean las ideas básicas sobre el régimen permanente en los circuitos trifásicos.

Mucho agradecemos a todos los que han contribuido a la concreción de este libro; en especial a los Editores del mismo, por su permanente apoyo; al Sr. Miguel A. Riera por la dedicación y talento volcados en la confección de los dibujos.

Finalmente, en nuestro agradecimiento, merece especial mención el reconocimiento a nuestros seres queridos, por su inestimable estímulo y comprensión, sin los cuales hubiera sido imposible la realización de este libro.

LOS AUTORES

Sumario

Capítulo 1. Fundamentos de la teoría de los modelos circuitables idealizados

1. 1	Introducción	1
1. 2	Intercambios energéticos	4
1. 3	Elementos de circuito idealizados necesarios para describir los fenómenos eléctricos reales	5
1. 4	Elementos de circuito pasivos	6
1.4.1)	Resistor	6
1.4.2)	Capacitor	7
1.4.3)	Inductor	9
1.4.4)	Inductor mutuo	10
1.5	Elementos de circuito activos	11
1.5.1)	Generador ideal de tensión	11
1.5.2)	Generador ideal de corriente	13
1. 6	Sentidos de referencia	14
1. 7	Reglas para construir el modelo circuital idealizado correspondiente a un problema real	17
1.7.1)	Regla práctica	17
1.7.2)	Ejemplo	18
1. 8	Modelos circuitales idealizados de los elementos de circuito pasivos reales	19
1.8.1)	Inductores	19
1.8.2)	Resistores	20
1.8.3)	Capacitores	20
1. 9	Modelos circuitables idealizados de los elementos de circuito activos reales	21
1.9.1)	Generador de tensión	21
1.9.2)	Generador de corriente	21
1.10	Terminología básica asociada a los modelos circuitales	22
1.10.1)	Rama	22
1.10.2)	Nodo	22
1.10.3)	Malla	22
1.10.4)	Dipolo pasivo	22
1.10.5)	Dipolo activo	22
1.11	Propiedades de los modelos circuitales idealizados	22
1.11.1)	Primera propiedad	22
1.11.2)	Segunda propiedad	23
1.12	Ejemplos elementales de aplicación de las leyes de Kirchhoff y Ohm	26
1.12.1)	Problemas resueltos	27
1.12.2)	Problemas propuestos	31

Capítulo 2. Señales de excitación de uso frecuente

2. 1	Introducción	33
2. 2	Clasificación de las señales según su ley de variación en función del tiempo	33
2. 3	Señales periódicas	35
2.3.1)	Definiciones fundamentales asociadas	35
2.3.2)	Valores característicos asociados	37
2.3.3)	Cálculo de los valores característicos para las funciones periódicas de uso frecuente	43

2.3.4) Factores característicos asociados a las señales periódicas.	
Definición y ejemplo de cálculo	48
2.3.5) Desarrollo de señales periódicas no senoidales en serie de Fourier	51
2. 4 Señales aperiódicas	62
2.4.1) Señales fundamentales	62
2.4.2) Relaciones entre las señales fundamentales	64
2.4.3) Señales elementales derivadas de las fundamentales y parámetros que las caracterizan cuantitativamente	66
2.4.4) Construcción de señales aperiódicas cualesquiera a partir de las señales elementales	67
2.4.5) Superposición de señales elementales desplazadas	69
2.4.6) Construcción de señales semiperiódicas por superposición de señales aperiódicas desplazadas	74
2. 5 Problemas resueltos	75
2. 6 Problemas propuestos	83

Capítulo 3. Respuesta de circuitos con un solo tipo de elemento pasivo

3. 1 Introducción	85
3. 2 Comportamiento de un resistor excitado por señales arbitrarias de tensión o corriente	85
3. 3 Asociación de resistores en serie y en paralelo	86
3. 4 Comportamiento de un capacitor excitado por un generador de corriente	88
3.4.1) Introducción	88
3.4.2) Respuestas a señales de uso frecuente	88
3. 5 Comportamiento de un capacitor excitado por un generador de tensión.	94
3.5.1) Introducción.	94
3.5.2) Respuestas a señales de uso frecuente.	95
3. 6 Asociación de capacitores en serie y paralelo	99
3. 7 Comportamiento de un inductor excitado por un generador de tensión	101
3.7.1) Introducción	101
3.7.2) Respuesta a una excitación rampa	102
3.7.3) Introducción del principio de dualidad	103
3. 8 Ejemplos de obtención de respuestas de circuitos con un solo tipo de elemento pasivo a través de un análisis cualitativo	104
3.8.1) Resistor excitado por generador de tensión o de corriente	104
3.8.2) Capacitor excitado por un generador de corriente que en base al principio de dualidad será válido para un inductor excitado por un generador de tensión	104
3.8.3) Capacitor excitado por un generador de tensión que en base al principio de dualidad será válido para un inductor excitado por un generador de corriente	105
3. 9 Asociación de inductores en serie y en paralelo	107
3.10 Resumen general	109
3.11 Divisores de tensión y corriente resistivos, capacitivos e inductivos	110
3.11.1) Divisores de tensión resistivos, capacitivos e inductivos	110
3.11.2) Divisores de corriente resistivos, capacitivos e inductivos	113
3.12 Divisor de tensión práctico compensado	115
3.13 Problemas resueltos	117
3.14 Problemas propuestos	122

Capítulo 4. Respuesta de circuitos con dos tipos de elementos pasivos

4. 1 Introducción	126
4. 2 Limitaciones en las variaciones de la tensión en un capacitor y la corriente en un inductor	126
4. 3 Régimen transitorio. Componentes libre y forzada de la respuesta transitoria	129
4. 4 Excitación de un circuito R.C. serie con un escalón de tensión	131

4. 5 Normalización de la tensión, la corriente y el tiempo	135
4. 6 Constante de tiempo. Significados circuital y geométrico	139
4. 7 Formas de calcular la constante de tiempo gráficamente	142
4. 8 Trazado asintótico de las curvas de respuesta	145
4. 9 Tiempo de establecimiento o de elevación	147
4.10 Desactivación de una rama R.C. serie	150
4.11 Análisis energético de la carga y descarga de un capacitor a través de un resistor	153
4.11.1) Proceso de carga	154
4.11.2) Proceso de descarga	155
4.12 Excitación de un circuito R.L. serie con un escalón de tensión	157
4.13 Desactivación de una rama R.L. serie	161
4.14 Análisis energético de la activación y desactivación de un circuito R.L. serie	164
4.14.1) Proceso de activación	164
4.14.2) Proceso de desactivación	165
4.15 Transitorios por variación brusca de un parámetro pasivo	167
4.16 Excitación de un circuito R.C. serie con una rampa de tensión	170
4.17 Excitación de un circuito L.C. serie con un escalón de tensión	175
4.18 Obtención de la respuesta de circuitos con dos tipos de elementos pasivos a señales compuestas por aplicación del principio de superposición	180
4.18.1) Excitación pulso rectangular	181
4.18.2) Excitación pulso triangular	183
4.19 Circuitos integradores y diferenciadores	185
4.19.1) Circuito integrador	185
4.19.2) Circuito diferenciador	189
4.20 Problemas resueltos	192
4.21 Problemas propuestos	197

Capítulo 5. Respuesta de circuitos con tres tipos de elementos pasivos

5. 1 Introducción	202
5. 2 Respuesta de un circuito R.L.C. paralelo excitado por un escalón de corriente	203
5.2.1) Régimen subamortiguado u oscilatorio amortiguado ($\gamma < 1$)	205
5.2.2) Régimen sobreamortiguado ($\gamma > 1$)	213
5.2.3) Régimen crítico ($\gamma = 1$)	221
5. 3 Importancia tecnológica de los distintos tipos de respuesta	226
5. 4 Problemas resueltos	227
5. 5 Problemas propuestos	231

Capítulo 6. Fasores armónicos y fasores eficaces asociados a las señales senoidales

6. 1 Introducción	234
6. 2 Números complejos	234
6. 3 Fasores armónicos	239
6.3.1) Definición	239
6.3.2) Correspondencia entre los fasores giratorios y las funciones trigonométricas	239
6.3.3) Suma de fasores armónicos	241
6.3.4) Derivación de fasores armónicos	242
6.3.5) Integración de fasores armónicos	243
6.3.6) Producto de fasores armónicos	243
6. 4 Solución de ecuaciones integrodiferenciales lineales mediante fasores armónicos	244
6. 5 Extensión de la solución a los fasores eficaces	246
6. 6 Problemas resueltos	248
6. 7 Problemas propuestos	252

Capítulo 7. Régimen permanente de circuitos excitados por señales senoidales

7. 1 Introducción	254
7. 2 Circuito resistivo puro	254
7. 3 Circuito inductivo puro	256
7. 4 Circuito capacitivo puro	257
7. 5 Circuito R - L - C serie	258
7. 6 Circuito R - L - C paralelo	260
7. 7 Impedancia y admitancia complejas de excitación	261
7. 8 Resonancia serie	264
7. 9 Resonancia paralelo	266
7.10 Potencia instantánea	267
7.11 Potencias activa, reactiva y aparente	270
7.12 Factor de potencia	271
7.13 Adición de las potencias activas y reactivas	272
7.14 Planteo y solución de problemas directamente en el dominio de frecuencia	274
7.14.1) Introducción	274
7.14.2) Transformación de las leyes de Kirchhoff y las relaciones tensión-corriente de los elementos de circuitos idealizados	275
7.14.3) Transformación de modelos circuitales	275
7.14.4) Transformación de la excitación	276
7.14.5) Asociación de dipolos en serie y en paralelo	276
7.14.6) Ejemplos de aplicación	278
7.15 Circuitos equivalentes serie y paralelo	280
7.16 Factores de mérito y de disipación de los elementos de circuito reales	283
7.17 Problemas resueltos	286
7.18 Problemas propuestos	291

Capítulo 8. Lugares geométricos de las funciones de impedancia y admitancia complejas

8. 1 Introducción	294
8. 2 Definición de los diagramas de immitancia	295
8. 3 Inversión en forma gráfica	297
8. 4 Lugares geométricos de las variables asociadas a los circuitos eléctricos	298
8. 5 Propiedades de la inversión de rectas y circunferencias	300
8. 6 Escalas en los diagramas de immitancias	301
8. 7 Cálculo del radio de la circunferencia unitaria en base a las escalas de immitancia	303
8. 8 Diagramas de tensión, corriente y potencia	303
8. 9 Problemas resueltos	304
8.10 Problemas propuestos	316

Capítulo 9. Régimen permanente de circuitos excitados por señales poliarmónicas

9. 1 Introducción	325
9. 2 Descripción de una señal en el dominio del tiempo y en el de frecuencia	325
9. 3 Aplicación del principio de superposición para la obtención de la respuesta permanente de un circuito excitado por una señal poliarmónica descompuesta en serie de Fourier	327
9. 4 Potencias en circuitos recorridos por señales poliarmónicas	331
9. 5 Problemas resueltos	338
9. 6 Problemas propuestos	347

ANÁLISIS DE MODELOS CIRCUITALES, 2do. Tomo

Capítulo 10. Transformación de Laplace. Funciones operacionales de los circuitos.

Capítulo 11. Análisis de las funciones operacionales de los circuitos en base a las configuraciones de polos y ceros.

Capítulo 12. Resonancia en circuitos simples.

Capítulo 13. Resolución sistemática de circuitos.

Capítulo 14. Teoremas de los circuitos.

Capítulo 15. Teoría de los cuadripolos.

Capítulo 16. Circuitos acoplados inductivamente.

Capítulo 17. Régimen permanente de los circuitos trifásicos.

Fundamentos de la teoría de los modelos circuitales idealizados

1.1. Introducción

Se iniciará el planteo general del problema suponiendo que al lector le son conocidos los conceptos clásicos, impartidos en los cursos de física de nivel universitario, sobre campos eléctricos y magnéticos.

Es sabido que, desde la alimentación de los equipos eléctricos hasta el procesamiento y transmisión de la inteligencia a través de las señales más complicadas, son formas de intercambio energético relacionadas con la existencia de campos electromagnéticos.

La solución de los problemas mencionados, en base a la *teoría del campo electromagnético*, implica resolver las ecuaciones diferenciales del mismo, para las condiciones de contorno existentes. Una vez logrado esto, se dispone de las distribuciones espaciales y temporales de los vectores intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{H}$. Finalmente, el conocimiento de dichas funciones permite hallar los intercambios energéticos. Pero es de hacer notar que, como las funciones halladas dan la imagen punto a punto de lo que acontece en el espacio en estudio, normalmente deben integrarse los resultados para conocer los efectos globales.

La *solución rigurosa* de los problemas eléctricos, con la metodología anteriormente descrita, es prácticamente irrealizable con las herramientas matemáticas de que se dispone en la actualidad. No obstante, puede llegarse a resultados muy aproximados, introduciendo *hipótesis simplificadoras* respecto de la geometría (condiciones de contorno). Aun así la metodología es sumamente laboriosa, por lo que sólo se la utiliza para resolver aquellos problemas que no pueden encararse de otra manera.

Afortunadamente, hay una gran cantidad de casos que pueden ser atacados reduciendo el problema real a un circuito equivalente, constituido exclusivamente por *elementos ideales*, cuyo comportamiento conjunto es suficientemente aproximado al del esquema real dado. Dicho de otra manera, *el circuito idealizado es un modelo matemático*, que no constituye la realidad física, pero "*todo pasa como si*" así fuera, y es posible hallar las soluciones cuantitativas buscadas.

La metodología mencionada en último término se denomina "Teoría de los modelos circuitales idealizados", o más simplemente "*Teoría de Circuitos*".

Como es de suponer, en la teoría de circuitos no se trabaja con los vectores $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ y $\vec{B}$ que dan la imagen puntual, sino que se emplean como variables la tensión (o diferencia de potencial) y la corriente, que dan el efecto integrado y son fácilmente medibles. Como estas variables son funciones del tiempo, pero no de las coordenadas espaciales, es evidente que la teoría de circuitos permite calcular los efectos integrados de los intercambios energéticos, pero no hallar la imagen punto a punto.

Se debe ahora definir su *campo de aplicación*. Es claro que toda teoría es aplicable mientras se mantenga la validez de las hipótesis establecidas para desarrollarla. La mencionada teoría de los modelos circuitales idealizados sólo es aplicable a los problemas en los que *la radiación distribuida de energía, en forma de ondas electromagnéticas, es despreciable frente a los otros intercambios energéticos presentes* (se desecha el caso de radiación distribuida para no considerar el proceso punto a punto, y llegar así a una metodología de resolución simple).

Esta condición conduce a lo siguiente: la teoría de circuitos es aplicable a aquellos problemas en los que las dimensiones físicas del esquema real son considerablemente menores que la longitud de onda de los campos electromagnéticos establecidos. Pero por suerte, la condición no es muy restrictiva, pues para un esquema real cuya dimensión máxima sea inferior a un metro, esta limitación comienza a hacerse notar para campos en los que el sentido de los vectores característicos se invierten algunos cientos de millones de veces por segundo, siendo despreciable para los que varían más lentamente.

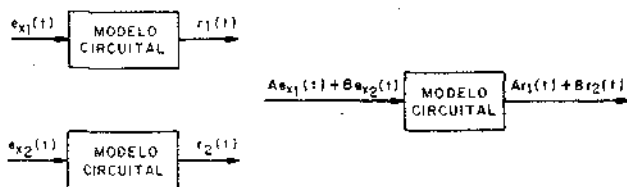


Fig. 1.1

Establecido ya el campo de aplicación, se retomará la idea del planteo del problema. En la teoría de los modelos circuitales idealizados, el problema real es reemplazado por un esquema de cálculo, compuesto por una serie de elementos de circuito ideales. Cada uno de estos elementos de circuito reproduce un dado aspecto del intercambio energético. Aun cuando en el problema real, una parte del proceso energético abarque una zona relativamente extensa del espacio, en el modelo circuitual idealizado se la supone "concentrada" en el elemento de circuito que le corresponde. De ahí su denominación de teoría de circuitos de *constantes concentradas*, que se asigna a esta forma de encarar los problemas eléctricos, donde en el esquema idealizado no intervienen las coordenadas espaciales.

Interesa ahora acotar el tipo de modelo circuitual a tratar. Se dice que un modelo circuitual es *lineal*, cuando su comportamiento satisface el principio de superposición. Esto es, tal como se ilustra en la Fig. 1.1., si al aplicar por separado dos

excitaciones $e_{x1}(t)$ y $e_{x2}(t)$ a un modelo circuitual, se obtienen dos respuestas $r_1(t)$ y $r_2(t)$, respectivamente, se dice que el circuito es lineal, siempre que, a la excitación $Ae_{x1}(t) + Be_{x2}(t)$, le corresponda la respuesta $Ar_1(t) + Br_2(t)$, cualesquiera sean las excitaciones $e_{x1}(t)$ y $e_{x2}(t)$.

Considérese ahora un modelo circuitual idealizado al que, al aplicarle una excitación $e_x(t)$ le corresponde una respuesta $r(t)$. Se dice que dicho modelo es *invariante en el tiempo*, si al aplicarle la excitación demorada o adelantada, $e_x(t \mp T)$, se obtiene la respuesta anterior, demorada o adelantada $r(t \mp T)$, según corresponda. En la Fig. 1.2 se ejemplifica para un caso de demora.

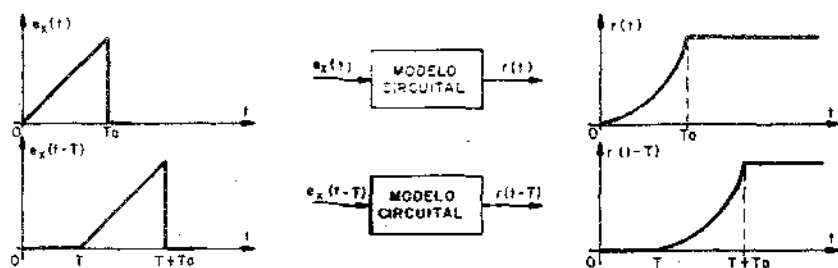


Fig. 1.2

A la luz de estas particularidades, es importante destacar que en este texto se estudiarán los modelos circuitales idealizados de constantes concentradas, lineales, e invariantes en el tiempo.

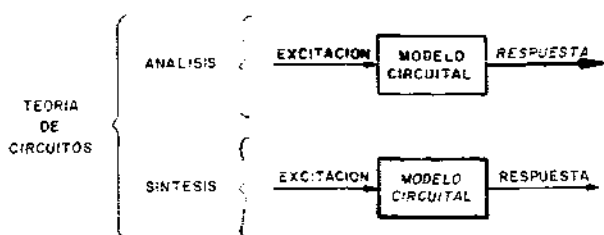


Fig. 1.3

Acotado el tipo de modelo a tratar, es oportuno mencionar que los tipos de problemas que resuelve la teoría de circuitos, pueden ser agrupados en dos grandes áreas: el *análisis* y la *síntesis de circuitos*.

En todos los problemas de análisis, dada la excitación, o partes del esquema en los que éste recibe energía, y el modelo circuitual, se trata de hallar el comportamiento o *respuesta* del circuito.

En los problemas de síntesis, dada la excitación aplicada y la respuesta que se desea obtener, se trata de hallar el *círculo* que permite lograrla. En la Fig. 1.3 se resumen los tipos de problemas mencionados.

Es oportuno aclarar que en este texto se estudiará la primera parte del análisis de circuitos. *El desarrollo de dicho análisis de circuitos será efectuado de acuerdo con la siguiente secuencia:*

- a) Se clasificarán las distintas formas de almacenamiento e intercambio de energía presentes en los problemas eléctricos reales.
- b) Se definirá un elemento de circuito ideal que representa a cada una de esas formas de intercambio de energía.
- c) Se enunciarán las reglas para la interconexión de los elementos de circuito, llegando a los modelos circuitales idealizados.
- d) Se hallarán las leyes básicas que vinculan a las tensiones y corrientes de un modelo circuitual idealizado, a partir de las propiedades que surjan de la forma en que se lo definió.
- e) Se resolverán las ecuaciones que surjan de la aplicación de las leyes mencionadas en d), hallando las variables desconocidas en función de los datos.
- f) Se desarrollarán métodos más eficaces para el planteo y solución de las ecuaciones de los circuitos.
- g) Una vez que se disponga de los métodos eficientes mencionados en f), se los aplicará a una gran cantidad de problemas típicos, con el fin de adquirir experiencia en su empleo, así como información y familiarización sobre el comportamiento de los mismos.

De ahora en adelante se procederá de acuerdo con la secuencia indicada.

1.2 Intercambios energéticos

Se clasificarán ahora las distintas formas en que se almacena o intercambia la energía en los problemas eléctricos reales.

Considérese un problema eléctrico cualquiera, tal como la iluminación de un aula, o un sistema de amplificación e irradiación de sonido. En general, en estos *tramos de circuito real* pueden identificarse prontamente dos tipos de comportamiento bien diferenciados:

- a) Partes en las cuales se almacena, se intercambia o se cede energía al medio. Estos tramos de circuito se comportan como consumidores de energía y se llaman *pasivos*. Con más precisión, se dice que un circuito o tramo de circuito es pasivo, cuando recibe una energía no negativa para una excitación arbitraria y no existen en él tensiones y/o corrientes, antes de que ésta sea aplicada.
- b) Partes en las cuales se inyecta energía al sistema. Estos tramos del esquema se comportan como fuentes de energía y se denominan *activos*.

Se analizará con más detalle la clasificación anterior.

a) Tramos pasivos

Observando detalladamente los *procesos energéticos* que se desarrollan en dichos tramos, se encuentra que éstos pueden ordenarse como:

- a.1) **Irreversibles:** estos fenómenos de intercambio energético son los que corresponden a la transformación de la energía electromagnética de una zona localizada del esquema, hacia otras formas de energía (térmica, mecánica, química, lumínica, acústica, etc) cedidos definitivamente al medio. Nótese la exclusión de radiación de energía electromagnética en forma distribuida por parte del esquema, ya que ha de ser despreciable para que la teoría sea válida.

- a.2) **Reversibles:** estos intercambios energéticos son aquellos en los que la energía es almacenada o intercambiada dentro del esquema eléctrico, sin cederla al medio y conservando siempre su carácter electromagnético. Estos intercambios energéticos pueden ser divididos en:
 - a.2.1) **Asociados al campo eléctrico**, donde se trata de almacenamiento de energía en forma potencial.
 - a.2.2) **Asociados al campo magnético**, donde se presentan dos variantes:
 - a.2.2.1) El almacenamiento de energía en forma electrocinética.
 - a.2.2.2) La transferencia de energía de una parte a otra del esquema a través del campo magnético.

Resulta claro que, en los procesos reversibles, la energía eléctrica (potencial) puede transformarse total o parcialmente en magnética (cinética) o viceversa, o bien ser devuelta a la fuente.

b) Tramos activos

Para estudiar las variantes posibles respecto a estos tramos, se recuerda la expresión de la potencia eléctrica instantánea (o intensidad del proceso de transferencia de energía), en función de la tensión y la corriente $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ donde todas las variables son funciones reales del tiempo.

La expresión indica que la energía puede ser transferida, ya sea imponiendo la tensión en la parte del esquema donde se la inyecta, o bien fijando la corriente. En ambos casos, la variable restante tendrá un valor establecido conjuntamente por la fuente de energía en cuestión y el resto del esquema.

En consecuencia habrá dos variantes posibles para los tramos activos:

- b.1) **Aquellos que imponen la tensión.**
- b.2) **Aquellos que imponen la corriente.**

Conocidos los intercambios energéticos, se pasará a definir los elementos de circuito necesarios para caracterizarlos.

1.3 Elementos de circuito idealizados necesarios para describir los fenómenos eléctricos reales.

Teniendo en cuenta la clasificación presentada en el párrafo 1.2, se puede asignar un elemento idealizado de circuito para cada uno de los intercambios energéticos descriptos, pudiendo con ellos construir los modelos circuitales idealizados.

a) Elementos de circuito pasivos

- a.1) **Resistor:** caracterizante de los intercambios energéticos irreversibles.
- a.2) **Capacitor:** representante de los procesos energéticos reversibles asociados al campo eléctrico.
- a.3) **Inductor:** representante de los procesos energéticos reversibles asociados al campo magnético, en forma de almacenamiento de energía electrocinética.
- a.4) **Inductor mutuo:** caracterizante de los procesos energéticos reversibles asociados al campo magnético, referente a la transferencia de energía de una parte a otra del esquema eléctrico. El resistor, el capacitor y el inductor, son elementos circuitales de dos terminales. El inductor mutuo requiere un modelo de tres o cuatro terminales para su caracterización.

b) Elementos de circuito activos

- b.1) **Generador ideal de tensión:** caracterizante de aquellos tramos que im-

nen la tensión.

b.2) **Generador ideal de corriente:** representante de aquellos tramos que imponen la corriente.

Definidos ya los elementos de circuito, serán estudiados en detalle cada uno de ellos.

1.4 Elementos de circuito pasivos

1.4.1) **Resistor:** Es el elemento de circuito ideal que caracteriza la conversión de energía eléctrica a otras formas de energía en forma irreversible. En consecuencia, en un resistor ideal no existe almacenamiento de cargas ni concatenación de campo magnético.

Su parámetro cuantitativo asociado es la *resistencia*, simbolizada por R . En términos energéticos puede definirse como el cociente entre la potencia que se disipa en el resistor y el cuadrado de la corriente que lo atraviesa. Dicho cociente resulta igual a la relación entre tensión y corriente tal como se muestra en la Ec.(1.1).

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{V}{I} = \text{constante} \quad (1.1)$$

donde se consideraron valores reales constantes; $R = \frac{V}{I}$ se conoce como *Ley de Ohm*.

Nótese en la Ec.(1.1) la igualación a constante para cumplir con la condición de linealidad. La representación gráfica de dicha ecuación conduce a las Figs. 1.4 y 1.5.

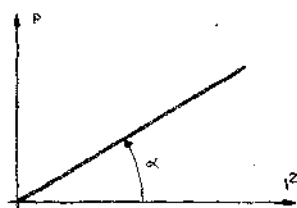


Fig. 1.4

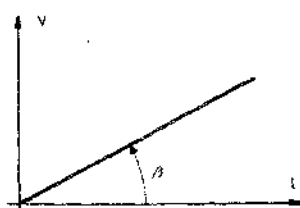


Fig. 1.5

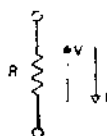


Fig. 1.6

De la Fig. 1.4 se desprende que

$$R = \operatorname{tg} \alpha \frac{\text{escala } P}{\text{escala } I^2}$$

De la Fig. 1.5 se deduce que

$$R = \operatorname{tg} \beta \frac{\text{escala } V}{\text{escala } I}$$

El símbolo del resistor se muestra en la Fig. 1.6. Nótese en la misma el sentido de referencia de la tensión, que es el sentido patrón adoptado para computar el signo de la diferencia de potencial existente entre los extremos del resistor. Se interpreta que en el extremo de la flecha (cúspide) hay un potencial mayor, y en el origen de la misma un potencial menor. Si la tensión aplicada tiene un sentido coincidente con el de la referencia se dirá que es positiva, de lo contrario se computará como negativa.

La flecha para la corriente indica también el sentido adoptado, y naturalmente, corresponde al sentido de circulación de cargas positivas. Para los sentidos indicados anteriormente, las relaciones entre tensión y corriente en función del tiempo resultan:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (1.2)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t) \quad (1.3)$$

1.4.2) **Capacitor:** Es el elemento de circuito ideal que caracteriza el almacenamiento de energía en forma potencial a través del campo eléctrico. En consecuencia, en un capacitor ideal no existe disipación de energía ni concatenación de campo magnético.

Su parámetro cuantitativo asociado es la *capacitancia*, simbolizada por C .

En términos energéticos puede definirse como el cociente entre dos veces la energía almacenada y el cuadrado de la tensión en bornes del capacitor. Dicho cociente resulta igual a la relación entre carga eléctrica y tensión, tal como se muestra en la Ec. (1.4).

$$C = \frac{2 W_c}{V^2} = \frac{Q}{V} = \text{constante} \quad (1.4)$$

La igualación a constante tiene el mismo sentido que para el resistor.

La representación gráfica de la Ec. (1.4) conduce a las Figs. 1.7 y 1.8.

De la Fig. 1.7 se desprende que,

$$C = \operatorname{tg} \gamma \frac{\text{escala } 2 W_c}{\text{escala } V^2}$$

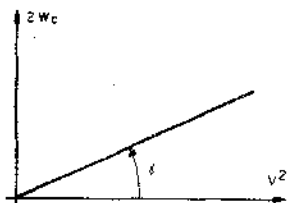


Fig. 1.7

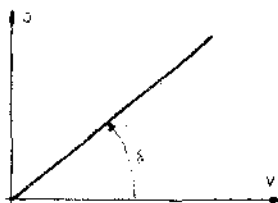


Fig. 1.8

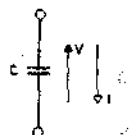


Fig. 1.9

De la Fig. 1.8 se deduce que,

$$C = \operatorname{tg} \delta \frac{\text{escala } Q}{\text{escala } V}$$

El símbolo del capacitor se muestra en la Fig. 1.9, y los sentidos de referencia indicados tienen el mismo significado que en el resistor.

Se buscarán ahora, *las relaciones entre las variables tensión y corriente*. Se sabe que la corriente instantánea resulta de la velocidad de variación de la carga respecto del tiempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

pero de la Ec.(1.4) para las magnitudes variables en el tiempo se tiene:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

que reemplazada en la anterior resulta:

$$i(t) = \frac{d C \cdot v(t)}{dt} \text{ como } C = \text{constante}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.5)$$

La Ec.(1.5) expresa la relación entre corriente y tensión en un capacitor. Operando de la misma resulta:

$$dv(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t) dt$$

integrando la última expresión tomando como límites $-\infty$ y t ; y desdoblando la integral se obtiene, considerando además C constante,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

la expresión $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(t) dt = v_{C(0-)}$ puede interpretarse como la tensión existente en el capacitor para el tiempo $t = 0$ de referencia, en consecuencia:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_{C(0^-)} \quad (1.6)$$

La Ec. 1.6 expresa la relación entre tensión y corriente en un capacitor.

1.4.3) Inductor: Es el elemento de circuito ideal que caracteriza el almacenamiento de energía a través del campo magnético. Por lo tanto en un inductor ideal no existe disipación de energía ni almacenamiento de cargas.

Su parámetro cuantitativo asociado es la *inductancia*, simbolizada por L .

En términos energéticos puede definirse como el cociente entre dos veces la energía almacenada y el cuadrado de la corriente que atraviesa el inductor. El cociente mencionado resulta igual a la relación entre el flujo concatenado y la corriente, tal como se muestra en la Ec.(1.7):

$$L = \frac{2 W_L}{I^2} = \frac{\phi_c}{I} = \text{constante} \quad (1.7)$$

La igualación a constante tiene el mismo significado que para el resistor.

La representación gráfica de la Ec. (1.7) conduce a las Figs. 1.10 y 1.11.

De la Fig. 1.10 se desprende que:

$$L = \operatorname{tg} \theta \frac{\text{escala } 2 W_L}{\text{escala } I^2}$$

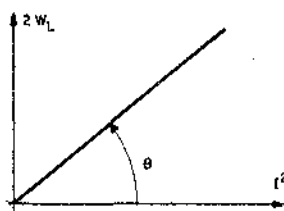


Fig. 1.10

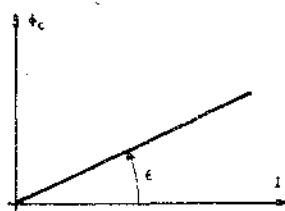


Fig. 1.11

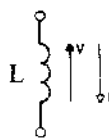


Fig. 1.12

De la Fig. 1.11 se deduce que:

$$L = \operatorname{tg} \epsilon \frac{\text{escala } \phi_c}{\text{escala } I}$$

El símbolo del inductor se muestra en la Fig. 1.12 y los sentidos de referencia indicados tienen el mismo significado que en el resistor.

Se buscarán ahora, las relaciones entre las variables tensión y corriente. Se co-

noce la tensión instantánea que resulta de la velocidad de variación del flujo concatenado respecto del tiempo:

$$v(t) = \frac{d \phi_c(t)}{dt}$$

pero de la Ec. (1.7) para magnitudes variables en el tiempo se tiene:

$$\phi_c(t) = L \cdot i(t)$$

que reemplazada en la anterior resulta:

$$v(t) = d \frac{L \cdot i(t)}{dt} \quad \text{como } L = \text{constante}$$

$$v(t) = L \cdot \frac{d i(t)}{dt} \quad (1.8)$$

La Ec.(1.8) expresa la relación entre tensión y corriente en un inductor. Operando la misma resulta:

$$di(t) = \frac{1}{L} v(t) \cdot dt$$

es integrada la última expresión tomando como límites $-\infty$ y t ; desdoblando la integral y considerando además C constante se obtiene:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) \cdot dt + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) \cdot dt$$

la expresión $\frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) \cdot dt = i_{L(0^-)}$ puede interpretarse como la corriente existente en el inductor antes del $t = 0$ de referencia; en consecuencia,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) \cdot dt + i_{L(0^-)} \quad (1.9)$$

La Ec.(1.9) expresa la relación entre la corriente y la tensión en un inductor.

1.4.4.) Inductor mutuo: Debido a la importancia y particularidades de este elemento pasivo, se lo estudiará separadamente en el *Cap. 16: Circuitos Acoplados Electromagnéticamente*.

En la Fig. 1.13 se muestra un cuadro resumen referente a los elementos pasivos estudiados.

ELEM.	SIMBOLO GRAFICO	PARAMETRO CARACTERISTICO			RELACIONES ENTRE TENSION Y CORRIENTE	
		NOMBRE	SMB.	DEFINICION	$v(t) = f(i(t))$	$i(t) = f(v(t))$
Resistor		Resistencia	R	$R = \frac{P}{i^2} = \frac{V}{i}$ etc.	$v(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$
Capacitor		Capacitancia	C	$C = \frac{2WC}{V^2} = \frac{Q}{V}$ etc.	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_C(0^-)$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
Inductor		Inductancia	L	$L = \frac{2W_L}{i^2} = \frac{\phi_L}{i}$ etc.	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt + i_L(0^-)$

Fig. 1.13

1.5 Elementos de circuito activos

1.5.1) Generador ideal de tensión: Es el elemento circuital que impone entre dos puntos de un circuito eléctrico el valor de la tensión, ya sea ésta constante o variable según una ley preestablecida con independencia del circuito conectado a sus bornes.

Su símbolo se muestra en la Fig. 1.14. Nótese en la misma que no se da el sentido de referencia para la corriente, pues la relación entre V_e e I no dependerá exclusivamente del generador, sino de lo que se conecte en sus bornes. En el caso que el

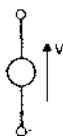


Fig. 1.14

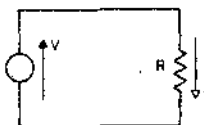


Fig. 1.15

circuito conectado al generador sea por ejemplo pasivo, tal como se muestra en la Fig. 1.15, es claro que en el generador el sentido de V coincide con el de I ; mientras que en el elemento pasivo son opuestos. Normalmente, los elementos que entregan energía tienen sentidos de referencia para V e I coincidentes, mientras que los que absorben energía sentidos contrarios. Si el circuito conectado al generador, fuera otra fuente de energía, por ejemplo de mayor potencial, se daría el caso que para el generador en cuestión los sentidos de tensión y corriente serían contrarios.

Cuando se trata de representar tensiones específicas de los generadores se colocan en los mismos símbolos internos. En la Fig. 1.16 se muestran algunos ejemplos. Se estudiarán ahora las *propiedades* del generador ideal de tensión. De acuerdo a las condiciones impuestas en la definición, no podrá incluir intercambios energéticos tales que la tensión impuesta pueda modificarse en función del circuito alimentado. En otras palabras *no podrá tener en su interior elementos de circuito pasivo conectados en serie*.

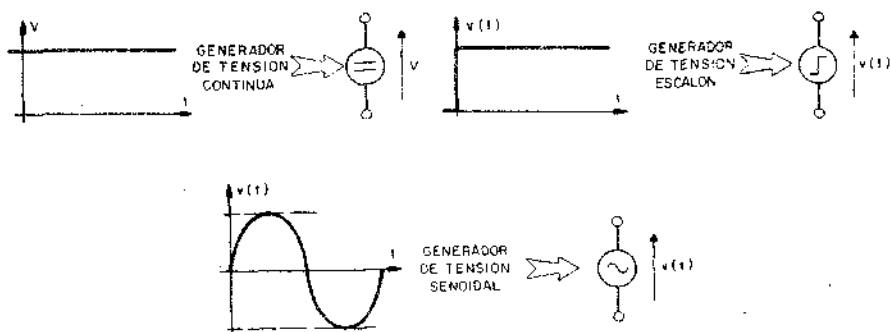


Fig. 1.16

Se puede demostrar ello por el absurdo considerando el circuito de la Fig. 1.17. Para una dada carga conectada entre los bornes $A-B$ se establecerá una corriente en el circuito. Entre los puntos $A-B$ la tensión es independiente de la corriente debido al generador ideal. Considerando un nuevo generador entre $A-D$, la tensión entre los mencionados puntos si depende de la corriente, pues de ella dependen las caídas de tensión en los elementos pasivos. Si se modifica la carga, varía la corriente, se modificarán las caídas de tensión en los elementos pasivos y en consecuencia la tensión entre $A-D$. Es evidente, que si se desea que la tensión entre $A-D$ sea independiente de la corriente deberá cumplirse simultáneamente que $R \rightarrow 0$ y $C \rightarrow \infty$, lo cual concuerda con lo anunciado anteriormente.

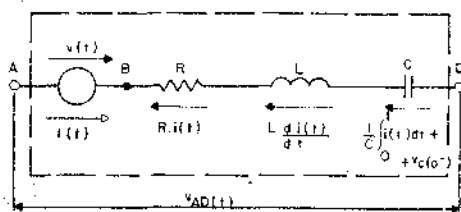


Fig. 1.17

Nótese por otra parte, que elementos pasivos conectados en paralelo con el generador ideal de tensión, no lo afectan, pues la tensión entre sus bornes la impone

El. Es oportuno aclarar algo más sobre la notación, en la Fig. 1.17 se indicó la tensión entre $A-D$ como $v_{AD}(t)$, interpretándose que A es el borne de mayor potencial. Entonces por definición:

$$v_{AD}(t) = v_A(t) - v_D(t)$$

Por otra parte, la corriente $i(t)$, que circula del borne A hacia el D puede también indicarse como $i_{AD}(t)$.

1.5.2) Generador ideal de corriente: Es aquél que impone en un tramo de un circuito eléctrico el valor de la corriente, ya sea ésta constante o variable según una ley preestablecida con independencia del circuito conectado a sus bornes. El símbolo que se utiliza en este libro se muestra en la Fig. 1.18.a). En las Figs. 1.18 b) y c) se muestran los símbolos empleados en otros textos para representar generadores de corriente. Nótese que en la misma no se incluye el sentido para la tensión, ya que éste puede depender del circuito externo.

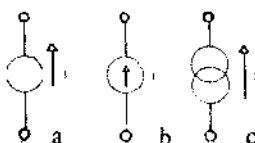


Fig. 1.18

Cuando se trate de representar corrientes específicas de los generadores se colocan símbolos internos en forma similar a lo visto para el generador de tensión.

Estudiando las *propiedades* del generador ideal de corriente y de acuerdo a las condiciones impuestas en la definición, no podrá incluir intercambios energé-

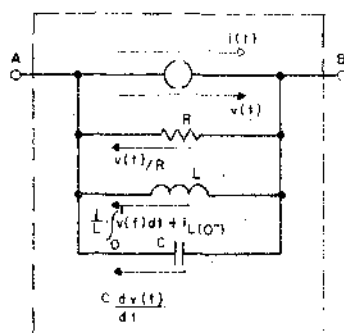


Fig. 1.19

ticos a través de los cuales la corriente impuesta pueda modificarse en función del circuito alimentado. Dicho más claramente *no podrá tener en su interior elementos de circuito pasivo de paralelo con sus bornes*. Es posible demostrar ello por el absurdo, considerando el circuito de la Fig. 1.19 como un posible generador ideal. Para una dada carga entre los bornes *A-B* se establecerá una tensión entre los mencionados puntos y en consecuencia una dada corriente en la carga.

Modificando la carga, variará la tensión entre *A-B*, y en consecuencia la corriente en aquélla. Es claro que si se desea que la corriente en la carga permanezca invariable, deberá cumplirse simultáneamente que $R \rightarrow \infty$ y $C \rightarrow 0$, lo cual concuerda con lo anunciado anteriormente.

Nótese por otra parte, que elementos pasivos conectados en serie con el generador ideal de corriente no lo afectan, pues él impone el valor de la misma.

Nota 1: Sobre generadores reales e ideales

Se ha visto que inyectando energía a un modelo mediante los tramos activos, se puede imponer la tensión (generadores ideales de tensión), o bien imponer la corriente (generadores ideales de corriente). Pero es de hacer notar que en la práctica no puede cumplirse rigurosamente lo mencionado.

A efectos de interpretar conceptualmente el problema, y en forma muy simplificada, se puede decir que en un generador real de tensión, en el cual la misma sea constante para cualquier valor de la resistencia de carga, su resistencia interna debe ser mucho menor que esta última. De esa manera el efecto de oposición a la corriente de la resistencia interna del generador es despreciable respecto de la carga. En consecuencia un generador ideal de tensión debe tener resistencia interna nula, lo que concuerda con lo visto en 1.5.1).

En cambio, en un generador real de corriente su resistencia interna debe ser mucho mayor que cualquier resistencia de carga, pues de esa manera la corriente depende exclusivamente del valor de la resistencia interna. Por lo tanto un generador ideal de corriente debe tener una resistencia interna infinita, lo cual coincide con lo visto en 1.5.2).

Nota 2: Sobre otros elementos de circuito

Es de resaltar que además de los mencionados, existen otros tipos de elementos de circuito conocidos comúnmente como generadores controlados.

Actúan de tal forma que la magnitud que imponen en una parte del circuito es controlada por una tensión o corriente en otra parte del circuito.

Se estudiarán en el Cap. 15: Teoría de los Cuadripolos; debiendo encasillarse dentro de los elementos de circuitos pasivos y serán denominados *amplificadores* y *trasferidores ideales*. En los cursos de teoría de circuitos más avanzados se introducirán elementos complementarios, tales como el girador, el conversor negativo, etc.

1.6. Sentidos de referencia

Los sentidos de referencia son *necesarios* para plantear las ecuaciones de equilibrio de los modelos circuitales idealizados. Si éstos no se introducen no estará unívocamente definida la variable eléctrica. Por ejemplo suponiendo que el resistor indicado en la Fig. 1.20.a) posee una tensión en bornes que es $V_R = 10$ V. De esta manera se sabe que la diferencia de potencial entre bornes es de 10 V; pero no se sabe cuál es el borne de mayor potencial respecto del otro; y esa es, precisamente, la *información* que al agregar el sentido de referencia aparece. Es decir, si tal como se muestra en la Fig. 1.20.b), se dibuja la flecha, expresando de esa forma que "éste es el sentido de referencia" y $V_R = 10$ V, ahora si se

dice que el borne superior es 10 V mayor que el inferior y podrán plantearse las leyes unívocamente.

Nótese que la misma información se da en la Fig. 1.20.c) señalando que $V_R = -10$ V. Queda claro entonces, para que una tensión o corriente quede unívocamente definida deberá conocerse de ella: su *valor numérico*; su *signo* y su *sentido de referencia* (con respecto al cual se ha computado ese signo).

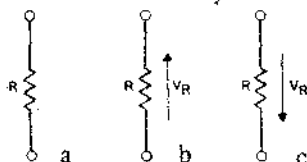


Fig. 1.20

Es de hacer notar que cuando se resuelven los circuitos eléctricos, los sentidos de referencia se fijan arbitrariamente, y una vez elegidos no podrán cambiarse en la resolución del problema. Dado que las ecuaciones se plantean para los sentidos de referencia, si el resultado hallado es positivo, la variable real coincide con el sentido de referencia. Si resulta negativo, la variable real tiene sentido opuesto al tomado como referencia.

Será analizada un poco más en detalle la información suministrada por el sentido de referencia. Suponiendo, tal como se ilustra en la Fig. 1.21.a) un generador de tensión senoidal y su sentido de referencia. Si se conocen además los sentidos reales, como se muestra en la Fig. 1.21.b), se podrá graficar $v(t)$. Como en el primer semiciclo, la tensión real coincide con la referencia, se dibujará la tensión senoidal positiva tal como se ilustra en la Fig. 1.21.c) y negativa para el segundo semiciclo dado que el sentido real es opuesto al de referencia. De esta manera no se tienen dudas para identificar la tensión.

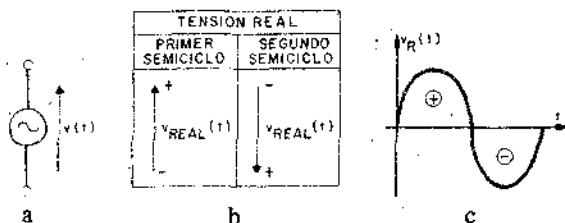


Fig. 1.21

Pero qué sucede si al mismo generador se le invierte su sentido de referencia, como se indica en la Fig. 1.22.a). Para los mismos sentidos reales mostrados en la Fig. 1.22.b) se obtiene en la Fig. 1.22.c) una senoide distinta, trazada según el procedimiento indicado anteriormente. Es evidente que la variable real no ha variado, pero parecería observando ambas senoides que la información se ha modificado. No es así, la información que da el conjunto es la misma, si se analizan las Figs. 1.21 y 1.22.

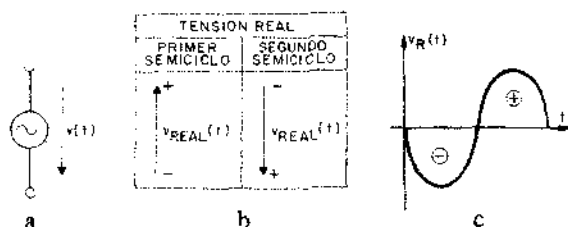


Fig. 1.22

En la Fig. 1.23 se muestra como ejemplo aclaratorio de lo anterior los casos a) y b) en los que la información es la misma. Por otra parte, es claro que disponiendo de la gráfica de la variable eléctrica en función del tiempo y del sentido de referencia se pueden hallar los sentidos reales.

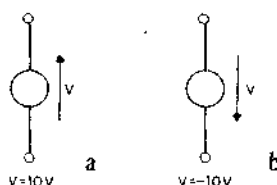


Fig. 1.23

Finalmente, cabe preguntarse por qué se utilizan los *sentidos de referencia* y no los *reales*. Fundamentalmente porque los sentidos de referencia son invariantes con el tiempo; mientras que si son colocados los sentidos reales, y la señal variase de polaridades n veces por segundo, se tendrían que cambiar los sentidos reales con la misma velocidad. Además, en configuraciones eléctricas complicadas, el sentido real podría ser imposible de determinar a priori. Es necesario resaltar que, mientras no se diga lo contrario toda "flecha" que se incluya en un modelo circuital corresponderá a un sentido de referencia. También, todo elemento de circuito, tanto pasivo como activo, debe considerarse como ideal, mientras no se aclare lo contrario.

1.7. Reglas para construir el modelo circuital idealizado correspondiente a un problema real

Teniendo en cuenta lo visto en los párrafos anteriores, seguidamente se analizará:

1.7.1) Regla Práctica:

a) Toda parte del esquema real en la que exista como fenómeno preponderante la conversión de energía eléctrica hacia otras formas de energía con carácter irreversible será reemplazada por un resistor como elemento principal.

b) Toda parte del esquema real donde el fenómeno preponderante consista en la acumulación de cargas eléctricas será reemplazada por un capacitor como elemento principal, en el que se supone concentrada toda la energía asociada al campo eléctrico de la parte de circuito que reemplaza.

c) Toda parte del esquema real donde el fenómeno preponderante consista en la concatenación de campo magnético, será reemplazada por un inductor como elemento principal, en el que se supone concentrada toda la energía asociada al campo magnético de la parte de circuito que reemplaza.

d) Toda parte del esquema real, donde se inyecte energía al mismo, será reemplazada por un generador de tensión o corriente, convenientemente mejorados mediante el agregado de elementos de circuito pasivos, hasta llegar a parecerse a los reales.

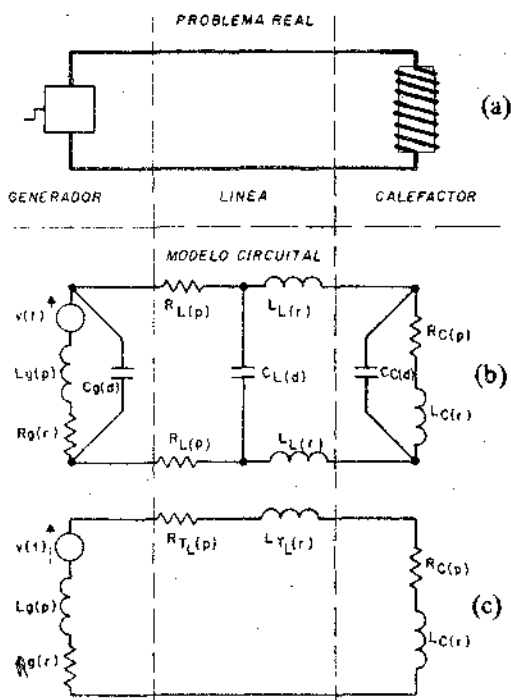


Fig. 1.24

e) Los distintos elementos de circuito serán conectados entre sí por analogía con el proceso real, mediante conductores ideales, que no poseen R , L o C . En otras palabras, no disipan energía, no concatenan campo magnético ni almacenan cargas eléctricas.

Naturalmente, que al analizar el problema real con el objeto de construir el modelo circuital, además del fenómeno preponderante aparecerán otros de menor valía, que deberán también ser considerados. Es decir que debe tenerse en cuenta cuáles son los *fenómenos preponderantes* que darán lugar a los *parámetros principales*.

Los fenómenos de tipo *secundario* darán lugar a los *parámetros residuales*.

Finalmente, existen fenómenos que pueden *no ser tenidos en cuenta*, lo que da lugar a los *parámetros despreciables*.

Para fijar ideas se pasa a una aplicación:

1.7.2) **Ejemplo:** Será construido el modelo circuital idealizado de un generador que produce una señal variable con el tiempo, conectado a un calefactor, tal como se muestra en la Fig. 1.24.a).

Es evidente que el calefactor presentará una resistencia como parámetro principal, $R_c(p)$, caracterizante de la potencia calórica disipada. Aunque la sección de los alambres del calefactor sea pequeña, existirá una débil concatenación de flujo magnético que dará lugar a la aparición de una inductancia como parámetro residual $L_c(r)$.

Naturalmente, el resistor e inductor correspondientes estarán conectados en serie pues cada trozo de conductor disipa energía y concatena campo magnético. Además, el total de cargas almacenadas y la tensión entre extremos del calefactor, dará lugar a la aparición de una capacidad.

Suponiendo que el generador provee una señal que varía en forma relativamente lenta en función del tiempo, la mencionada capacitancia, $C_c(d)$, será de carácter despreciable. Para fundamentar esto último, se puede analizar la Ec. (1.5):

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

es evidente que si $v(t)$ varía lentamente, la derivada será de pequeño valor y la corriente despreciable. Todo esto se indica en la Fig. 1.24.b).

El generador real será reemplazado por uno ideal, $v(t)$, y elementos pasivos en serie, pues por otra parte, en paralelo no lo empeoran. El arrollamiento del generador concatena un flujo magnético, creando una inductancia como parámetro principal, $L_g(p)$ (en última instancia dependerá del tipo de generador). Además, se aprecia disipación de energía en forma calórica, dando lugar a la aparición de una resistencia de carácter residual, $R_g(r)$. Finalmente debida a las cargas almacenadas y a la tensión de bornes del generador, aparecerá una capacitancia, $C_g(d)$, que por las razones mencionadas anteriormente podrá considerarse despreciable.

En cada conductor de la línea, existirá disipación de energía como fenómeno preponderante, lo que da lugar a la aparición de una resistencia como parámetro principal, $RL(p)$. Además, dichos conductores concatenarán flujo magnético debido a las variaciones de corriente en la línea, lo que da lugar a la aparición de una inductancia como parámetro residual, $LL(r)$. La capacidad total entre líneas, de carácter despreciable, fue indicada en la Fig. 1.24.b) como $CL(d)$.

Reafirmando el hecho de trabajar en fenómenos que varíen lentamente se podrán eliminar todas las capacidades. Además, se pueden condensar toda la resistencia e inductancia de la línea en dos elementos, $R_{T_L(p)}$ y $L_{T_L(r)}$, con lo que se llega al modelo simplificado mostrado en la Fig. 1.24.c).

1.8. Modelos circuitales idealizados de los elementos de circuito pasivos reales

Con el objeto de realizar un análisis conceptual y simplificado, serán considerados los *modelos reales más simples* de los elementos pasivos.

1.8.1) **Inductores:** Tal como se muestra en la Fig. 1.25, el inductor tomado como ejemplo se arrolla sobre un núcleo magnético con el fin de aumentar el flujo concatenado, a saber:

$$\phi_c = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

El modelo circuitual idealizado se muestra en la Fig. 1.26. Obviamente, el flujo concatenado dará lugar a la aparición de una inductancia, $L(p)$, como parámetro principal.

Como hay disipación de energía en forma de calor, aparecerá una resistencia, $R(r)$, como parámetro residual. El resistor correspondiente se conectará en serie con el inductor, pues cada trozo pequeño de conductor disipa calor y concatena flujo.

Tal como muestra la Fig. 1.25, se observan espiras enfrentadas, existiendo entre ellas una diferencia de potencial, cargas almacenadas y un medio, lo que da lugar a la aparición de las capacidades indicadas.

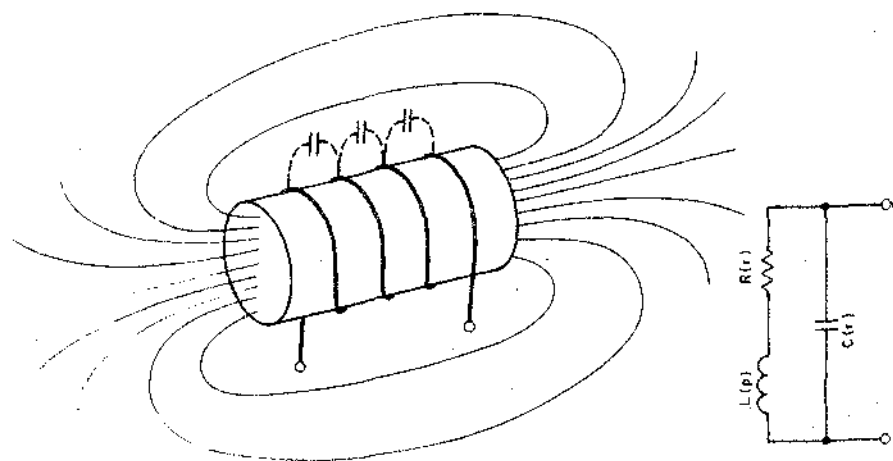


Fig. 1.25

Fig. 1.26

En la Fig. 1.26, es agregada una capacitancia $C(r)$, como parámetro residual, en reemplazo de las anteriormente mencionadas. Es de hacer notar, que normalmente $R(r)$ no puede desprejarse, pero sí $C(r)$ en fenómenos de variación lenta, por lo ya explicado en 1.7.2).

1.8.2) Resistores: Como se ilustra en la Fig. 1.27 el resistor elemental tomado como ejemplo consiste en un conductor arrollado sobre una forma muy delgada, con el objeto de hacer mínima la superficie de integración, y en consecuencia disminuir el flujo concatenado (se busca el efecto opuesto al caso anterior).

En la Fig. 1.28 se muestra el modelo circuital idealizado. Naturalmente aparece una resistencia, $R(p)$, como parámetro principal. Dado que existe algo de flujo concatenado, aparecerá una inductancia, $L(r)$, como parámetro residual. $R(p)$ y $L(r)$ se conectan en serie por analogía a lo explicado para el caso anterior. Similarmenre aparecerá una capacitancia, $C(r)$, como parámetro residual.

Es de hacer notar que por razones conocidas, $C(r)$ podrá desprejarse, y a veces, también $L(r)$.

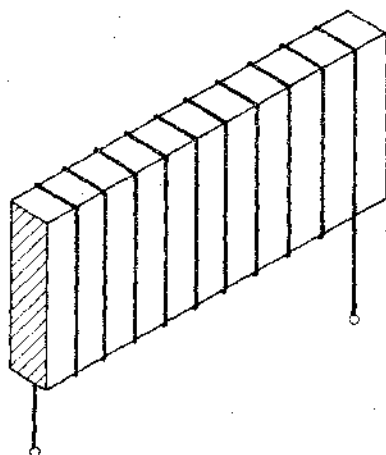


Fig. 1.27

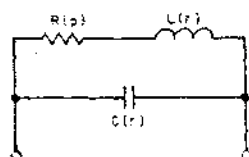


Fig. 1.28

1.8.3) Capacitores: Se considerará el capacitor elemental de dos placas planas y paralelas separadas por un dieléctrico, tal como se muestra en la Fig. 1.29.

En la Fig. 1.30 se muestra un modelo circuital idealizado. Como su finalidad es almacenar cargas, aparecerá una capacitancia, $C(p)$ como parámetro principal.

Debido a que el dieléctrico no es perfecto, dejará pasar algunas cargas, existiendo disipación de energía, caracterizada por una resistencia $R(r)$, de carácter residual. El resistor correspondiente de alto valor se coloca en paralelo, dado que las pérdidas mencionadas son función de la tensión aplicada.

Cada terminal aporta a su vez resistencia a inductancia, como parámetro residual, que se suponen condensadas en $RT(r)$ y $LT(r)$.

Nótese que debido a su alto valor, $R(r)$ normalmente se despreja, al igual que $RT(r)$ y $LT(r)$ debido a sus bajos valores. De acuerdo con lo estudiado en 1.8 sur-

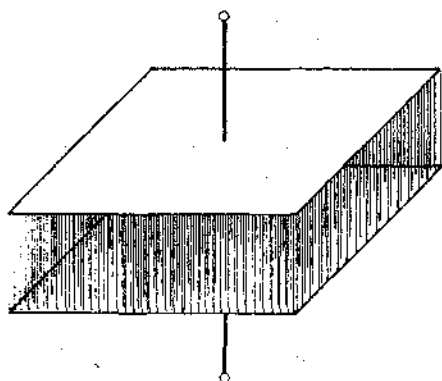


Fig. 1.29

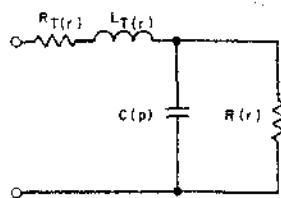


Fig. 1.30

Se da un *orden de mérito* para clasificar a los elementos reales que más se parecen a los ideales, resultando: *Capacitor-Resistor-Inductor*.

1.9. Modelos circuitales idealizados de los elementos de circuito activos reales

Según se desprende del parágrafo 1.5, empeorando convenientemente a los generadores ideales se convertirán en reales.

1.9.1) **Generador de tensión:** Tal como se muestra en la Fig. 1.31, un generador real de tensión se logra conectando en serie con un generador ideal de tensión un dipolo pasivo (D. P.). Se entiende por dipolo pasivo, a toda configuración circuital arbitraria en cuanto a su geometría, constituida por elementos de circuito pasivos, y que tiene un par de terminales para su conexión con el resto del esquema eléctrico.

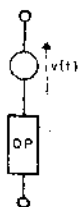


Fig. 1.31

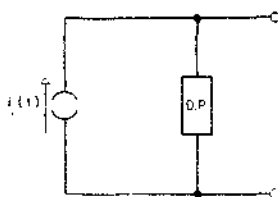


Fig. 1.32

1.9.2) **Generador de corriente:** En la Fig. 1.32, se ilustra la forma de lograr un generador real de corriente, conectando en paralelo con un generador ideal de corriente un dipolo pasivo.

1.10 Terminología básica asociada a los modelos circuitales

Serán adelantadas aquí algunas definiciones básicas de la geometría de circuito, a efectos de contar con un lenguaje común para la resolución de circuitos elementales. Todo esto se profundizará en detalle en el Cap. 13: Resolución Sistemática de Circuitos.

1.10.1) **Rama:** es toda asociación de elementos de circuito conectados en serie, que tiene un par de terminales para su conexión con el resto del esquema eléctrico.

1.10.2) **Nodo:** es todo punto del circuito eléctrico del cual se quiere poner su potencial en evidencia. Existen nodos obligatorios, que son aquellos en los cuales convergen tres o más ramas, y nodos opcionales, siendo aquellos en los cuales convergen menos de tres.

1.10.3) **Malla:** es toda trayectoria cerrada a lo largo de distintas ramas.

1.10.4) **Dipolo pasivo:** ver 1.9.1)

1.10.5) **Dipolo activo:** es toda configuración circuital arbitraria en cuanto a su geometría, constituida por elementos de circuito activos y pasivos, y que tiene un par de terminales para su conexión con el resto del esquema eléctrico.

1.11. Propiedades de los modelos circuitales idealizados

Estas propiedades derivan de la forma en que se definieron los modelos, y la primera de ellas, en particular, de los conductores.

1.11.1) **Primera propiedad:** Dado que los conductores ideales *no pueden almacenar cargas eléctricas*, y los nodos se encuentran siempre sobre conductores ideales, resulta que la suma de las cargas que llegan por unidad de tiempo a un nodo es igual a la suma de las cargas salientes de ese nodo. Como la velocidad de variación de carga respecto del tiempo es la corriente, es decir:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

esto conduce a que:

$$\sum_{K=1}^n i_{K(t)} = 0 \quad (1.10)$$

A la Ec. 1.10 se la denomina *Primera Regla de Kirchhoff*. Dicha regla establece que la suma algebraica de las corrientes que convergen a un nodo es nula. Por convención, se computarán con signo positivo las corrientes salientes de un nodo, y con negativo, las entrantes.

1.11.2) **Segunda propiedad:** En un modelo circuital idealizado la concatenación de flujo magnético se encuentra concentrada únicamente en los inductores, de modo que la diferencia de potencial entre dos nodos cualesquiera es independiente del camino seguido para calcularla. Es decir que el modelo circuital idealizado es potencial.

Con el objeto de aclarar esta propiedad de los modelos idealizados, se considerará primeramente, un modelo real. Por ejemplo, el de un generador que alimenta a un calefactor, mostrado ya en la Fig. 1.24.a) y que fue reproducido en la Fig. 1.33. En ella se pone de manifiesto la corriente variable $i(t)$ que circula en el modelo, y las líneas de campo magnético, entrantes al plano del papel, según lo indica la "regla del tirabuzón".

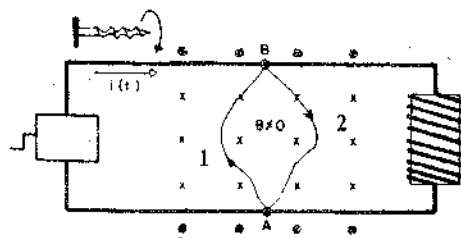


Fig. 1.33

En la misma se toman dos puntos cualesquiera, A y B , y dos trayectorias arbitrarias, 1 y 2, que unen dichos puntos. Se aplica la ley de la Inducción Electromagnética Generalizada, con un sentido arbitrario, a cualquier superficie que tenga como borde a la superficie cerrada AB , y a cualquier camino delimitado por 1 y 2, a saber:

$$\oint_{A1B2A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Debido a la influencia de los conductores existirá flujo concatenado en la superficie encerrada por los caminos de integración. Como el generador provee una corriente variable,

$$\vec{B} = f(t)$$

en consecuencia,

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad \text{y se le da un valor } V,$$

por lo tanto:

$$\oint_{A1B2A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V \quad \text{desdoblando la integral y operando,}$$

$$\int_{A1B} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B2A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V$$

$$\int_{B1A} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{B2A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V \quad \text{pero como } \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \text{ resulta,}$$

$$\int_{B1A} dV - \int_{B2A} dV = V \quad \therefore [V_A - V_B]_1 - [V_A - V_B]_2 = V$$

$$\therefore V_{AB}|_1 - V_{AB}|_2 = V \quad (1.11)$$

La Ec. (1.11) indica que $V_{AB}|_1 \neq V_{AB}|_2$. En otras palabras en un *círculo real* excitado por una señal variable la diferencia de potencial entre dos puntos depende del camino seguido para calcularla, lo que indica que el circuito real no es potencial. Por otra parte, se desprende del desarrollo anterior, que la diferencia encontrada en la Ec. (1.11) será mayor a medida que los fenómenos varíen más rápidamente.

Estudiando ya el circuito real, se extienden los resultados obtenidos a un modelo circuital idealizado, que se muestra en la Fig. 1.34, resultando que al ser $\vec{B} = 0$ es:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\therefore V_{AB}|_1 - V_{AB}|_2 = 0 \quad (1.12)$$

La Ec. (1.12) indica que $V_{AB}|_1 = V_{AB}|_2$. Es decir que en un *modelo circuital idealizado* la diferencia de potencial entre dos puntos es independiente del camino seguido para calcularla, lo que indica que el modelo circuital idealizado es

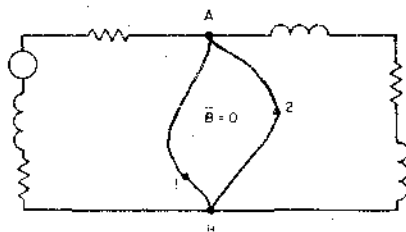


Fig. 1.34

potencial. En otras palabras, la diferencia de potencial total a lo largo de cualquier camino cerrado tendido entre dos nodos de un modelo circuitual idealizado es nulo, lo que puede expresarse como:

$$\sum_{l=1}^n V_l(t) = 0 \quad (1.13)$$

A la Ec.(1.13) se la denomina *Segunda regla de Kirchhoff*.

Imaginando una malla constituida por elementos de circuito activos y pasivos, la Ec. (1.13) puede transformarse, en forma genérica, como:

$$\sum v(t) = \sum R \cdot i(t) + \sum L \frac{di(t)}{dt} + \sum \left[\frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_c(0^-) \right]$$

Para aplicar la última ecuación se recorre la malla en cuestión con un sentido fijado arbitrariamente. En el primer miembro se computarán como positivas las diferencias de potencial cuyos sentidos de referencia coinciden con el de circulación, y negativas en caso contrario. Para el segundo miembro las caídas de tensión en los elementos pasivos se tomarán como positivas cuando el sentido de referencia de la corriente sea coincidente con el de circulación, y negativas en caso opuesto.

Nótese por otra parte, que de acuerdo con los resultados encontrados en las Ecs.(1.12) y (1.11) parecería ser que la Segunda Regla de Kirchhoff se aplica a los modelos idealizados pero no a los reales. Esto sólo es parcialmente cierto.

Por ejemplo, en corriente continua, el modelo real es potencial. Al ser $\vec{B} = \text{cte}$ es:

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad y$$

$$V_{AB}|_1 = V_{AB}|_2$$

Además, para fenómenos de variación relativamente lenta, la diferencia encontrada en la Ec.(1.11) es tan pequeña que puede decirse también que:

$$V_{AB}|_1 \cong V_{AB}|_2$$

es decir que conectando un voltímetro por el camino 1 y otro por el camino 2, medirían lo mismo, no consiguiendo detectar la diferencia.

Solamente no se cumpliría exactamente la *Segunda Regla de Kirchhoff*, para fenómenos de variación muy rápida. En esos casos, el valor hallado para V en la Ec. 1.11 sería importante. Es decir que si son conectados dos voltímetros según se indicó anteriormente no medirían lo mismo y su diferencia sería el valor de V indicado en la Ec. (1.11).

Desde el punto de vista circuital, se puede decir, en forma simplificada, que la diferencia mencionada se debe a que al mover cualquier elemento del circuito se modifica su geometría, y en consecuencia variarán los potenciales.

1.12 Ejemplos elementales de aplicación de las leyes de Kirchhoff y Ohm

Previamente, se mencionarán las *unidades de las magnitudes más comunes* utilizadas en Teoría de los Circuitos, en el sistema m.k.s.

Carga $[Q; q(t)]$	Coulomb	$[C] = [A \cdot s]$
Tensión $[V; v(t)]$	Volt	$[V] = \left[\frac{J}{C} \right]$
Corriente $[I; i(t)]$	Ampere	$[A] = \left[\frac{C}{s} \right]$
Resistencia $[R]$	Ohm	$[\Omega] = \left[\frac{V}{A} \right]$
Inductancia $[L]$	Henry	$[H] = \left[\frac{V \cdot s}{A} \right]$
Capacitancia $[C]$	Farad	$[F] = \left[\frac{C}{V} \right]$
Potencia $[P; p(t)]$	Watt	$[W] = [V \cdot A]$
Energía $[W; w(t)]$	Joule	$[J] = [V \cdot A \cdot s]$

Por otra parte, los múltiplos y submúltiplos más corrientes son:

Mega	[M]	=	unidad $\times 10^6$
Kilo	[k]	=	unidad $\times 10^3$
Mili	[m]	=	unidad $\times 10^{-3}$
Micro	[μ]	=	unidad $\times 10^{-6}$
Nano	[n]	=	unidad $\times 10^{-9}$
Micro-micro ó pico [$\mu\mu$ ó p]		=	unidad $\times 10^{-12}$

1.12.1) Problemas resueltos

- a) Para el circuito de la Fig. 1.35 determinar el valor de la corriente
- I_3
- .

Solución:

Se aplica la *Primera Regla de Kirchhoff* al nodo A

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad \therefore$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = (1 + 10) \text{ A}$$

$$I_3 = 11 \text{ A}$$

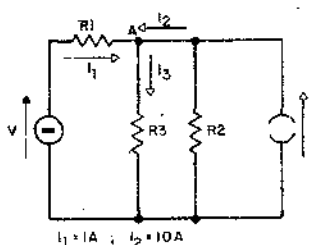


Fig. 1.35

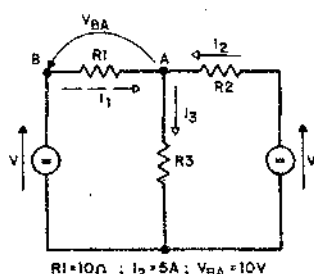


Fig. 1.36

- b) Dado el modelo mostrado en la Fig. 1.36 hallar el valor de la corriente
- I_3
- .

Solución:

Para los datos dados, debe determinarse primeramente la corriente circulante por R_1 . Se asigna para I_1 un sentido de referencia coherente con el de la tensión V_{BA} conocida (en línea de trazo en la Fig. 1.36).

En estas condiciones resulta, derivado de la *Ley de Ohm*:

$$I_1 = \frac{V_{BA}}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega}$$

$$I_1 = 1 \text{ A}$$

Ahora sí, puede aplicarse la *Primera Regla de Kirchhoff* al nodo A,

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = (1 + 5) \text{ A}$$

$$I_3 = 6 \text{ A}$$

c) En el circuito que ilustra la Fig. 1.37 calcular el valor de la corriente.

Solución

Se toma para la corriente un sentido de referencia arbitrario, al igual que uno de circulación, para recorrer la malla (ambos en línea de trazo en la Fig. 1.37). Planteando la Segunda Regla de Kirchhoff

$$V_1 - V_2 = R_1 I + R_2 I + R_3 I \quad \therefore$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(20 - 10) \text{ V}}{(5 + 10 + 85) \Omega}$$

$$I = 0,1 \text{ A}$$

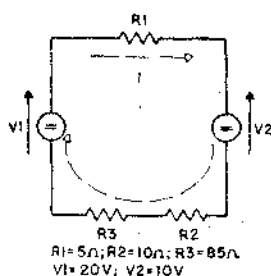


Fig. 1.37

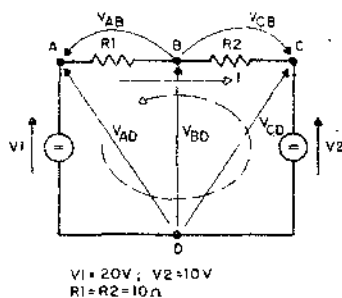


Fig. 1.38

Nótese el signo positivo para el valor de I , debido a que el sentido de referencia adoptado coincide con el real.

d) Para el circuito mostrado en la Fig. 1.38 se pide determinar los valores de: $d_1) I$; $d_2) V_{AD}$; $d_3) V_{BD}$; $d_4) V_{CD}$; $d_5) V_{AB}$; $d_6) V_{CB}$.

Solución:

Asignando un sentido de circulación arbitrario (en línea de trazo en la Fig. 1.38) se encuentran las incógnitas planteando la Segunda Regla de Kirchhoff:

$$d_1) - V_1 + V_2 = - R_1 I - R_2 I \quad \therefore$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} = \frac{(20 - 10) \text{ V}}{(10 + 10) \Omega}$$

$$I = 0,5 \text{ A}$$

$$d_2) - V_1 + V_{AD} = 0 \quad \therefore$$

$$V_{AD} = V_1 = 20 \text{ V}$$

$$d_3) \quad -V_1 + V_{BD} = -I \cdot R_1 \quad \therefore$$

$$V_{BD} = -I \cdot R_1 + V_1 = (-0,5 \cdot 10 + 20) \text{ V}$$

$$V_{BD} = 15 \text{ V}$$

$$d_4) \quad V_2 - V_{CD} = 0 \quad \therefore$$

$$V_{CD} = V_2 = 10 \text{ V}$$

d₅) Dado que en R_1 tensión y corriente son coherentes resulta:

$$V_{AB} = R_1 \cdot I = (10 \cdot 0,5) \text{ V}$$

$$V_{AB} = 5 \text{ V}$$

d₆) Debido a que en R_2 tensión y corriente no son coherentes:

$$V_{CB} = -R_2 \cdot I = -(10 \cdot 0,5) \text{ V}$$

$$V_{CB} = -5 \text{ V}$$

e) En el circuito de la Fig. 1.39, hallar los valores de corriente en la carga I_c , y tensión en la carga V_c , graficándolas para los valores de R_c indicados, con un error $\epsilon \leq 1\%$. R_g representa la resistencia interna del generador V_g .
Solución:

Se calculan los valores de I_c y V_c según se muestra en la tabla de la Fig. 1.40 teniendo en cuenta el error admitido. Con los datos de dicha tabla se realizan las representaciones gráficas mostradas en la Fig. 1.41.

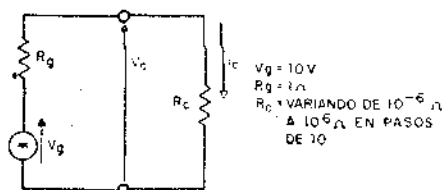


Fig. 1.39

R_c	$R_c + R_g$	$I_c = \frac{V_3}{R_c + R_g}$	$V_c = R_c I_c$
Ω	Ω	A	V
10^{-6}	1	10	10^{-5}
10^{-5}	1	10	10^{-4}
10^{-4}	1	10	10^{-3}
10^{-3}	1	10	10^{-2}
10^{-2}	1	10	10^{-1}
10^{-1}	1,1	9,1	0,91
1	2	5	5
10	11	0,91	9,1
10^2	10^2	0,1	10
10^3	10^3	10^{-2}	10
10^4	10^4	10^{-3}	10
10^5	10^5	10^{-4}	10
10^6	10^6	10^{-5}	10

Fig. 1.40

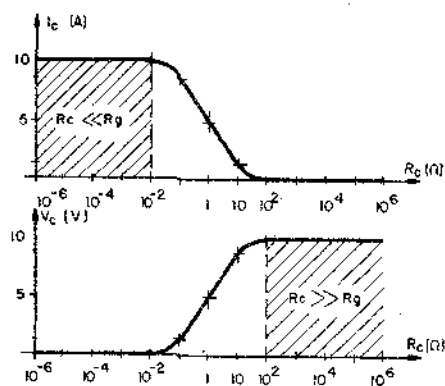


Fig. 1.41

Obsérvese la zona de corriente constante, en la cual se cumple que la resistencia interna del generador es mucho mayor que la de carga.

Similantemente existe una zona de tensión constante, para la cual la resistencia interna del generador es mucho menor que la de la carga. Las mencionadas zonas representan, dentro del error admitido, el comportamiento de un generador ideal de corriente y de tensión respectivamente, lo cual es concordante con la forma en que se definieron dichos elementos activos.

1.12.2) Problemas propuestos

a) Para la configuración circuital mostrada en la Fig. 1.42 encontrar el valor de I_5 .

Resultados:

$$I_5 = -9 \text{ A}$$

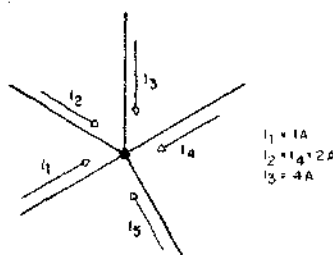


Fig. 1.42

Nótese que los signos se computan para los sentidos de referencia, y como éstos son arbitrarios podrá admitirse cualquier sentido.

Luego el resultado dará el signo que corresponda. En este caso el valor de I_5 es 9 A para el sentido de referencia asignado que resulta opuesto al sentido real.

b) Resolver el problema de la Fig. 1.37 cambiando el sentido de circulación.

Resultados

$$I = 0,1 \text{ A}$$

Se encuentra el mismo valor para I , pues el resultado no puede depender del sentido de circulación que se adopte.

c) Resolver el problema de la Fig. 1.37 cambiando en este caso el sentido de referencia para la corriente.

Resultados:

$$I = -0,1 \text{ A}$$

Lo que indica que I resulta negativa para el nuevo sentido, y en consecuencia positiva para el sentido contrario, lo cual concuerda con los resultados obtenidos anteriormente. De los tres ejemplos realizados sobre el circuito de la Fig. 1.37 queda claro que si no se tienen los sentidos de referencia, pueden fijarse en forma arbitraria, y luego analizar los resultados.

d) Para el circuito de la Fig. 1.43, calcular los valores correspondientes a:
d₁) I_3 ; d₂) I ; d₃) V .

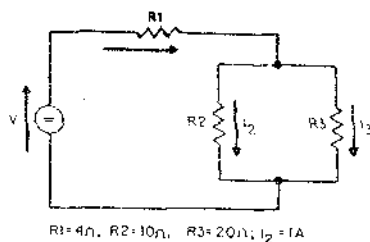


Fig. 1.43

Resultados:

$$d_1) I_3 = 0,5 \text{ A}$$

$$d_2) I = 1,5 \text{ A}$$

$$d_3) V = 16 \text{ V}$$

Señales de excitación de uso frecuente

2.1 Introducción

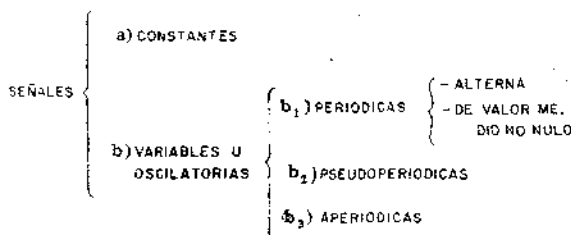
En el capítulo anterior se han definido los **parámetros pasivos**. En éste, serán analizadas las señales de excitación más comunes, **periódicas** y no periódicas. Es decir que este capítulo constituye básicamente la definición de los parámetros activos.

Luego de una clasificación general, se estudiarán en primer lugar las **señales periódicas** definiendo y calculando valores y factores característicos asociados. Se introducirá además el desarrollo de **señales periódicas** no senoidales en *Serie de Fourier*.

Finalmente, se estudiarán las **señales no periódicas**, las relaciones entre las mismas, y la construcción de señales **complicadas a partir** de las mencionadas señales aperiódicas.

2.2 Clasificación de las señales según su ley de variación en función del tiempo

Haciendo referencia en forma genérica a las tensiones y corrientes, se usará la denominación de **señales**, empleando para su designación el símbolo literal $s(t)$ pueden clasificarse según el ordenamiento indicado en la Fig. 2.1.



En la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo de señal causal en función del tiempo como las que se estudiarán en este libro.

La clasificación mencionada anteriormente puede detallarse como sigue:

a) *Señales constantes (continuas)*: son aquellas en las cuales su amplitud es independiente del tiempo, tal como la que ilustra la Fig. 2.3.

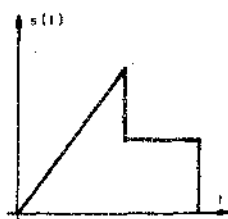


Fig. 2. 2

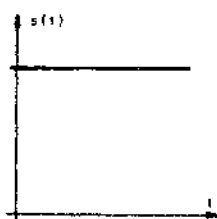


Fig. 2. 3

b) *Señales variables u oscilatorias*: son aquellas para las cuales su amplitud varía en función del tiempo; por ejemplo la mostrada en la Fig. 2.4.

b.1) *Periódicas*: son aquellas señales que, luego de pasar por una serie de valores con una dada secuencia, vuelven a repetirse esos mismos valores con igual secuencia en forma cíclica e indefinida, aún para tiempos negativos. Dentro de este tipo de señales pueden darse dos casos. Por un lado las *alternas* o de *valor medio nulo*, que son aquellas que encierran un área neta nula, y un ejemplo se muestra en la Fig. 2.5. Por otro lado las de *valor medio no nulo*, que encierran un área neta no nula, y como ejemplo se muestra la de la Fig. 2.6.

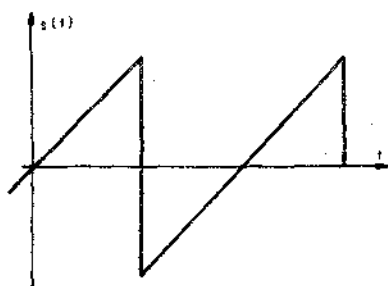


Fig. 2. 4

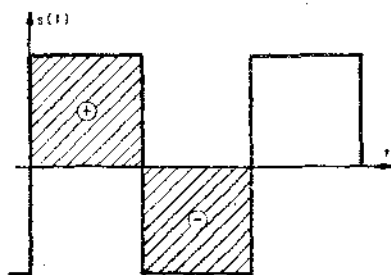


Fig. 2. 5

b.2) *Pseudoperiódicas*: son aquellas señales en las cuales ciertos puntos característicos se repiten a intervalos regulares de tiempo, pero con distinta amplitud. Por ejemplo, tal como la que muestra la Fig. 2.7.

b.3) *Aperiódicas*: son aquellas en que no vuelve a repetirse un dado juego de valores, para ningún tiempo comprendido entre menos y más infinito. Un ejemplo se ilustra en la Fig. 2.8.

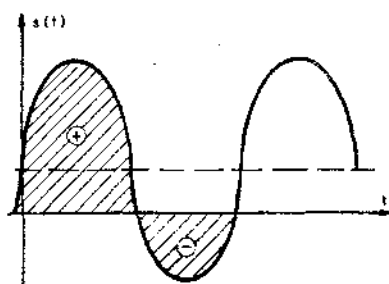


Fig. 2.6

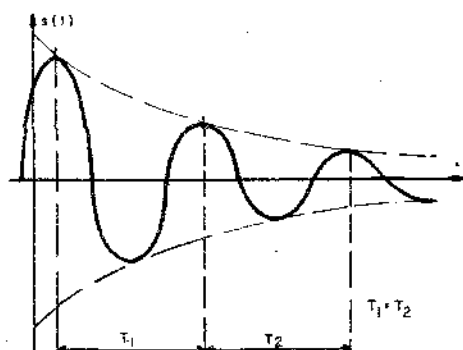


Fig. 2.7

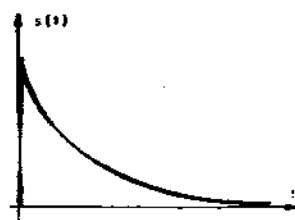


Fig. 2.8

2.3 Señales periódicas

2.3.1 Definiciones fundamentales asociadas

a) *Periodo*: es el tiempo que debe transcurrir para abarcar un juego completo de valores de una señal periódica. Nótese que no es necesario empezar a contabilizar el período (T) desde el momento en el cual la señal toma un valor nulo, sino que se puede empezar a tomar a partir de cualquier instante, tal como se muestra en la Fig. 2.9.

b) *Ciclo*: es un juego completo de valores contenidos en un período, como se ejemplifica en la Fig. 2.10.

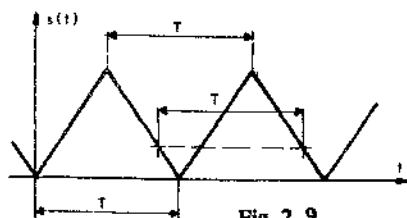


Fig. 2.9

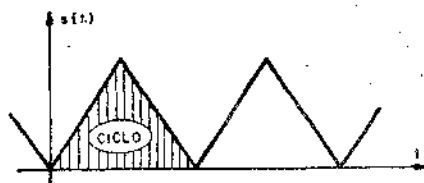


Fig. 2.10

c) *Frecuencia*: es el número de ciclos por unidad de tiempo, es decir:

$$f = \frac{\text{Número de ciclos}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

En la Fig. 2.10 se ve que en el caso de considerar un ciclo, el tiempo transcurrido será T segundos, de modo que la expresión anterior se reduce a:

$$f = \frac{1 \text{ ciclo}}{T \text{ segundos}} = \frac{1}{\text{Período}}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

La Ec. 2.1 establece que la frecuencia resulta la inversa del período.

d) *Forma de señal*: es la representación gráfica de un juego completo de valores, o sea de un ciclo de la señal. Un ejemplo se muestra en la Fig. 2.11.

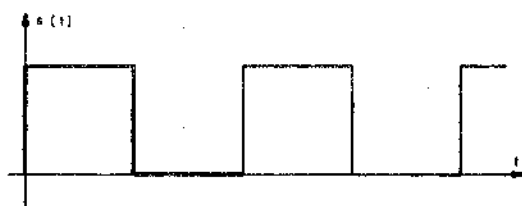


Fig. 2.11

e) *Fase*: es la abscisa que corresponde a un punto arbitrario de la señal. En la Fig. 2.12 se da un ejemplo.

f) *Diferencia de fase*: es la diferencia entre las fases individuales de dos señales correspondientes al mismo punto característico, tal como se ejemplifica en la Fig. 2.13. Nótese que las señales deben ser de igual forma.

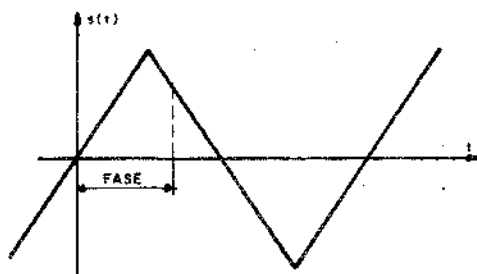


Fig. 2.12

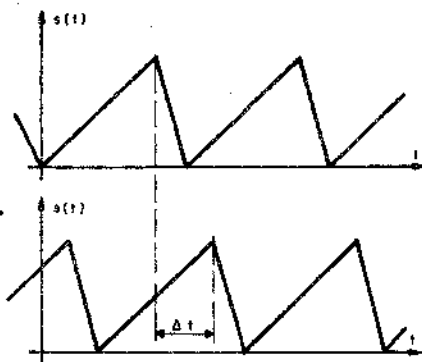


Fig. 2.13

g) Pulsación o frecuencia angular.

Muchas veces resulta más conveniente expresar la diferencia de fase (Δt) o la fase, en unidades de ángulo que de tiempo. Entonces, debe definirse alguna constante por la cual hay que multiplicar el tiempo, para que en el eje de abscisas se mida en ángulos.

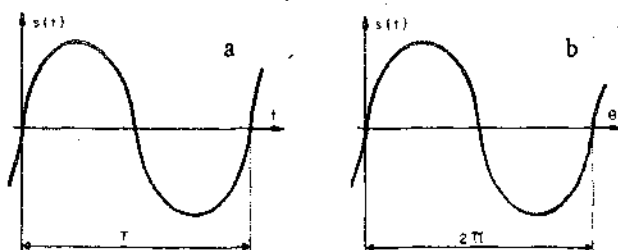


Fig. 2.14

Tómese por ejemplo la señal mostrada en la Fig. 2.14 a) con el eje de abscisas calibrado en tiempo. Si el mismo se gradúa en ángulos, T será proporcional a 2π como puede verse en la Fig. 2.14.b). La constante de proporcionalidad se define como ω , por lo cual,

$$\theta = 2\pi = \omega \cdot T \quad \therefore \quad (2.2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y por la Ec. 2.1}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.3)$$

La Ec. 2.3 relaciona a la pulsación o frecuencia angular y la frecuencia.

De la Ec. 2.2 surge que la pulsación o frecuencia angular es la constante por la cual debe multiplicarse el período para que el resultado tenga un valor de 2π radianes.

También puede interpretarse como la velocidad con que debería girar un vector para barrer 2π radianes en un período.

2.3.2) Valores característicos asociados

a) *Valor instantáneo*: es la ordenada que corresponde a una dada fase de señal. Se indica como $s(t)$, y en la Fig. 2.15 se muestra un ejemplo.

En el caso de considerar una corriente, como $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, el valor instantá-

neo está caracterizando la velocidad con que se está trasportando la carga a través de una rama considerada en dicho instante.

b) *Valor medio*: es el valor que debería tomar una señal constante, para trasportar en el mismo sentido que la señal periódica, idéntica carga neta, en un intervalo de tiempo igual a un período de ésta. Se representará al valor medio de una señal con el símbolo S_{me} . Si se trata de una tensión se utilizará V_{me} y para una corriente I_{me} .

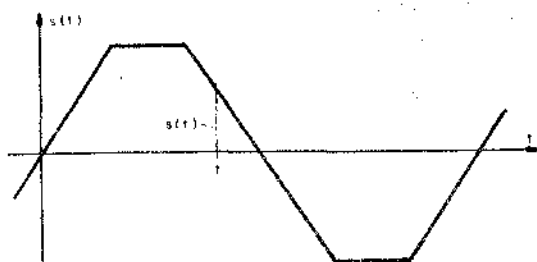


Fig. 2.15

Su expresión de cálculo puede deducirse a partir de:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$dq(t) = i(t) \cdot dt \quad (2.4)$$

donde $dq(t)$ es la carga transportada por la corriente $i(t)$ en el tiempo dt . Si se desea conocer la carga en un período, es necesario integrar la Ec. 2.4 en el mencionado intervalo de tiempo,

$$Q|_T = \int_0^T i(t) \cdot dt \quad (2.5)$$

Por otra parte, en base a la definición de valor medio, la carga en un período también será:

$$Q|_T = \int_0^T I_{me} \cdot dt = I_{me} \int_0^T dt \quad \therefore$$

$$Q|_T = I_{me} \cdot T \quad (2.6)$$

Como los primeros miembros de las Ec. 2.5 y 2.6 son iguales, los últimos también lo serán, por lo cual,

$$I_{me} \cdot T = \int_0^T i(t) \cdot dt \quad \therefore$$

$$I_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cdot dt \quad (2.7)$$

La Ec. 2.7 indica la forma de calcular el valor medio de una corriente. Expresada en forma genérica, se tiene:

$$S_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot dt \quad (2.8)$$

La Ec. 2.8 indica que el valor medio de una señal resulta de integrar a la misma en un período, es decir de encontrar la superficie que encierra, y dividirla por el mencionado tiempo.

Por lo tanto, tal como se indica en la Fig. 2.16, podría interpretarse geométricamente con la altura de un rectángulo, que encierra en un período igual área neta que la señal en cuestión.

Además, de acuerdo a la definición y formulaciones precedentes, surge una interpretación física para el valor medio: caracteriza transporte neto de carga.

Por otra parte, la Ec. 2.8 dice que este valor característico será nulo para las señales senoidales o de tipo senoidal, pues la integral de las mismas a lo largo de un período (su área neta) vale cero.

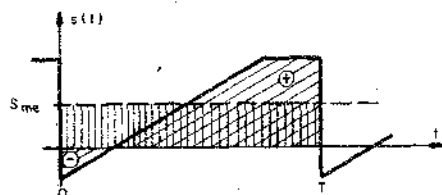


Fig. 2.16

Si se desea caracterizar entonces el transporte de carga sin importar el sentido, es decir el transporte bruto, puede definirse otro valor característico.

c) *Valor medio de módulo*: es el valor que debería tener una señal constante para transportar en un tiempo igual a un período la misma cantidad bruta de carga, que la señal periódica en cuestión. Se indica como $S |me|$, $V |me|$ ó $I |me|$

Su expresión de cálculo resulta,

$$S |me| = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| \cdot dt \quad (2.9)$$

Como en la Ec. 2.9 se considera el módulo de la señal, este valor característico sólo podrá anularse si es nula la señal a lo largo del período. De esta manera permite caracterizar el transporte bruto de cargas, aún de señales senoidales o similares, que poseen área neta nula.

Como se indica en la Fig. 2.17 podría interpretarse geométricamente como la altura de un rectángulo que encierra en un período igual área que el módulo de la señal en cuestión.

Su interpretación física es obvia: caracteriza transporte bruto de cargas.

d) *Valor máximo*: es el máximo valor que toma la señal dentro de las ordenadas positivas. Este valor, también llamado de *cresta* o *pico* se indica con S_m , V_m o I_m tal como se ilustra en la Fig. 2.18.

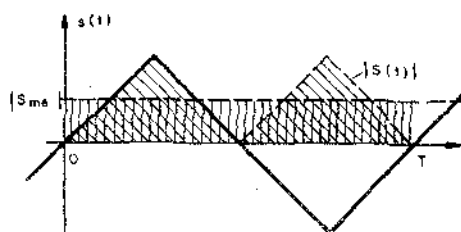


Fig. 2.17

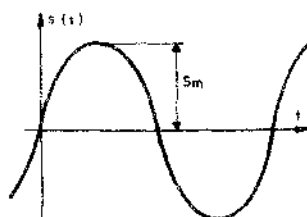


Fig. 2.18

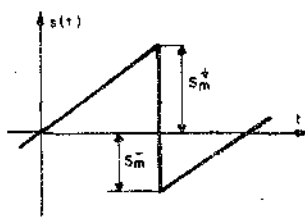


Fig. 2.19

Nótese que en el ejemplo elegido el valor máximo positivo es igual al negativo. Cuando ello no sucede, como en la Fig. 2.19 conviene identificar el valor máximo positivo con S_m^+ y definir el valor mínimo, como la menor ordenada con su signo, indicándolo con S_m^- .

Debido a la forma en que fue definido, el valor máximo caracteriza el mayor transporte instantáneo de carga. Nótese que la expresión $\frac{ds(t)}{dt} \approx 0$ no siempre define el valor máximo, pues se dan casos en que la derivada puede no existir en el punto considerado, como sería el caso de la señal mostrada en la Fig. 2.19.

e) *Valor pico a pico*: es el valor existente entre el máximo y el mínimo absolutos. Se indica con S_{pp} , V_{pp} ó I_{pp} y en las Figs. 2.20 a) y b) se dan dos ejemplos.

Es de hacer notar que tanto el valor máximo, como el pico a pico constituyen una necesidad tecnológica; existen instrumentos que los miden.

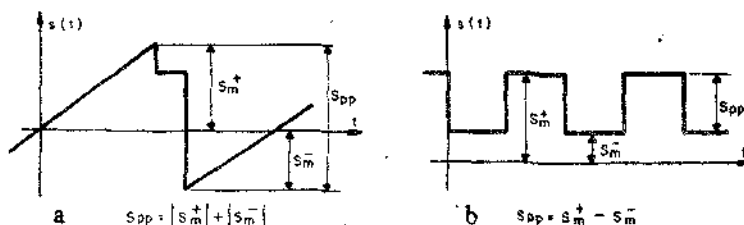


Fig. 2.20

f) *Valor eficaz*: es el valor que debería tener una señal constante para disipar en un intervalo de tiempo igual a un período, sobre idéntico resistor, igual cantidad de energía que la señal periódica en cuestión. El valor eficaz será representado por una letra mayúscula sin subíndices S , V o I según corresponda.

Su expresión de cálculo puede deducirse a partir de:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R \quad (2.10)$$

si además es considerada la potencia instantánea como la velocidad con que se intercambia la energía, se tiene:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (2.11)$$

Igualando la Ec. 2.10 a la Ec. 2.11

$$\frac{dW(t)}{dt} = i^2(t) \cdot R$$

$$dW(t) = i^2(t) \cdot R \cdot dt \quad (2.12)$$

Se desea calcular la energía en un período, se integrará la Ec. 2.12 en el mencionado intervalo de tiempo:

$$W]_T = \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = R \int_0^T i^2(t) dt \quad (2.13)$$

Además, en base a la definición de valor eficaz, la energía en un período también será igual a:

$$W]_T = \int_0^T I^2 \cdot R \cdot dt = R \cdot I^2 \int_0^T dt = R \cdot I^2 \cdot T \quad (2.14)$$

Como los primeros miembros de las Ecs. 2.13 y 2.14 son iguales, los últimos también lo serán, por lo cual:

$$R \cdot I^2 \cdot T = R \int_0^T i^2(t) \cdot dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt} \quad (2.15)$$

La Ec. 2.15 indica la forma de calcular el valor eficaz de una corriente. Expresada en forma genérica:

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) \cdot dt} \quad (2.16)$$

La Ec. 2.16 establece que el valor eficaz de una señal resulta de integrar la expresión al cuadrado de dicha señal en un período, es decir encontrar la superficie encerrada por el cuadrado de la función, dividirla por el período, y extraer su raíz cuadrada.

Si por ejemplo es considerada una señal senoidal tal como la mostrada en la Fig. 2.21.a), el cuadrado del valor eficaz, S^2 , podría interpretarse geoméricamente, como se ve en la Fig. 2.21.b), como la altura de un rectángulo que encierra en un período igual área que la expresión al cuadrado de la señal en cuestión.

Por otra parte, de acuerdo a la definición y formulaciones precedentes, surge una interpretación física para el valor eficaz: caracteriza la capacidad de transporte de energía de la señal.

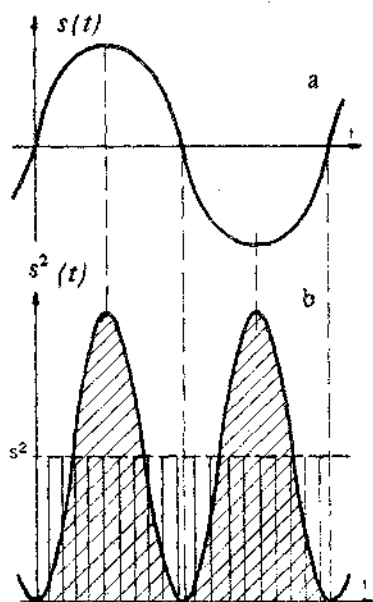


Fig. 2. 21

2.3.3) Cálculo de sus valores característicos para las funciones periódicas de uso frecuente

Para el cálculo de estos valores característicos, en general, conviene dividir el intervalo de integración en tantas partes como sea necesario con el fin de lograr expresiones simples de la señal para los mencionados subintervalos.

Se llevarán a cabo varios ejemplos; comenzando por definir la señal en el intervalo de integración, y luego se aplicarán las expresiones de cálculo de los valores característicos.

a) Señal rectangular

Para la señal mostrada en la Fig. 2.22 se tiene, dado que $S_m^+ = S_m^- = S_m$.

$$s(t) \begin{cases} S_m & 0 < t < T/2 \\ -S_m & T/2 < t < T \end{cases}$$

$$a.1) S_{pp} = 2 S_m$$

a.2) De acuerdo a la definición de la señal, el área neta es nula, y el valor medio cero.

Verificando:

$$S_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} S_m dt - \int_{T/2}^T S_m \cdot dt \right]$$

$$S_{me} = \frac{1}{T} \left[S_m \frac{T}{2} - S_m \cdot \left(T - \frac{T}{2} \right) \right] = 0$$

$$a.3) S_{|me|} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_m \cdot dt$$

$$a.4) S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cdot dt$$

$$S^2 = \frac{1}{T} \cdot S_m^2 \cdot T \therefore S = S_m$$

b) Señal diente de sierra

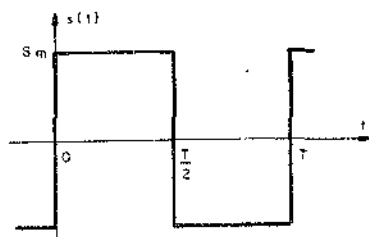


Fig. 2.22

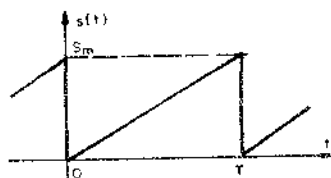


Fig. 2.23

De acuerdo con lo ilustrado en la Fig. 2.23 será,

$$s(t) \begin{cases} \frac{Sm}{T} t & 0 \leq t < T \end{cases}$$

b1) $S_{pp} = Sm$

b2) $S_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Sm}{T} \cdot t \cdot dt = \frac{1}{T^2} \cdot Sm \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^T$

$$S_{me} = \frac{Sm}{2}$$

b3) $S|me| = S_{me} = \frac{Sm}{2}$

b4) $S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Sm^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt = \frac{1}{T^3} \cdot Sm^2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^T$

$$S = \frac{Sm}{\sqrt{3}} = 0,577 Sm$$

c) Señal triangular

Según lo indicado en la Fig. 2.24 y dado que $Sm^+ = Sm^- = Sm$, será:

$$s(t) \begin{cases} \frac{4 Sm}{T} t & 0 \leq t \leq T/4 \end{cases}$$

debido a la simetría de la señal para el cálculo de los valores característicos sólo será necesario conocer su expresión en un cuarto de período.

c1) $S_{pp} = 2 Sm$

c2) $S_{me} = 0$ por la definición de la función: verifíquese.

$$c3) \quad S |me| = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \frac{4 Sm}{T} \cdot t \cdot dt = \frac{16}{T^2} \cdot Sm \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T/4}$$

$$S |me| = \frac{Sm}{2}$$

$$c4) \quad S^2 = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \frac{4^2 \cdot Sm^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt = \frac{64}{T^3} \cdot Sm^2 \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T/4}$$

$$S = \frac{Sm}{\sqrt{3}} \approx 0,577 Sm$$

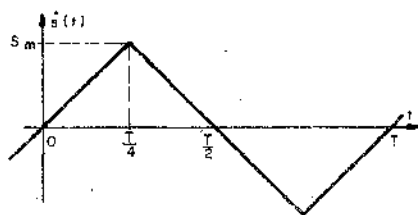


Fig. 2. 24

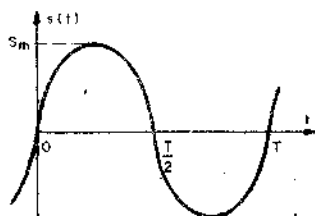


Fig. 2. 25

d) Señal senoidal

De acuerdo con lo mostrado por la Fig. 2.25, y puesto que $Sm^+ = Sm^- = Sm$, se tiene:

$$s(t) \begin{cases} Sm \cdot \sin \omega t & 0 \leq t \leq T \\ -Sm \cdot \sin \omega t & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$d1) \quad Spp = 2 Sm$$

$$d2) \quad Sme = 0 \text{ por la definición de la función; verifíquese.}$$

$$d3) \quad S |me| = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Sm \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{2}{\omega T} Sm \int_0^{\pi} \sin \omega t \cdot d\omega t$$

$$S |me| = \frac{Sm}{\pi} [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{Sm}{\pi} [1 + 1]$$

$$S|me| = \frac{2 \cdot S_m}{T} = 0,636 S_m$$

$$d4) \quad S^2 = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} S_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt = \frac{2}{T} S_m^2 \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t \cdot dt \text{ pero}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \alpha) \therefore$$

$$S^2 = \frac{S_m^2}{T} \int_0^{T/2} (1 - \cos 2 \omega t) dt$$

$$S^2 = \frac{S_m^2}{T} \left[\int_0^{T/2} dt - \int_0^{\pi} \cos 2 \omega t \cdot \frac{d \omega t}{\omega} \right]$$

$$S^2 = \frac{S_m^2}{T} \left[\frac{T}{2} - \frac{S_m^2}{\omega T} \cdot \sin 2 \omega t \right]_0^{\pi}$$

$$S^2 = \frac{S_m^2}{2} - 0 \quad \therefore \quad S = \frac{S_m}{\sqrt{2}} = 0,707 S_m$$

e) Pulso rectangular repetitivo

Según lo indicado en la Fig. 2.26 resulta:

$$s(t) = \begin{cases} S_m & 0 < t < T_a \\ 0 & T_a < t < T \end{cases}$$

e 1) $S_{pp} = S_m$

e 2)

$$S_{me} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_a} S_m \cdot dt + \int_{T_a}^T 0 \cdot dt \right] = \frac{T_a}{T} \cdot S_m$$

definiendo $\frac{T_a}{T} = \delta$ ciclo de actividad de la señal $\therefore$

$$S_{me} = \delta \cdot S_m$$

e 3) $S|me| = S_{me} = \delta \cdot S_m$

$$e) S^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_a} S_m^2 \cdot dt + \int_{T_a}^T 0 \cdot dt \right] = \frac{T_a}{T} \cdot S_m^2$$

$$S = \sqrt{\delta} \cdot S_m$$

f) Pulso triangular repetitivo

En concordancia con lo ilustrado en la Fig. 2.27 será:

$$s(t) \begin{cases} \frac{S_m}{T_a} \cdot t & 0 \leq t < T_a \\ 0 & T_a < t \leq T \end{cases}$$

$$f1) S_{pp} = S_m$$

$$f2) S_{me} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_a} \frac{S_m}{T_a} \cdot t \cdot dt + \int_{T_a}^T 0 \cdot dt \right] = \frac{S_m}{T \cdot T_a} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T_a}$$

$$S_{me} = \frac{\delta}{2} \cdot S_m$$

$$f3) S[me] = S_{me} = \frac{\delta}{2} \cdot S_m$$

$$f4) S^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_a} \frac{S_m^2}{T_a^2} \cdot t^2 \cdot dt + \int_{T_a}^T 0 \cdot dt \right] =$$

$$= \frac{S_m^2}{T \cdot T_a^2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T_a}$$

$$S = \sqrt{\frac{\delta}{3}} \cdot S_m$$



Fig. 2. 26

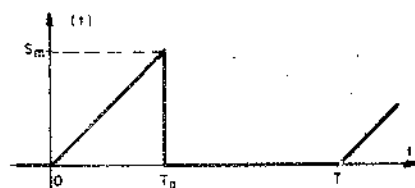


Fig. 2. 27 .

2.3.4) Factores característicos asociados a las señales periódicas. Definiciones y ejemplo de cálculo.

a) Definiciones e interpretaciones

Los factores característicos se definen, como luego se interpretará, por razones tecnológicas. Son los siguientes:

$$\text{factor de media de módulo} \quad f|me| = \frac{S_m}{S|me|} \quad (2.17)$$

$$\text{factor de cresta} \quad fc = \frac{S_m}{S} \quad (2.18)$$

$$\text{factor de forma} \quad f_f = \frac{f|me|}{fc} = \frac{S}{S|me|} \quad (2.19)$$

Con el objeto de poder interpretar el significado de estos factores, se calcularán para las señales rectangular, senoidal y triangular. Aplicando la definición y utilizando los valores característicos calculados en 2.3.3) es posible construir el cuadro indicado en la Fig. 2.28.

Nótese, que para la señal rectangular, por la particularidad de ser alterna y de módulo constante, sus factores valen la unidad y se la puede tomar como referencia. De la forma en que se definieron los factores, y de la observación del cuadro de la Fig. 2.28 surge que:

El *factor de media de módulo* caracteriza la capacidad relativa de transporte bruto de carga de una señal dada, referida a la rectangular. Cuanto más grande es el factor, menor es la capacidad de transporte de carga de la señal.

El *factor de cresta* mide la capacidad relativa de transporte de energía de una señal dada, referida a la rectangular. Cuanto más grande es el factor, menor es la capacidad de transporte de energía de la señal.

El *factor de forma* da una comparación global de las señales referidas a la rectangular. Cuanto más grande es su valor, más puntiaguda será la señal. Adviértase, además, que estos factores dan una imagen normalizada e independiente de la amplitud de las señales.

Factor Señal	$f me $	fc	f_f
	1	1	1
	1,57	1,41	1,11
	2	1,73	1,15

Fig. 2. 28

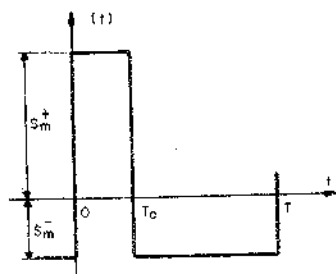


Fig. 2. 29

b) Ejemplo de cálculo de los valores y factores característicos para un pulso rectangular repetitivo de valor medio nulo

Por lo indicado en la Fig. 2.29 se tiene,

$$s(t) \begin{cases} S_m^+ & 0 < t < T_a \\ S_m^- & T_a < t < T \end{cases}$$

$$b1) \quad S_{pp} = S_m^+ + S_m^- \quad (2.20)$$

donde en S_m^- se ha considerado su módulo

$$b2) \quad S_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot dt = 0 \quad \text{por definición de la función.}$$

Previo al cálculo de los demás valores característicos, serán calculados los módulos de S_m^+ y S_m^- en función de δ y S_{pp} .

Como la señal tiene valor medio nulo, el área positiva es igual a la negativa,

$$S_m^+ \cdot T_a = S_m^- (T - T_a) \quad (2.21)$$

de la Ec. 2.20

$$S_m^+ = S_{pp} - S_m^- \quad (2.22)$$

reemplazando la Ec. 2.22 en la Ec. 2.21,

$$(S_{pp} - S_m^-) T_a = S_m^- (T - T_a)$$

despejando S_m^- resulta:

$$\begin{aligned} S_m^- &= \frac{T_a}{T} \cdot S_{pp} \\ S_m^- &= \delta \cdot S_{pp} \end{aligned} \quad (2.23)$$

y reemplazando la Ec. 2.23 en la Ec. 2.22,

$$\begin{aligned} S_m^+ &= S_{pp} - \delta S_{pp} \\ S_m^+ &= (1 - \delta) S_{pp} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$b3) \quad S |me| = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt \quad \text{que en virtud de la simetría de la señal se}$$

reduce a:

$$S |me| = \frac{1}{T} \int_0^{T_a} S_m^+ \cdot dt = 2 \cdot \frac{T_a}{T} \cdot S_m^+ = 2\delta \cdot S_m^+$$

y por la Ec. 2.24,

$$S |me| = 2 \cdot \delta \cdot (1 - \delta) \cdot Spp \quad (2.25)$$

$$b4) \quad S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{Ta} S^2 m^+ \cdot dt + \int_{Ta}^T S^2 m^- \cdot dt \right]$$

$$S^2 = \delta S^2 m^+ + (1 - \delta) S^2 m^-$$

y por las Ecs. 2.23 y 2.24

$$S^2 = \delta \cdot (1 - \delta)^2 Spp^2 + (1 - \delta) \delta^2 \cdot Spp^2$$

$$S^2 = \delta \cdot (1 - \delta) Spp^2 [(1 - \delta) + \delta] ;$$

$$S = \sqrt{\delta (1 - \delta)} \cdot Spp \quad (2.26)$$

$$b5) \quad f |me| = \frac{Sm^+}{S |me|} \text{ por las Ecs. 2.24 y 2.25}$$

$$f |me| = \frac{1}{2 \cdot \delta}$$

Se tendrá en cuenta para este ejemplo, el rango de variación del factor con el ciclo de actividad.

$$\delta \rightarrow 0 ; \quad f |me| \rightarrow \infty$$

$$\delta \rightarrow 1 ; \quad f |me| \rightarrow 0,5$$

$$\delta \rightarrow 0,5 ; \quad f |me| \rightarrow 1 \quad \therefore$$

$$0,5 \leq f |me| \leq \infty$$

Por lo cual cuanto menor sea el ciclo de actividad de la señal, mayor es el factor de media de módulo.

$$b6) \quad fc = \frac{Sm^+}{S} \text{ por las Ecs. 2.24 y 2.26}$$

$$fc = \sqrt{\frac{1 - \delta}{\delta}}$$

si

$$\delta \rightarrow 0 ; \quad fc \rightarrow \infty$$

$$\delta \rightarrow 1 ; \quad fc \rightarrow 0$$

$$\delta \rightarrow 0,5 ; \quad fc \rightarrow 1 \therefore$$

Entonces $0 \leq fc \leq \infty$ cuanto menor sea el ciclo de actividad de la señal, mayor es el factor de cresta.

$$b7) \quad ff = \frac{S}{S |me|} \quad \text{por las Ecs. 2.26 y 2.25}$$

$$ff = \frac{1}{2\sqrt{\delta(1-\delta)}}$$

si

$$\delta \rightarrow 0 ; \quad ff \rightarrow \infty$$

$$\delta \rightarrow 1 ; \quad ff \rightarrow \infty$$

por lo cual será hallado el valor de δ que hace máximo al denominador y en consecuencia mínimo al factor de forma,

$$\frac{d[\delta(1-\delta)]}{d\delta} = (1-\delta) + \delta(-1) = 0 \therefore$$

$$\delta = 1/2 ; \quad ff = 1 \therefore$$

$$1 \leq ff < \infty$$

2.3.5) Desarrollo de señales periódicas no senoidales en serie de Fourier

a) Introducción:

La serie de Fourier permite descomponer una señal periódica, que reúna ciertas condiciones no muy restrictivas, en función de senos y cosenos.

Esto es, se podría hallar la respuesta de un dado circuito a cada una de las componentes elementales de la excitación y luego obtener la respuesta total por aplicación del principio de superposición.

Es oportuno aclarar que el propósito de este párrafo es el de presentar la *Serie de Fourier*, y dar las reglas para su utilización, además de encontrar las formas de cálculo de valores característicos, pero no el de realizar un estudio detallado sobre la misma.

b) *Dominio de tiempo y de frecuencia:*
Hasta el presente, al estudiar una función del tipo:

$$s(t) = S_m \cdot \sin(\omega t + \theta) \quad (2.27)$$

y representarla gráficamente tomando como variable independiente al tiempo, se obtenía consecuentemente una gráfica en el *dominio temporal* como la indicada en la Fig. 2.30. La fase inicial está representada por $t\theta$, siendo, naturalmente, $\omega \cdot t\theta = \theta$.

La información suministrada por dicha gráfica está dada por el valor máximo, la fase inicial y el período, es decir por S_m , $t\theta$ y T respectivamente.

Pero representar así la Ec. 2.27 es sólo una de las posibilidades. Puede realizarse otra representación cambiando la variable independiente, y en lugar de t tomar a ω . En este caso se obtiene una representación gráfica en el *dominio de frecuencia angular*, tal como la ilustrada en la Fig. 2.31. Estos gráficos se denominan *espectros de frecuencia*, y en particular el a) *espectro de amplitud* y el b) *espectro de fase*. Para un dado valor de ω , la amplitud máxima de la señal en estudio puede obtenerse del gráfico a) leyendo en la escala correspondiente. De manera similar, la fase inicial se obtiene del gráfico b). De esta manera la información que suministran está dada por S_m , θ y $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Aunque se necesiten aquí dos gráficos para tener la misma información, esta manera de presentar los datos es más explícita para los fines de la ingeniería, pero en principio sería lo mismo trabajar con el gráfico de la Fig. 2.30 o de la 2.31.

En este caso simple, no puede vislumbrarse la utilidad de la nueva representación, y se observa que el pasaje del dominio temporal (Fig. 2.30) al de frecuencia angular (Fig. 2.31) puede realizarse por simple inspección.

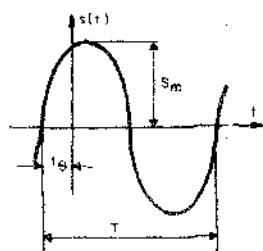


Fig. 2. 30



Fig. 2. 31

La principal conveniencia del empleo del dominio de frecuencia angular surge en el caso de presentarse una señal periódica complicada tal como la que se muestra en la Fig. 2.32.a). En este caso, naturalmente, los espectros de frecuencia tendrán varias componentes, tal como lo indica la Fig. 2.32.b).

La herramienta matemática que permite pasar del dominio del tiempo al dominio de frecuencia angular es la Serie de Fourier.

Se demuestra además, que cada par de coordenadas, $S_m(\omega)$ y $\theta(\omega)$ define una función senoidal. Nótese también, que en la representación del espectro de amplitud no se da el caso de que $S_m(\omega)$ presente un valor negativo. Esto significa una

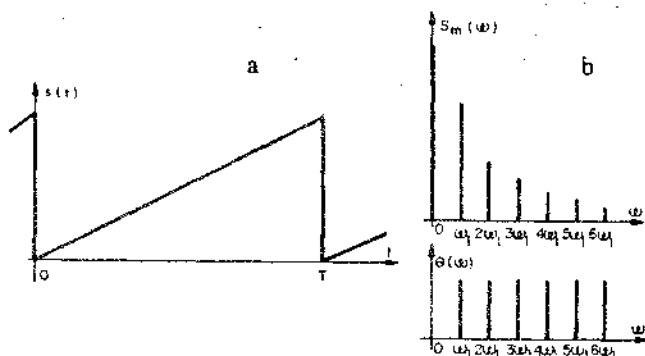


Fig. 2.32

posición de fase con respecto a la referencia, y dicha oposición de fase debe asignarse al ángulo de fase.

Fijese entonces, que si se quisiera realizar el análisis en el dominio temporal, sería laborioso y complicado; pero si se lo realiza en el dominio de frecuencia, mediante la Serie de Fourier, se logra una función equivalente a la dada en función de señales senoidales, hallando la amplitud y fase de cada componente de frecuencia dada. Puede entonces realizarse el análisis a cada una de las componentes, cosa que es simple, y luego aplicando el principio de superposición, puede hallarse el resultado buscado que corresponde a la señal periódica complicada, o lo que es lo mismo, al conjunto de señales componentes.

Obsérvese además, en la Fig. 2.32.b) que las componentes son de frecuencia múltiplo entero de ω_1 , llamada ésta fundamental o primera armónica; luego a ω_2 segunda armónica, etc. En consecuencia entre 0 y ω_1 ; ω_1 y $2\omega_1$, etc, no existe ningún seno o coseno con frecuencia comprendidos entre ambos, de tal manera que el espectro de frecuencias obtenido a partir de la Serie de Fourier es un espectro discreto.

Por otra parte, si la señal posee un período muy grande, los intervalos mencionados serán pequeños, y en el límite, si el período es infinito, o lo que es lo mismo que la señal es *aperiódica* se tendrá un espectro continuo, que se analiza por medio de la *Integral de Fourier*. En la presente teoría, la resolución de circuitos excitados por señales *aperiódicas* serán atacados con otra herramienta matemática que es la *Transformada de Laplace*.

c) *Condiciones que deben cumplir las funciones para ser desarrollables en Serie de Fourier:*

Para que una señal sea desarrollada por medio de la Serie de Fourier, deberá cumplir una serie de requisitos, conocidos como *condiciones de Dirichlet*, a saber:

- c1) La función debe ser periódica.
- c2) La función debe tener un número finito y numerable de discontinuidades de primer orden en el intervalo que corresponde al período.
- c3) La función debe tener un número finito y numerable de puntos **extremos** en el intervalo que corresponde al período.

d) *Serie de Fourier expresada en función de senos y cosenos*

d1) *Introducción:* El objetivo es fabricar una función analítica a partir de una serie de puntos, y que éstos representen a la señal lo mejor posible. Esto guarda relación con lo estudiado en los cursos clásicos de física respecto del método de los cuadrados mínimos.

Dado que se puede demostrar que todo desarrollo de una función realizada como sumatoria de funciones *ortonormales* satisface el criterio de los *errores cuadráticos mínimos*, resulta entonces que la Serie de Fourier es una aproximación óptima, puesto que es función de señales senoidales y éstas satisfacen el criterio de ortonormalidad.

En realidad senos y cosenos son funciones *ortogonales*, que luego de normalizadas, es decir divididas por π se convierten en ortonormales.

Se dice que dos funciones $f_i(t)$ y $f_j(t)$ son *ortogonales* en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ si se cumple que:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) \cdot f_j(t) dt \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases} \quad (2.28)$$

y que son *ortonormales* si se cumple que,

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) \cdot f_j(t) dt \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2.29)$$

La conveniencia de que la Serie de Fourier se desarrolle en función de senos y cosenos surge de las observaciones anteriores y se refuerzan por las dos definiciones precedentes.

Por otra parte, es oportuno citar el resultado de algunas integrales que se utilizarán en desarrollos inmediatos,

$$\int_0^{2\pi} \cos \eta \omega t \cdot d\omega t = 0 \quad (2.30)$$

$$\int_0^{2\pi} \sen \eta \omega t \cdot d\omega t = 0 \quad (2.31)$$

$$\int_0^{2\pi} \sen \eta \omega t \cdot \cos m \omega t \cdot d\omega t = 0 \quad (2.32)$$

$$\int_0^{2\pi} \sen \eta \omega t \cdot \sen m \omega t \cdot d\omega t \begin{cases} 0 & \eta \neq m \\ \pi & \eta = m \end{cases} \quad (2.33)$$

d2) *Expresión de la serie y forma de cálculo de los coeficientes:* pensando que la serie de Fourier permite aproximar una señal periódica como una suma de señales senoidales y cosenoidales de distinta amplitud y frecuencia, podría expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{\eta=1}^{\infty} [B_{m\eta} \cdot \sin \eta \omega t + C_{m\eta} \cdot \cos \eta \omega t] \quad (2.34)$$

donde:

η ; orden de la armónica
 $B_{m\eta}$; coeficiente del seno de orden " η "
 $C_{m\eta}$; coeficiente del coseno de orden " η "

Si se integran ambos miembros de la Ec. 2.34,

$$\int_0^{2\pi} f(\omega t) \, d\omega t = \int_0^{2\pi} A_0 \cdot d\omega t + \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} B_{m\eta} \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t + \int_0^{2\pi} C_{m\eta} \cdot \cos \eta \omega t \cdot d\omega t \right] \quad (2.35)$$

donde en el segundo miembro de la Ec. 2.35 es nulo el segundo término por la Ec. 2.31, y el tercer término por la Ec. 2.30, resultando,

$$\int_0^{2\pi} f(\omega t) \, d\omega t = A_0 \cdot 2\pi \quad \therefore$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot d\omega t \quad (2.36)$$

Comparando las Ecs. 2.34 y 2.36, se desprende que el término constante de la serie A_0 , es el valor medio de la señal $f(\omega t)$.

Multiplicando ahora la Ec. 2.34 por $\sin \eta \omega t$ e integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t &= \int_0^{2\pi} A_0 \sin \eta \omega t \cdot d\omega t + \\ &+ \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} B_{m\eta} \sin \eta \omega t \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t + \int_0^{2\pi} C_{m\eta} \cos \eta \omega t \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

El primer y tercer término del segundo miembro son nulos por las Ecs. 2.31 y

2.32 respectivamente. Por la Ec. 2.33 el segundo término vale π , a menos de la constante, por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t = B_{m\eta} \cdot \pi$$

en consecuencia, el coeficiente del seno de orden " η " puede calcularse como:

$$B_{m\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t \quad (2.38)$$

Si en forma análoga se multiplica la Ec. 2.34 por $\cos \eta \omega t$ e integrando, resulta que el coeficiente del coseno de orden " η " puede calcularse como,

$$C_{m\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos \eta \omega t \cdot d\omega t \quad (2.39)$$

Resumiendo se tendrá que la Ec. 2.34 es la expresión de la serie; y las Ecs. 2.36, 2.38 y 2.39 indican la forma de cálculo de los coeficientes. Nótese que si bien los límites de integración abarcan un período completo, no es necesario que sea de 0 a 2π ; sino que puede ser de $-\pi$ a π , u otro período completo que logre simplificar la integración.

e) Tipos de simetría

Hay casos en los que, observando la simetría de la señal a desarrollar puede simplificarse convenientemente el cálculo de los coeficientes. Los principales tipos de simetría son:

e1) *Par*: es cuando se cumple que $f(\omega t) = f(-\omega t)$ según se ilustra un ejemplo en la Fig. 2.33. Se demuestra que las señales con este tipo de simetría, contienen en su desarrollo sólo términos en coseno, además del término constante si la señal tiene un valor medio no nulo.

e2) *Impar*: es cuando se cumple que $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ como se muestra en el ejemplo de la Fig. 2.34. Se demuestra que las señales con este tipo de simetría sólo contienen en su desarrollo términos en seno.

e3) *Alternas*: en este caso se verifica que $f(\omega t) = -f(\omega t - \pi)$ según se ilustra en el ejemplo de la Fig. 2.35. Puede demostrarse que las señales con este tipo de simetría sólo contienen en su desarrollo armónicas impares.

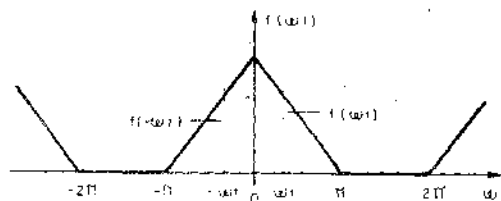


Fig. 2.33

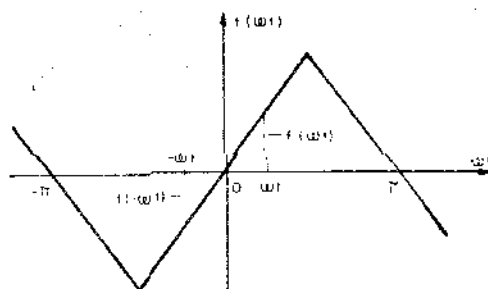


Fig. 2.34

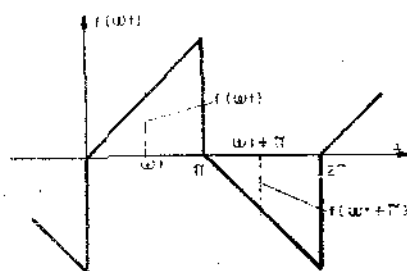


Fig. 2.35

f) Serie de Fourier expresada en función de senos únicamente

Dado que la diferencia entre senos y cosenos es un desfase de $\frac{\pi}{2}$ será posible

escribir la Serie de Fourier sólo en función de senos: con un ángulo de fase no nulo. Por lo tanto, la misma puede ser escrita de la siguiente manera:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin(n\omega t + \theta_n) \quad (2.40)$$

y ésta es, precisamente, la herramienta matemática que se necesita, pues da en forma explícita los espectros de amplitud y fase. Además, presenta la ventaja respecto de la forma dada por la Ec. 2.34, que provee un sólo término para cada valor de pulsación. O sea que si $f(\omega t)$ representa a una señal provista por generador poliarmonico, este desarrollo suministra un solo generador para cada frecuencia.

El desarrollo indicado por la Ec. 2.40 debe ser equivalente al de la Ec. 2.34. Dado que: $\sin(n\omega t + \theta_n) = \sin n\omega t \cdot \cos \theta_n + \sin \theta_n \cdot \cos n\omega t$ (2.41) puede reemplazarse en la Ec. 2.40 resultando,

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cdot \sin n\omega t \cdot \cos \theta_n + A_{mn} \cdot \sin \theta_n \cdot \cos n\omega t]$$

por comparación de las Ecs. 2.34 y 2.42 surge que:

$$B_{m\eta} = A_{m\eta} \cdot \cos \theta_{\eta} \quad (2.43)$$

$$C_{m\eta} = A_{m\eta} \cdot \sen \theta_{\eta} \quad (2.44)$$

elevando al cuadrado las dos últimas expresiones y sumándolas,

$$B_{m\eta}^2 + C_{m\eta}^2 = A_{m\eta}^2 (\cos^2 \theta_{\eta} + \sen^2 \theta_{\eta}) \quad \therefore$$

$$A_{m\eta} = \sqrt{B_{m\eta}^2 + C_{m\eta}^2} \quad (2.45)$$

Por otra parte, realizando el cociente entre las Ecs. 2.44 y 2.43

$$\frac{C_{m\eta}}{B_{m\eta}} = \frac{A_{m\eta} \cdot \sen \theta_{\eta}}{A_{m\eta} \cdot \cos \theta_{\eta}} = \tg \theta_{\eta} \quad \therefore$$

$$\theta_{\eta} = \arc \tg \frac{C_{m\eta}}{B_{m\eta}} \quad (2.46)$$

Con las expresiones dadas por la Ec. 2.40, se tienen todos los datos necesarios para operar con la serie de Fourier en función de senos únicamente, que es la forma más utilizada en la Teoría de Circuitos. Obsérvese además, en las Ecs. 2.45 y 2.46, que no puede eludirse el paso por la serie en función de senos y cosenos, dado que deben calcularse $C_{m\eta}$ y $B_{m\eta}$.

Se sintetizará ahora el *procedimiento a adoptar para el cálculo de los coeficientes*. En primer lugar se divide el período de integración en tantos intervalos de integración como sea necesario con el objeto de construir la expresión de la señal para cada uno de los intervalos en los que se la dividió. Luego se calculan los coeficientes A_0 , $B_{m\eta}$ y $C_{m\eta}$ teniendo en cuenta la simetría que presenta la señal. Finalmente, se realizan las transformaciones correspondientes para pasar de la forma de senos y cosenos a la forma de senos solamente.

g) *Valores medio y eficaz de una señal poliarmónica en función de los valores de los coeficientes de la Serie de Fourier.*

Según la Ec. 2.8 se definió como valor medio,

$$S_{me} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad \text{o lo que es lo mismo,}$$

$$S_{me} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\omega t) \cdot d\omega t \quad (2.47)$$

y por la Ec. 2.36:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot d\omega t \quad (2.36)$$

comparando las Ecs. 2.47 y 2.36 surge que el valor medio de la señal poliarmónica equivale al término constante de la Serie de Fourier,

$$S_{me} = A_0 \quad (2.48)$$

En lo que respecta al valor eficaz, se definió según la Ec. 2.16 como,

$$S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\omega t) d\omega t \quad (2.49)$$

pero por la Ec. 2.40

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta}) \quad (2.40)$$

reemplazando la Ec. 2.40 en la 2.49 y operando:

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cdot \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta})]$$

$$[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cdot \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta})] d\omega t$$

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_0^2 \cdot d\omega t + \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{2\pi} A_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cdot \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta}) d\omega t$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \cdot \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_n} \sin(\eta \omega t + \theta_{\eta}) d\omega t$$

En el segundo miembro, las integrales del segundo término son nulas según la Ec. 2.31. Las del tercer término, a menos de las constantes, resultan según la Ec. 2.33, iguales a π para orden de armónicas coincidentes, y nulas en caso contrario, resultando entonces,

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} [A^2_0 \cdot 2\pi + A^2_{m1} \cdot \pi + A^2_{m2} \cdot \pi + \dots + A^2_{mn} \cdot \pi] \therefore$$

$$S^2 = A^2_0 + \frac{A^2_{m1}}{2} + \frac{A^2_{m2}}{2} + \dots + \frac{A^2_{mn}}{2} \quad (2.50)$$

excepto el término constante, los A_{mn} son los valores máximos de los componentes senoidales, que divididos por $\sqrt{2}$ resultan valores eficaces, es decir

$$S = \frac{S_m}{\sqrt{2}} = \frac{A_{mn}}{\sqrt{2}} = A_n$$

por lo que la Ec. 2.50 resulta:

$$S = \sqrt{A^2_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A^2_n} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} A^2_n} \quad (2.51)$$

donde A_n es el valor eficaz de la componente de orden " n ".

Resumiendo, la Ec. 2.51 indica que el *valor eficaz de una señal poliarmónica* es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de las componentes de distinta frecuencia.

Nótese que existe un solo término para cada frecuencia. En todo desarrollo que presente varios términos de igual frecuencia, estos deberán sumarse previamente antes de calcular el valor característico.

e) Ejemplo de aplicación

Este ejemplo elemental tiene por misión ilustrar sobre el cálculo de valores característicos por intermedio de la serie de Fourier y sus derivaciones, el tema se profundiza más adelante y se aplicará al análisis de circuitos en el Cap. 9: Régimen permanente de circuitos excitados por señales poliarmónicas.

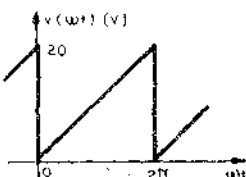


Fig. 2.36

Volviendo a la presente aplicación, sea por ejemplo encontrar el desarrollo en Serie de Fourier para la tensión indicada en la Fig. 2.36. Supóngase que la pulsación de la señal es $\omega = 100$, y que para el desarrollo pueden despreciarse las armónicas superiores a tres. Calcular además los valores medio y eficaz de la tensión poliarmónica.

Solución:

La expresión de la tensión resulta,

$$v(\omega t) = \frac{20}{2\pi} \cdot \omega t = \frac{10}{\pi} \omega t \quad \text{para} \quad 0 \leq \omega t < 2\pi$$

Empleando la Ec. 2.36,

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{10}{\pi} \cdot \omega t \cdot d\omega t = \frac{10}{2\pi^2} \left[\frac{(\omega t)^2}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$V_0 = 10 \text{ V}$$

Empleando la Ec. 2.38,

$$B_{m\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{10}{\pi} \cdot \omega t \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t = \frac{10}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega t \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t$$

$$\text{pero} \quad \int x \cdot \sin \eta x \, dx = \frac{\sin \eta x}{\eta^2} - \frac{x \cdot \cos \eta x}{\eta}$$

por lo cual

$$B_{m\eta} = \frac{10}{\pi^2} \left[\frac{\sin \eta \omega t}{\eta^2} - \frac{\omega t \cdot \cos \eta \omega t}{\eta} \right]_0^{2\pi}$$

$$B_{m\eta} = \frac{10}{\pi^2} \left[0 - \frac{2\pi}{\eta} \right] = - \frac{20}{\eta \pi}$$

$$B_{m1} = - \frac{20}{\pi} = -6,36$$

$$B_{m2} = - \frac{20}{2\pi} = -3,18$$

$$B_{m3} = - \frac{20}{3\pi} = -2,12$$

Utilizando la Ec. 2.39,

$$C_{m\eta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{10}{\pi} \cdot \omega t \cdot \cos \eta \omega t \cdot d\omega t = \frac{10}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega t \cdot \cos \eta \omega t \cdot d\omega t$$

$$\text{pero} \quad \int x \cdot \cos \eta x \, dx = \frac{\cos \eta x}{\eta^2} + \frac{x \cdot \sin \eta x}{\eta} \quad \text{por lo cual}$$

$$C_{m\eta} = \frac{10}{\pi^2} \left[\frac{\cos \eta \omega t}{\eta^2} + \frac{\omega t \cdot \sin \eta \omega t}{\eta} \right]_0^{2\pi}$$

$$C_{m\eta} = \frac{10}{\pi^2} [0 + 0] = 0$$

Empleando la Ec. 2.45,

$$V_{m\eta} = \sqrt{B_{m\eta}^2 + C_{m\eta}^2} = |B_{m\eta}| \quad \text{pues los } C_{m\eta} = 0$$

Utilizando la Ec. 2.46,

$$\theta_{\eta} = \arctg \frac{C_{m\eta}}{B_{m\eta}} \quad \text{dado que } C_{m\eta} = 0 \text{ y los } B_{m\eta} \text{ son negativos resulta que:}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pm \pi$$

Aplicando ahora la Ec. 2.40 y recordando que $\omega = 100$, surge que el desarrollo en Serie de Fourier para la tensión dada es:

$$v(t) = 10 + 6,36 \sin(100t + \pi) + 3,18 \sin(200t + \pi) + 2,12 \sin(300t + \pi) \text{ (V)}$$

Nótese que las amplitudes de las armónicas superiores a tres serán de poca importancia, y que su signo negativo ha sido trasferido al ángulo de fase.

Por la Ec. 2.48, el valor medio resulta,

$$V_{me} = 10 \text{ V}$$

y el valor eficaz se calcula aplicando la Ec. 2.51,

$$V = \sqrt{10^2 + \frac{6,36^2}{2} + \frac{3,18^2}{2} + \frac{2,12^2}{2}}$$

$$V = 11,293 \text{ V}$$

El cálculo exacto del valor eficaz de la señal considerada es (ver 2.3.3.b)

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,547 \text{ V}$$

En consecuencia, al despreciar las armónicas de orden superior al tercero se comete un error:

$$\epsilon \% = \frac{11,547 - 11,293}{11,547} \cdot 100 = 2,2 \%$$

Para que el error sea inferior al 1% es necesario tomar en cuenta hasta la octava armónica, ya que la convergencia es lenta a partir de las tres primeras componentes, como puede apreciarse en el espectro de frecuencia de amplitud de la Fig. 2.32.b.

2.4. Señales aperiódicas

2.4.1.) Señales fundamentales

a) Escalón unitario:

Será denominado con $u(t)$ y su aspecto se muestra en la Fig. 2.37.

Se define como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Obsérvese que presenta una discontinuidad de primer orden en el origen, por lo cual no está definido el valor de la señal en ese punto.

b) *Rampa unitaria:*

Se simboliza por $p(t)$ y se ilustra en la Fig. 2.38.

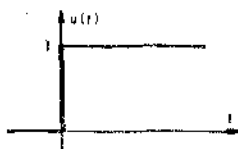


Fig. 2. 37

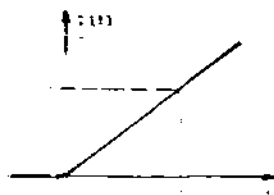


Fig. 2. 38

Se define como,

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

Es evidente que para tiempos positivos resulta una recta de pendiente unitaria.

c) *Impulso unitario:*

Será denominado con $\delta(t)$ y su aspecto se indica en la Fig. 2.39. Se define de tal manera que su ancho es infinitamente pequeño, su alto infinitamente grande y su área unitaria, es decir,

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Fig. 2. 39

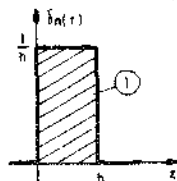


Fig. 2. 40

Si se desea comprender mejor el significado de esta señal, se puede utilizar la función auxiliar $\delta h(t)$ mostrada en la Fig. 2.40 definida como,

$$\delta h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{h} & 0 < t < h \\ 0 & t > h \end{cases}$$

Nótese que posee área unitaria, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta h(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^h \frac{1}{h} \cdot dt + \int_h^{\infty} 0 \cdot dt = \frac{1}{h} \cdot h = 1$$

por lo cual podría interpretarse,

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta h(t) \quad (2.52)$$

Las dificultades que se presentan para interpretar esta señal, llamada *función impulso o delta de Dirac*, derivan del hecho de no ser en realidad una función. Podría llamarse *distribución delta de Dirac*.

2.4.2) Relaciones entre las señales fundamentales:

Las relaciones entre las señales aperiódicas fundamentales surgen en forma conceptual, aplicando las ideas de integración y derivación gráficas, y el pasaje de una a otra puede lograrse según se indica en el gráfico de la Fig. 2.41.

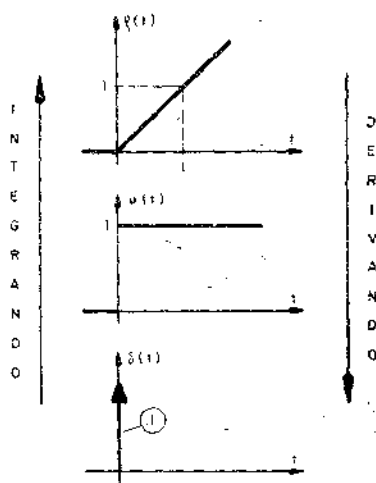


Fig. 2.41

Expresado en forma matemática, dicha figura indica que,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt \quad (2.53)$$

$$u(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} \quad (2.55)$$

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^t u(t) \cdot dt \quad (2.54)$$

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \quad (2.56)$$

Considerando la Ec. 2.53, ella puede ser demostrada utilizando la función auxiliar $\delta h(t)$ definida en 2.4.1.c) y mostrada en la Fig. 2.40. En efecto: para $t < 0$ es:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^t 0 dt \right] = 0 \quad \text{y para } t > 0:$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^h \frac{1}{h} dt + \int_h^t 0 dt \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot h \right] = 1$$

y puesto que la función que es nula para $t < 0$ y unitaria para $t > 0$ es el escalón unitario, es posible escribir,

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t) \quad \text{Análogamente, para la Ec. 2.54}$$

resulta: para $t < 0$ $\int_{-\infty}^t u(t) dt = \int_{-\infty}^t 0 dt = 0$ y para $t > 0$

$$\int_{-\infty}^t u(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^t 1 dt = t$$

La función que es nula para $t < 0$ y una recta de pendiente unitaria que pasa por el origen para $t > 0$, es la rampa unitaria, por lo que puede escribirse:

$$\int_{-\infty}^t u(t) dt = \rho(t)$$

Como es evidente, la Ec. 2.55 es la inversa de la Ec. 2.54. Análogamente, la Ec. 2.56 es la inversa de la Ec. 2.53. Sin embargo, es importante resaltar que las derivadas de $\rho(t)$ y $u(t)$ no están definidas en $t = 0$, pues dichas funciones presentan en el origen de coordenadas, discontinuidades de 1er. y 2do. orden, respectivamente. No obstante, dada la gran utilidad que presentan las ecuaciones de referencia, serán frecuentemente utilizadas con la reserva de su falta de validez formal para el tiempo en que la derivada presenta una discontinuidad.

2.4.3) Señales elementales derivadas de las fundamentales y parámetros que las caracterizan cuantitativamente

a) *Escalón de amplitud A*: Se muestra en la Fig. 2.42, y resulta,

$$s(t) = A \cdot u(t)$$

b) *Rampa de pendiente A*: Es la indicada de la Fig. 2.43, resultando,

$$s(t) = A \cdot p(t)$$

c) *Impulso de fuerza A o área A*: Está ilustrado por la Fig. 2.44, definiéndose como,

$$s(t) = A \cdot \delta(t)$$

d) *Escalón de crecimiento gradual y amplitud A*: Se muestra en la Fig. 2.45 y resulta,

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{A}{T_a} \cdot t & 0 \leq t \leq T_a \\ A & t \geq T_a \end{cases}$$

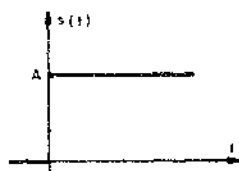


Fig. 2. 42

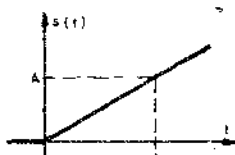


Fig. 2. 43

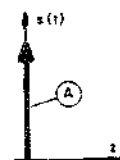


Fig. 2. 44

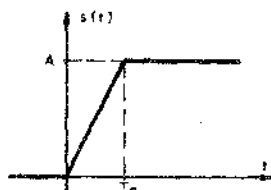


Fig. 2. 45

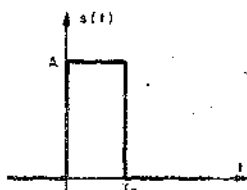


Fig. 2. 46

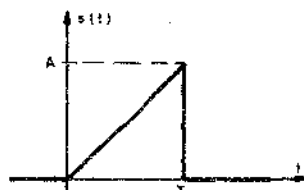


Fig. 2. 47

e) Pulso rectangular:

Es el indicado en la Fig. 2.46, resultando,

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 < t < T_a \\ 0 & t > T_a \end{cases}$$

f) Pulso triangular: Está ilustrado en la Fig. 2.47, definiéndose como,

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{A}{T_a} \cdot t & 0 \leq t < T_a \\ 0 & t > T_a \end{cases}$$

g) Pulso doble rampa: Se muestra en la Fig. 2.48 y resulta,

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{2A}{T_a} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T_a}{2} \\ 2A - \frac{2A}{T_a} \cdot t & \frac{T_a}{2} \leq t \leq T_a \\ 0 & t \geq T_a \end{cases}$$

h) Señal senoidal semiperiódica: Este tipo de señal, combinación de periódica y aperiódica se indica en la Fig. 2.49, definiéndose como,

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A \cdot \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$$

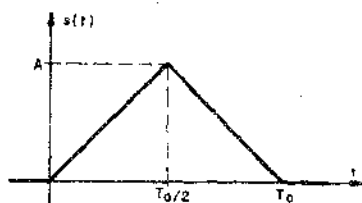


Fig. 2.48

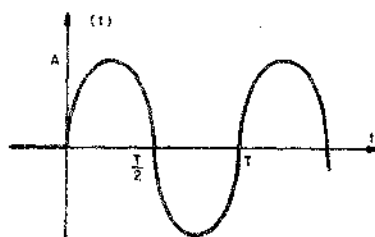


Fig. 2.49

2.4.4) Construcción de señales aperiódicas cualesquiera a partir de las señales elementales:

Seguidamente se estudiará el efecto de multiplicar una señal cualquiera por $u(t)$, y como pueden desplazarse temporalmente las señales elementales.

a) Efecto de $u(t)$: Serán considerados tres ejemplos. En el primero de ellos, tal como se indica en la Fig. 2.50 se dispone de una señal $s_1(t)$ que multiplicada por $u(t)$, resulta una señal como la indicada, que responde a,

$$s(t) = s_1(t) \cdot u(t) = A \cdot u(t)$$

Por otra parte, como se indica en la Fig. 2.51, disponiéndose de la señal $S_2(t)$ y multiplicándola por $u(t)$, se obtiene la señal indicada, que responde a,

$$S(t) = S_2(t) \cdot u(t) = A \cdot t \cdot u(t) = A \cdot \rho(t)$$

Finalmente, como muestra la Fig. 2.52, contando con una señal $s_3(t)$, multiplicada por $u(t)$, resulta la señal mostrada que responde a:

$$s(t) = s_3(t) \cdot u(t) = A \cdot \sin \omega t \cdot u(t)$$

De todos los ejemplos se desprende que al multiplicar una señal por $u(t)$, se anula dicha señal para tiempos negativos, no afectándola para tiempos positivos.



Fig. 2.50

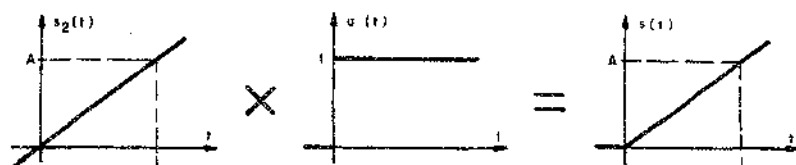


Fig. 2.51

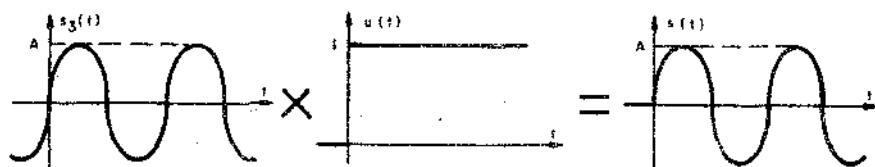


Fig. 2.52

b) *Desplazamiento de las señales elementales*: Tomando las señales elementales y afectando convenientemente la variable tiempo, resultará un desplazamiento de la señal en forma horizontal.

En primer término, desplazando el escalón mostrado en la Fig. 2.42, se obtendrá el ilustrado por la Fig. 2.53, que está atrasado en T_1 respecto al anterior, y definido como:

$$A u(t - T_1) = \begin{cases} 0 & t < T_1 \\ A & t > T_1 \end{cases}$$

En segundo término, desplazando la rampa indicada en la Fig. 2.43, se obtendrá la que muestra la Fig. 2.54, definida como:

$$\begin{aligned} A \cdot \rho(t - T_1) &= \begin{cases} 0 & t < T_1 \\ A \cdot t & t \geq T_1 \end{cases} \\ &= A \cdot (t - T_1) u(t - T_1) \end{aligned}$$

Finalmente, desplazando el impulso mostrado en la Fig. 2.44, se obtendrá el que ilustra la Fig. 2.55, definido por:

$$A \cdot \delta(t - T_1) = \begin{cases} 0 & t \neq T_1 \\ \neq 0 & t = T_1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - T_1) dt = A \end{cases}$$

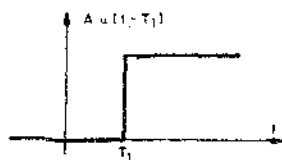


Fig. 2. 53

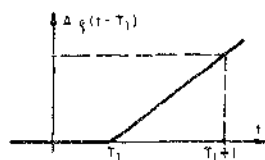


Fig. 2. 54

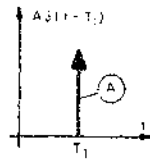


Fig. 2. 55

2.4.5) Superposición de señales elementales desplazadas

Los problemas que se presentan son:

a) dado el gráfico hallar la expresión de la señal y b) dada la señal representarla gráficamente.

Se comenzará con el primero de los problemas, es decir hallar la expresión de la señal para los siguientes gráficos.

a1) Pulso rectangular de amplitud A

Dado el gráfico mostrado en la Fig. 2.56, se observa que este puede construirse, tal como se indica en la Fig. 2.57, como la suma de las señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$, es decir,

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s(t) = A \cdot u(t) - A \cdot u(t - T_1)$$

En este ejemplo y en los sucesivos de este párrafo, será representada cada una de las componentes con el objeto de lograr una mayor comprensión del problema; una vez adquirida la práctica, la expresión buscada se halla por simple inspección.

a2) Pulso triangular

Es el indicado en la Fig. 2.58, notando que éste puede ser construido, tal como se indica en la Fig. 2.59, sumando las señales indicadas, es decir,

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

$$s(t) = \frac{2A}{T_1} \cdot t \cdot u(t) - \frac{2A}{T_1} \left(t - \frac{T_1}{2}\right) u\left(t - \frac{T_1}{2}\right) -$$

$$- \frac{2A}{T_1} \left(t - \frac{T_1}{2}\right) u\left(t - \frac{T_1}{2}\right) + \frac{2A}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1)$$

$$s(t) = \frac{2A}{T_1} \rho(t) - \frac{4A}{T_1} \rho\left(t - \frac{T_1}{2}\right) + \frac{2A}{T_1} \rho(t - T_1)$$

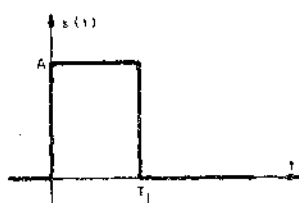


Fig. 2. 56

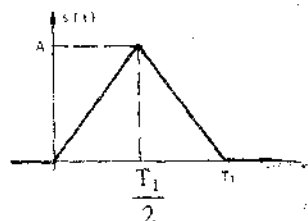


Fig. 2. 58

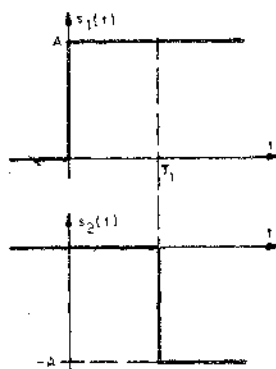


Fig. 2. 57

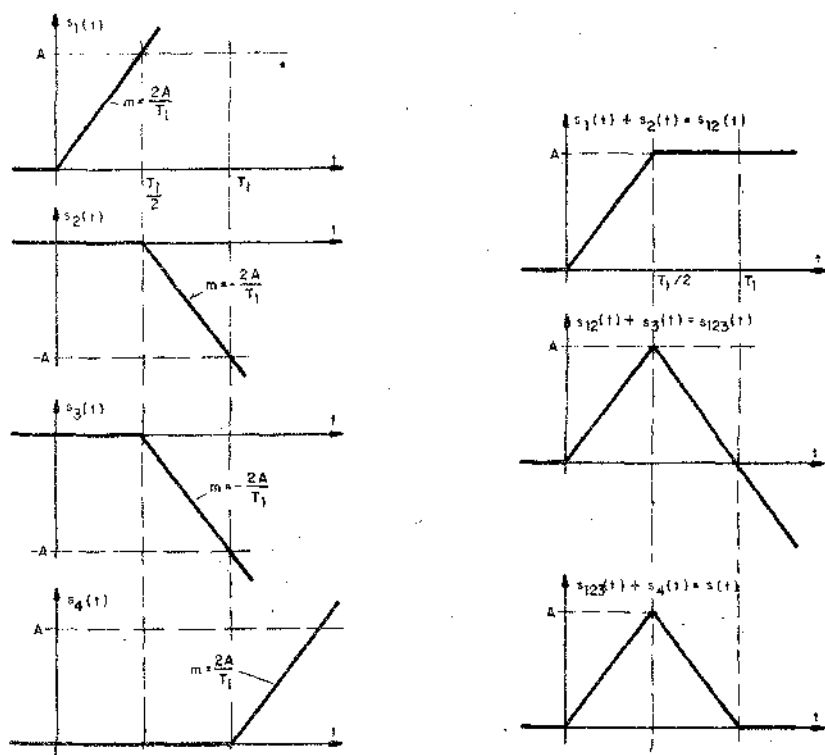


Fig. 2. 59

a3) Señal escalera

Mostrada en la Fig. 2.60, se observa que puede ser construida, como se indica en la Fig. 2.61, sumando las señales elementales graficadas, a saber:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

$$s(t) = A u(t) + A u(t - T_1) + A u(t - 2T_1) - 3 A u(t - 3T_1)$$

a4) Tren de impulsos

Resulta el indicado en la Fig. 2.62, notándose que éste puede ser construido, tal como se indica en la Fig. 2.63, sumando las señales elementales indicadas, de tal manera que:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t) + s_5(t)$$

$$s(t) = 2\delta(t) + 4\delta(t - 2) + 3\delta(t - 4) - \delta(t - 6) - 2\delta(t - 8)$$

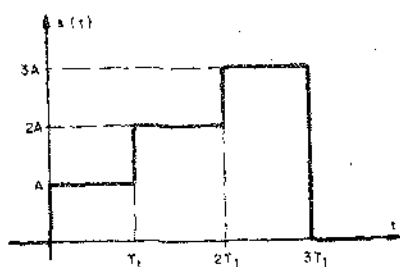


Fig. 2. 60

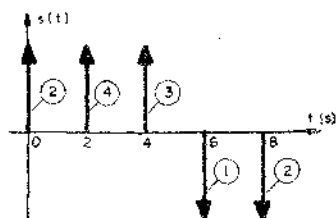


Fig. 2. 62

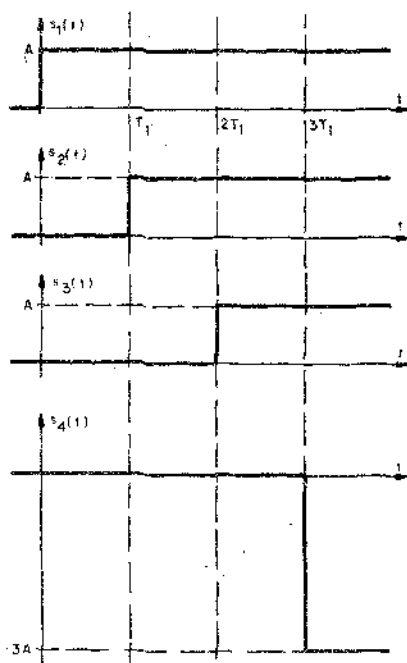


Fig. 2. 61

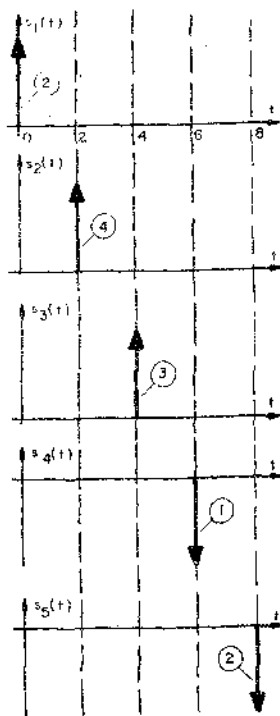


Fig. 2. 63

a5) Señal arbitraria

Ver la señal ilustrada en la Fig. 2.64. Por simple inspección resulta:

$$\begin{aligned}
 s(t) = & 10 t u(t) - 10(t-1)u(t-1) + 10 u(t-1) - 20(t-2)u(t-2) \\
 & + 20(t-3)u(t-3) - 10 u(t-3) + 40 u(t-4) - 30(t-4)u(t-4) + \\
 & + 30(t-5)u(t-5) + 10 u(t-5) + 20(t-6)u(t-6) - \\
 & - 20(t-6,5)u(t-6,5) - 20(t-6,5)u(t-6,5) \\
 & + 20(t-7)u(t-7) - 10 u(t-7) + 2 \delta(t-7) \\
 s(t) = & 10 \rho(t) - 10 \rho(t-1) + 10 u(t-1) - 20 \rho(t-2) + 20 \rho(t-3) - \\
 & - 10 u(t-3) + 40 u(t-4) - 30 \rho(t-4) + 30 \rho(t-5) + 10 u(t-5) + \\
 & + 20 \rho(t-6) - 40 \rho(t-6,5) + 20 \rho(t-7) - 10 u(t-7) + 2 \delta(t-7)
 \end{aligned}$$

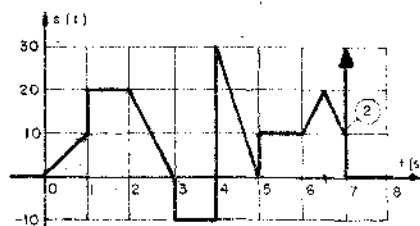


Fig. 2.64

Nótese que el método utilizado en estos ejemplos permite resolver circuitos con excitaciones compuestas, hallándose primero las respuestas a cada una de las señales componentes por separado lo cual es sencillo, y luego aplicando el principio de superposición.

Obsérvese que debido a esto último conviene utilizar suma de funciones elementales pero no productos.

Continuando ahora con el segundo de los problemas mencionados al principio de este párrafo, es decir, dada la expresión de la señal, representarla gráficamente. Se estudiarán los siguientes ejemplos, realizándolos por simple inspección, en base a la experiencia obtenida en los problemas inversos.

b1)

$$s(t) = \frac{A}{2} \cdot \rho(t) - A u(t-2) - \frac{A}{2} \rho(t-4) - A u(t-4)$$

y su representación gráfica se encuentra en la Fig. 2.65,

b2)

$$s(t) = 10 \rho(t) - 10 \rho(t-2) - 10 \rho(t-4) + 10 \rho(t-6)$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig. 2.66.

$$s(t) = 10u(t) + 10u(t-2) + 10u(t-4) + 5\rho(t-4) - 5\rho(t-6) - 5\rho(t-6) + 5\rho(t-10) - 20u(t-12) - 3\delta(t-14)$$

y su representación gráfica se indica en la Fig. 2.67.

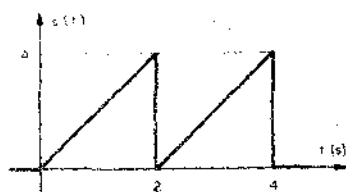


Fig. 2. 65

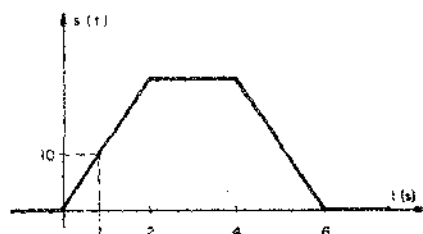


Fig. 2. 66

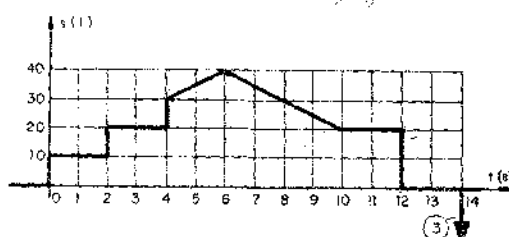


Fig. 2. 67

2.4.6) Construcción de señales semiperiódicas por superposición de señales aperiódicas desplazadas

Mediante sumatorias de señales aperiódicas desplazadas puede conseguirse que se repita indefinidamente un dado juego de valores. Se suministrarán dos ejemplos para ilustrar el tema.

a) Dada la señal mostrada en la Fig. 2.68 encontrar su expresión como suma de señales aperiódicas desplazadas.

Se observa que la señal puede construirse restando a una rampa escalones de amplitud A , desplazados sucesivamente en un número entero de periodos, es decir:

$$s(t) = \frac{A}{T} \cdot \rho(t) - \sum_{n=1}^{\infty} A u(t - nT)$$

b) Para la siguiente señal se desea hallar su representación gráfica.

$$s(t) = A_m \sum_{\eta=1}^{\infty} \sin(\omega t - \eta\pi) \cdot u(\omega t - \eta\pi)$$

Es evidente que la señal dada puede desarrollarse como:

$$s(t) = A_m \cdot \sin \omega t \cdot u(\omega t) + A_m \cdot \sin(\omega t - \pi) u(\omega t - \pi) \\ + A_m \cdot \sin(\omega t - 2\pi) u(\omega t - 2\pi) + \dots$$

cuya representación gráfica se ilustra en la Fig. 2.69.

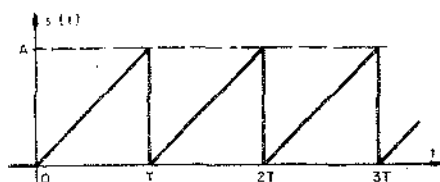


Fig. 2.68

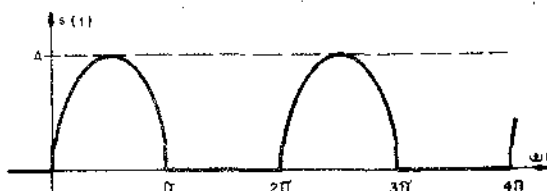


Fig. 2.69

2.5) Problemas resueltos

2.5.1 Para la señal periódica de corriente mostrada en la Fig. 2.70 calcular los valores medio, medio de módulo y eficaz. Determinar además los factores de media, cresta y de forma.

Solución:

$$i(t) \begin{cases} 2 & 0 < t \leq T/2 \\ 4 - \frac{4}{T} \cdot t & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Por la Ec. 2.8 el *valor medio* resulta,

$$I_{me} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 2 \cdot dt + \int_{T/2}^T \left(4 - \frac{4}{T} \cdot t\right) dt \right]$$

$$I_{me} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 2 \cdot dt + \int_{T/2}^T 4 \cdot dt - \int_{T/2}^T \frac{4}{T} \cdot t \cdot dt \right]$$

$$I_{me} = \frac{1}{T} \left[\left[2 \cdot t \right]_0^{T/2} + 4 \cdot t \right]_{T/2}^T - \frac{4}{T} \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/2}^T \right]$$

$$I_{me} = \frac{1}{T} \left[\frac{3}{2} T \right] = 1,5 \text{ A}$$

Por la Ec. 2.9 y teniendo en cuenta que la señal no posee valores negativos, el valor *medio de módulo* resulta:

$$I_{|me|} = I_{me} = 1,5 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta la Ec. 2.16, el *valor eficaz* será,

$$I^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 2^2 \cdot dt + \int_{T/2}^T \left(4 - \frac{4}{T} \cdot t\right)^2 \cdot dt \right]$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 2^2 \cdot dt + \int_{T/2}^T \left(16 - \frac{32}{T} \cdot t + \frac{16}{T^2} \cdot t^2\right) dt \right]$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \left[\left[4 \cdot t \right]_0^{T/2} + 16 \cdot t \right]_{T/2}^T - \frac{32}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/2}^T + \frac{16}{T^2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{T/2}^T \right]$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \left[\frac{8}{3} \cdot T \right]$$

$$I = 1,63 \text{ A}$$

Por la Ec. 2.17 el factor de *media de módulo* resulta,

$$I_{|me|} = \frac{2}{1,5} = 1,33$$

Debido a la Ec. 2.18 el *factor de cresta* será:

$$f_c = \frac{2}{1,63} = 1,23$$

y el *factor de forma* por la Ec. 2.19,

$$ff = \frac{1,63}{1,5} = 1,09$$

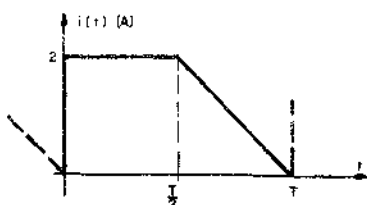


Fig. 2. 70

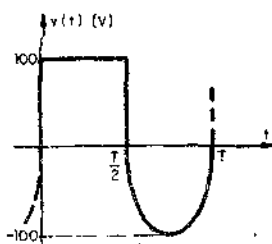


Fig. 2. 71

2.5.2) Calcular los valores medio, medio de módulo y eficaz para la tensión periódica indicada en la Fig. 2.71.

Solución

$$v(t) = \begin{cases} 100 & 0 < t < T/2 \\ 100 \sin t & T/2 < t < T \end{cases}$$

Seguindo las indicaciones del problema anterior surge que:

Valor medio

$$V_{me} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 100 dt + \int_{T/2}^T 100 \sin t \cdot dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 100 dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 100 \sin \omega t \cdot d\omega t$$

$$V_{me} = \frac{1}{T} \cdot 100 \cdot t \Big|_0^{T/2} + \frac{100}{2\pi} [-\cos \omega t]_{\pi}^{2\pi}$$

$$V_{me} = \frac{100}{2} - \frac{100}{\pi} = 18,2 \text{ V}$$

Valor medio de módulo

$$V_{|me|} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 100 \, dt + \int_{T/2}^T (-100 \sin t) \, dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 100 \, dt - \frac{1}{2\pi}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} 100 \sin \omega t \cdot d\omega t$$

$$V_{|me|} = \frac{1}{T} \cdot 100 \cdot t \Big|_0^{T/2} - \frac{100}{2\pi} [-\cos \omega t]_{\pi}^{2\pi}$$

$$V_{|me|} = \frac{100}{2} + \frac{100}{\pi} = 81,8 \, \text{V}$$

Valor eficaz.

$$I^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} 100^2 \cdot dt + \int_{T/2}^T 100^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt \right]$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 100^2 \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 100^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d\omega t$$

pero $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \therefore$

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 100^2 \, dt + \frac{100^2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \, d\omega t$$

$$I^2 = \frac{100^2}{T} \cdot t \Big|_0^{T/2} + \frac{100^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$I^2 = \frac{10^4}{2} + \frac{10^4}{4} \therefore$$

$$I = 86,6 \text{ V}$$

2.5.3) Determinar los valores medio y eficaz de la siguiente corriente poliarmónica.

$$i(t) = 10 + 10 \sin 2000 t + 10 \sin (2000 t - \pi/2) + \sin (3000 t + \frac{\pi}{4}) \text{ [A]}$$

Solución:

Previo al cálculo de los valores característicos deben sumarse los componentes de igual frecuencia,

$$10 \sin 2.000 t + 10 \sin (2.000 t - \pi/2)$$

$$\text{se aplica } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

por lo cual,

$$10 [2 \cdot \sin (\frac{4000 t - \pi/2}{2}) \cdot \cos \frac{\pi/2}{2}] = 14,1 \sin (2000 t - \pi/4)$$

con lo que la poliarmónica queda:

$$i(t) = 10 + 14,1 \cdot \sin (2000 t - \frac{\pi}{4}) + \sin (3000 t + \frac{\pi}{4}) \text{ [A]}$$

Por la Ec. 2.48 el *valor medio* es:

$$I_{me} = 10 \text{ A}$$

Empleando la Ec. 2.51 el *valor eficaz* resulta,

$$I^2 = 10^2 + (\frac{14,1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 200,5 \therefore$$

$$I = 14,16 \text{ A}$$

2.5.4) Representar gráficamente la siguiente señal aperiódica

$$i(t) = 200 \sin \omega t \cdot u(\omega t) + 200 \cdot \sin (\omega t - \pi) u(\omega t - \pi) \text{ [A]}$$

Solución

Si bien puede realizarse la representación directamente, en este ejemplo son graficadas cada una de las componentes y luego su suma, tal como se ilustra en la Fig. 2.72.

En la Fig. 2.72.a) se ha representado la componente $i'(t) = 200 \sin(\omega t - \pi) u(\omega t - \pi)$.

En la Fig. 2.72.b) la componente $i''(t) = 200 \sin(\omega t - \pi) u(\omega t - \pi)$.

En la Fig. 2.72.c) su suma $i(t) = i'(t) + i''(t)$ que es la representación buscada.

2.5.5.) Hallar la expresión de la señal aperiódica mostrada en la Fig. 2.73.

Solución

Tal como se estudió en el parágrafo 2.4.5) por superposición de señales elementales desplazadas es posible reconstruir la señal dada, y su expresión resulta:

$$v(t) = 30 \rho(t) - 30 \rho(t-2) - 20 \rho(t-6) + 40 \rho(t-7) - 20 \rho(t-8) - 30 \rho(t-12) + 30 \rho(t-14) [\text{V}]$$

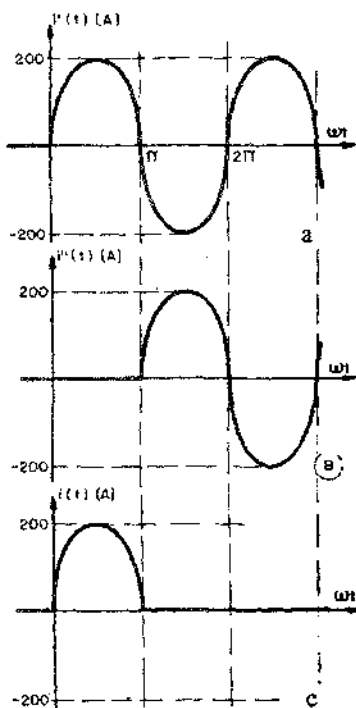


Fig. 2. 72

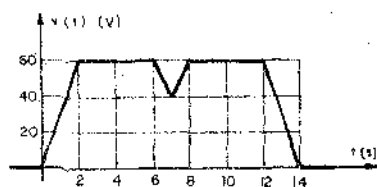


Fig. 2.73

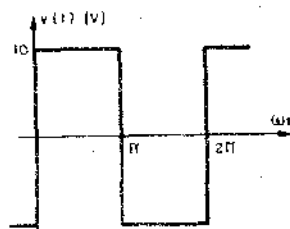


Fig. 2.74

2.5.6) Para la forma de señal de tensión cuadrada mostrada en la Fig. 2.74 se pide:

- Encontrar el desarrollo en Serie de Fourier.
- Representar gráficamente los espectros de amplitud y fase.
- Graficar las dos primeras componentes y su suma.

Solución

$$a) \quad v(\omega t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & 0 < \omega t < \pi \\ -10 \text{ V} & \pi < \omega t < 2\pi \end{cases}$$

Debido a la simetría impar, el desarrollo sólo contendrá términos en seno; y como además presenta simetría alterna sólo existirán armónicas impares. Por simple inspección se observa que el valor medio es nulo, en consecuencia,

$$V_0 = 0 \text{ V} \quad ; \quad C_{m\eta} = 0$$

$$B_{m\eta} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 10 \cdot \sin \eta \omega t \cdot d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} (-10) \cdot \sin \eta \omega t d\omega t \right]$$

$$B_{m\eta} = \frac{10}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\cos \eta \omega t}{\eta} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos \eta \omega t}{\eta} \right]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$B_{m\eta} = \frac{10}{\eta \cdot \pi} (-\cos \eta \pi + 1 + 1 - \cos \eta \pi)$$

$$B_{m\eta} = \frac{10}{\eta \cdot \pi} (2 - 2 \cos \eta \pi) = \frac{20}{\eta \cdot \pi} (1 - \cos \eta \pi)$$

$$B_{m1} = \frac{20}{\pi} (1 + 1) = 12,73$$

$$B_{m2} = \frac{20}{2\pi} (1 - 1) = 0$$

$$B_{m3} = \frac{20}{3\pi} (1 + 1) = 4,24$$

$$B_{m4} = \frac{20}{4\pi} (1 - 1) = 0$$

$$B_{m5} = \frac{20}{5\pi} (1 + 1) = 2,54$$

$$V_{m\eta} = \sqrt{B_{m\eta}^2 + C_{m\eta}^2} = |B_{m\eta}|$$

$$\theta_{\eta} = \arctan \frac{C_{m\eta}}{B_{m\eta}} = \arctan \frac{0}{B_{m\eta}} = 0 \quad \text{en consecuencia}$$

$$v(\omega t) = 12,73 \cdot \sin \omega t + 4,24 \sin 3 \omega t + 2,54 \sin 5 \omega t + \dots [V]$$

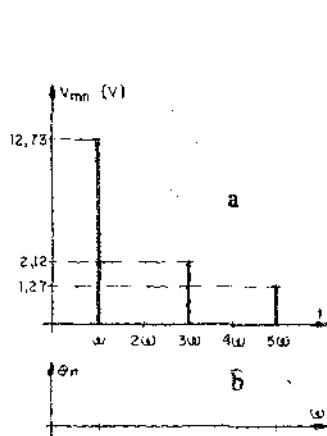


Fig. 2. 75

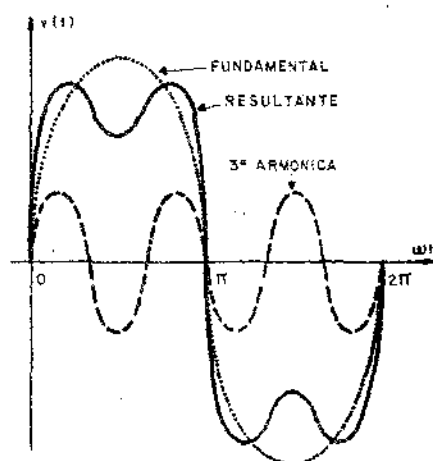


Fig. 2. 76

b) En la Fig. 2.75.a) y b) se representan los espectros de amplitud y fase respectivamente.

Nótese la rápida disminución de la amplitud de las armónicas componentes, y que todas poseen fase nula. Además, no existen armónicas pares.

c) En la Fig. 2.76 se graficaron la primera y segunda componente, es decir la fundamental y tercera armónica, y la resultante de su suma. Nótese la aproximación a la señal cuadrada a pesar de considerar sólo dos componentes.

Para reproducir exactamente la señal cuadrada se necesitaría un número infinito de armónicas impares. En la práctica, con diez armónicas se puede lograr una reproducción aceptable, pudiéndose despreciar los de orden superior a ellas. Obsér-

vese que la amplitud de cada armónica se reduce con respecto a la amplitud de su fundamental en proporción inversa del orden de la armónica.

En nuestro ejemplo la amplitud de la fundamental es de 12,73 V; la de la tercera armónica es $12,73 \% 3 = 4,24$ V; la de la quinta armónica $12,73 \% 5 = 2,54$ V y así sucesivamente se van reduciendo en amplitud e importancia.

2.6 Problemas propuestos

2.6.1) Calcular los valores medio, medio de módulo y eficaz para la tensión periódica mostrada en la Fig. 2.77. Determinar además los factores de media, cresta y de forma.

Resultados:

$$V_{me} = V |me| = \frac{2}{\pi} \cdot 10 = 6,36 \text{ V}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 = 7,07 \text{ V}$$

$$f_{me} = 1,57$$

$$f_c = 1,41$$

$$f_f = 1,11$$

2.6.2) Calcular los valores medio, medio de módulo y eficaz para la tensión periódica ilustrada en la Fig. 2.78.

Resultados:

$$V_{me} = V |me| = \frac{10}{\pi} = 3,18 \text{ V}$$

$$V = \frac{10}{2} = 5 \text{ V}$$

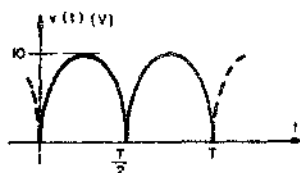


Fig. 2. 77

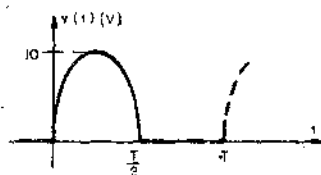


Fig. 2. 78

2.6.3.) Determinar los valores medio y eficaz de la siguiente tensión poliarmónica:

$$v(t) = 100 + 100 \sin(1000t - \frac{\pi}{4}) + 100 \sin(1000t + \pi/4) - 10 \sin(2000t + \pi/2) \text{ [V]}$$

Resultados:

$$V_{me} = 100 \text{ V}$$

$$V = 141,5 \text{ V}$$

2.6.4) Representar gráficamente la siguiente señal aperiódica:

$$v(t) = 10u(t) + 10u(t-1) + 5\rho(t-2) - 5\rho(t-3) - 10\rho(t-5) + 10\rho(t-6) - 20u(t-7) - 5\rho(t-8) + 2\delta(t-9) - 4\delta(t-10) \text{ [V]}$$

Resultado:

El gráfico pedido se muestra en la Fig. 2.79.

2.6.5) Hallar la expresión de la señal aperiódica ilustrada en la Fig. 2.80.

Resultado:

$$i(t) = 60u(t) - 60u(t-2) + 60u(t-4) - 60u(t-6) + 50\rho(t-8) - 100\rho(t-9) + 50\rho(t-10) - 2\delta(t-14) \text{ [A]}$$

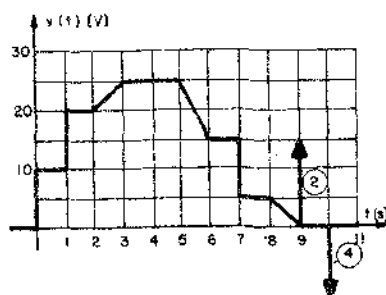


Fig. 2. 79

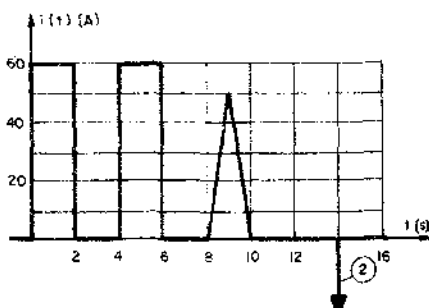


Fig. 2. 80

Respuesta de circuitos con un solo tipo de elemento pasivo

3.1. Introducción

En el Capítulo 1 se definieron los elementos pasivos, y en el Capítulo 2 se analizaron las señales de excitación de uso frecuente. En éste se estudiará la respuesta de circuito con un solo tipo de elemento pasivo, debido a la aplicación de las mencionadas señales mostrándose la conveniencia de introducir el *Principio de Dualidad*. Se comenzará con ejemplos sencillos que luego se complicarán en forma gradual.

Además, en este capítulo, desarrollado en el dominio del tiempo, se encontrarán las leyes de asociación en serie y paralelo de los elementos pasivos, y se estudiarán sus propiedades como divisores de tensión y corriente.

Finalmente, como nexa al capítulo siguiente se estudiará el divisor de tensión práctico compensado.

3.2. Comportamiento de un resistor excitado por señales arbitrarias de tensión o corriente

Se considera un generador de tensión con una ley de variación cualquiera, y se excita con él a un resistor, como se muestra en la Fig. 3.1. Dado que se excita con un generador de tensión, la respuesta será la corriente que circula por el resistor, que tendrá una expresión,

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t) \quad (3.1)$$

Si por otra parte, tal como se indica en la Fig. 3.2 consideramos como excitación a un generador de corriente, la respuesta será:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (3.2)$$

Se observa en las Ecs. (3.1) y (3.2) que la respuesta se encuentra ligada a la excitación a través de una constante. De tal forma, *en circuitos constituidos por resistores no puede existir alteración de la forma de señal de respuesta respecto de la de excitación*, modificándose sólo en unidad y factor de escala.

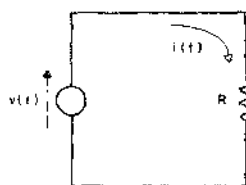


Fig. 3.1

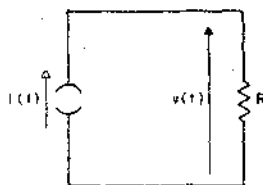


Fig. 3.2

3.3. Asociación de resistores en serie y en paralelo

a) Asociación en Serie

Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.3

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \therefore \\ v(t) &= R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) + \dots + R_n \cdot i(t) \text{ agrupando} \\ v(t) &= (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si ahora, tal como se indica en la Fig. 3.4, son reemplazados los resistores por uno solo y es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff, resulta:

$$v(t) = R_T \cdot i(t) \quad (3.4)$$

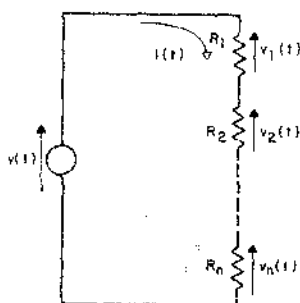


Fig. 3.3

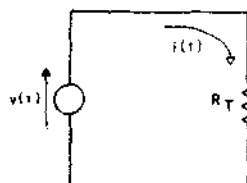


Fig. 3.4

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos, es posible igualar las Ecs. (3.3) y (3.4),

$$(R_1 + R_2 + \dots + R_n) i(t) = R_T \cdot i(t) \quad (3.5)$$

y para que ambos circuitos sean equivalentes, las respuestas deben ser iguales, por lo que en la Ec. (3.5) se pueden eliminar las corrientes, resultando:

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = R_T$$

o bien,

$$R_T = \sum_{k=1}^n R_K \quad (3.6)$$

La Ec. (3.6) indica que la resistencia total de una asociación de resistores en serie es la suma de las resistencias de cada uno de los componentes.

b) *Asociación en paralelo*

Aplicando la 1ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.5.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R_1} \cdot v(t) + \frac{1}{R_2} \cdot v(t) + \dots + \frac{1}{R_n} \cdot v(t) \text{ agrupando}$$

$$i(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) v(t) \quad (3.7)$$

Si ahora, tal como se indica en la Fig. 3.6 se reemplazan los resistores por uno solo y es aplicada la 1ª Regla de Kirchhoff resulta:

$$i(t) = \frac{1}{R_T} \cdot v(t) \quad (3.8)$$

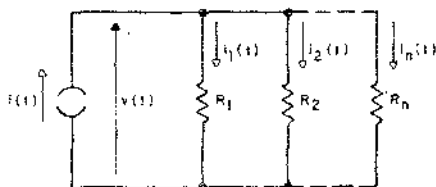


Fig. 3.5

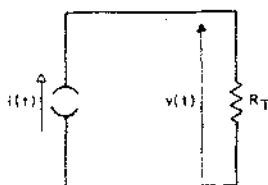


Fig. 3.6

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos se pueden igualar las Ecs. (3.7) y (3.8),

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) v(t) = \frac{1}{R_T} \cdot v(t) \quad (3.9)$$

y para que ambos circuitos sean equivalentes las respuestas deben ser iguales, por lo que en la Ec. (3.9), es posible eliminar las tensiones, resultando:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_T}$$

o bien,

$$\frac{1}{R_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_K} \quad (3.10)$$

La Ec. (3.10) indica que la inversa de la resistencia total de una asociación de resistores en paralelo es igual a la suma de las inversas de las resistencias de cada uno de los componentes.

3.4. Comportamiento de un capacitor excitado por un generador de corriente

3.4.1) *Introducción:* Considérese un capacitor excitado por una señal arbitraria de corriente, tal como se indica en la Fig. 3.7.

La respuesta puede encontrarse en base a la Ec. (1.6), es decir,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt + v_c(0^-) \quad (1.6)$$

La última expresión indica que la respuesta está ligada a la excitación por un *operador matemático que cambia la forma de las señales*. Debido a que dicho operador es una integración, la forma de señal de respuesta tendrá variaciones más "suaves" que la de excitación.

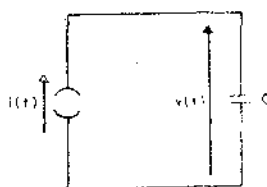


Fig. 3.7

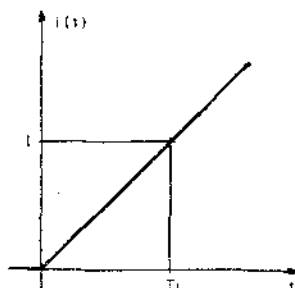


Fig. 3.8

3.4.2) *Respuestas a señales de uso frecuente:* Se estudiará el comportamiento del capacitor para distintas excitaciones, y por razones de simplicidad se considerarán condiciones iniciales nulas, por lo que al aplicar la Ec. (1.6) para los distintos casos se deberá hacer $v_c(0^-) = 0$.

a) Excitación rampa

Para la excitación mostrada en la Fig. 3.8, su expresión resulta:

$$i(t) = \frac{1}{T_1} \cdot t \cdot u(t)$$

y la respuesta

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{1}{T_1} \cdot t \cdot u(t) \cdot dt$$

I y T_1 son constantes, y también $u(t)$ para $t > 0$ ∴

$$v(t) = \frac{1}{CT_1} \cdot u(t) \int_0^t t \, dt$$

$$v(t) = \frac{1}{2CT_1} \cdot t^2 \cdot u(t) \quad (3.11)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.11) se muestra en la Fig. 3.9. Se aprecia que la respuesta es nula de $t \rightarrow -\infty$ a $t = 0$ y que resulta una parábola para $t > 0$.

b) *Excitación escalón*

Para la excitación mostrada en la Fig. 3.10, su expresión resulta:

$$i(t) = I \cdot u(t)$$

y la respuesta,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I \cdot u(t) \, dt$$

$I = \text{cte}$, y también $u(t)$ para $t > 0$ ∴

$$v(t) = \frac{I}{C} \cdot u(t) \int_0^t dt \quad \therefore$$

$$v(t) = \frac{I}{C} \cdot t \cdot u(t) = \frac{I}{C} \rho(t) \quad (3.12)$$

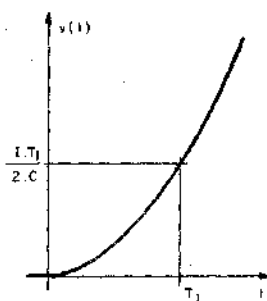


Fig. 3.9

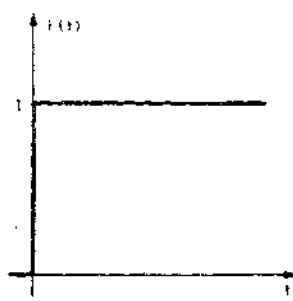


Fig. 3.10

La representación gráfica de la Ec. (3.12) se muestra en la Fig. 3.11. Nótese que la respuesta es nula de $t \rightarrow -\infty$ a $t = 0$ y que es una rampa de pendiente $\frac{I}{C}$ para $t > 0$.

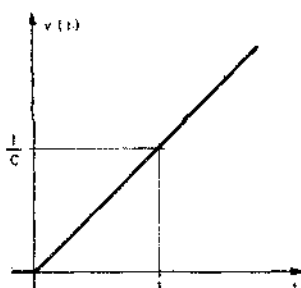


Fig. 3.11

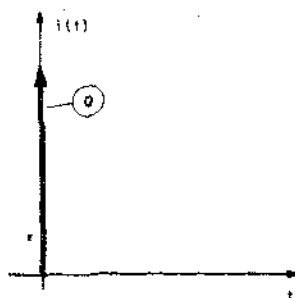


Fig. 3.12

c) *Excitación impulso*

Dada la excitación mostrada en la Fig. 3.12, su expresión resulta:

$$i(t) = Q \delta(t)$$

y la respuesta,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t Q \cdot \delta(t) dt$$

dado que $Q = \text{cte}$

$$v(t) = \frac{Q}{C} \int_0^t \delta(t) dt \quad \therefore$$

$$v(t) = \frac{Q}{C} \cdot u(t) \quad (3.13)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.13) se muestra en la Fig. 3.13. Obsérvese que la respuesta será nula para $t < 0$ y será un escalón de amplitud $\frac{Q}{C}$ para $t > 0$

d) *Excitación escalón de crecimiento gradual*

Para la excitación mostrada en la Fig. 3.14, su expresión resulta:

$$i(t) = \frac{1}{T_1} \cdot t \cdot u(t) - \frac{1}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1)$$

que puede pensarse como suma de dos componentes, es decir aplicar el principio de superposición; $i(t) = i'(t) + i''(t)$, y representarse gráficamente tal como se indica en la Fig. 3.15.a).

La respuesta resulta:

$$v(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t \left(\frac{1}{T_1} \cdot t \cdot u(t) - \frac{1}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) \right) dt \right]$$

operando
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{I}{T_1} \cdot t u(t) dt - \frac{1}{C} \int_0^{T_1} \frac{I}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) dt -$$

$$- \frac{1}{C} \int_{T_1}^t \frac{I}{T_1} \cdot (t - T_1) u(t - T_1) dt$$

$$v(t) = \frac{I}{T_1 \cdot C} u(t) \int_0^t t dt - 0 - \frac{I}{T_1 \cdot C} \cdot u(t - T_1) \int_{T_1 - T_1=0}^{t - T_1} (t - T_1) d(t - T_1) \therefore$$

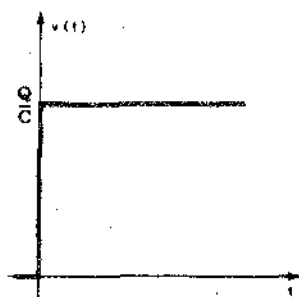


Fig. 3.13

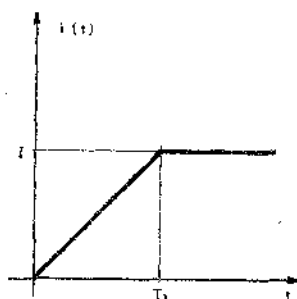


Fig. 3.14

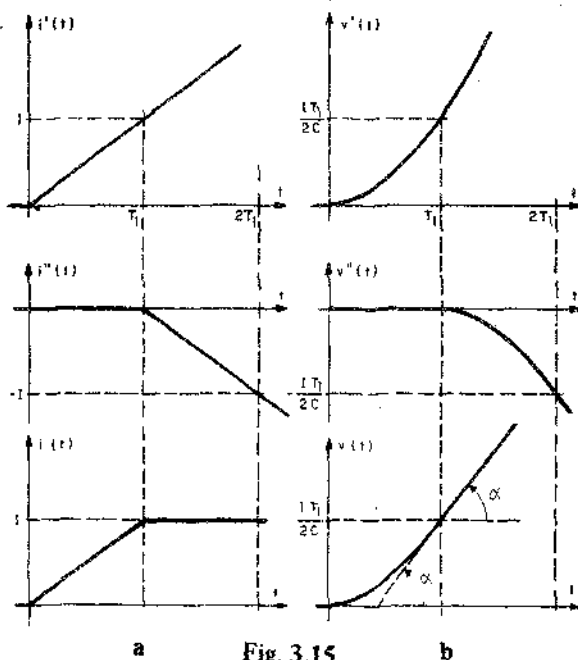


Fig. 3.15

$$v(t) = \frac{I}{2 \cdot C \cdot T_1} t^2 \cdot u(t) - \frac{I}{2 \cdot C \cdot T_1} (t - T_1)^2 u(t - T_1) \quad (3.14)$$

que puede expresarse como suma de las componentes,

$$v(t) = v'(t) + v''(t)$$

y tal como se indica en la Fig. 3.15.b) representar cada una de las respuestas componentes, y aplicando el principio de superposición obtener la respuesta total.

Nótese que la respuesta se obtiene como diferencia entre dos parábolas; la primera con vértice en el origen de coordenadas, y de valor nulo para $t \leq 0$, la segunda con vértice en T_1 y nula para $t \leq T_1$.

Obsérvese además, que a partir de T_1 , la respuesta es una recta, que en la Fig. 3.15.b) se indicó su pendiente como α . Dicha pendiente puede calcularse haciendo,

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t > T_1}$$

para ello, en principio se deriva la Ec. (3.14), pero nótese que para $t > T_1$, resulta que $u(t) = 1$ y $u(t - T_1) = 1 \therefore$

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t > T_1} = \frac{I}{2 \cdot C \cdot T_1} \cdot 2t - \frac{I}{2 \cdot C \cdot T_1} \cdot 2(t - T_1)$$

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t > T_1} = \frac{I}{CT_1} \cdot t - \frac{I}{CT_1} \cdot t + \frac{I}{C} \therefore$$

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t > T_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{I}{C} = \text{cte}$$

e) Excitación pulso rectangular

Este ejemplo, y algunos subsiguientes pueden desarrollarse con el detalle del ejemplo mostrado en d). Por razones de extensión y a efectos de evitar reiteraciones, en adelante sólo se expondrá la resolución resumida de los mismos.

Para la excitación mostrada en la Fig. 3.16, su expresión resulta:

$$i(t) = I u(t) - I u(t - T_1)$$

y la respuesta,

$$v(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t (I \cdot u(t) - I u(t - T_1)) dt \right] \text{ operando}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I \cdot u(t) dt - \frac{1}{C} \int_0^{T_1} I u(t - T_1) dt - \frac{1}{C} \int_{T_1}^t I \cdot u(t - T_1) dt$$

$$v(t) = \frac{I}{C} u(t) \int_0^t dt - 0 - \frac{I}{C} u(t - T_1) \int_{T_1 - T_1 = 0}^{t - T_1} d(t - T_1)$$

$$v(t) = \frac{I}{C} \cdot t \cdot u(t) - \frac{I}{C} (t - T_1) \cdot u(t - T_1)$$

$$v(t) = \frac{I}{C} \rho(t) - \frac{I}{C} \rho(t - T_1) \quad (3.15)$$

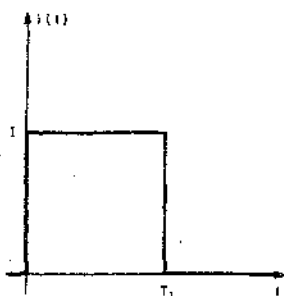


Fig. 3.16

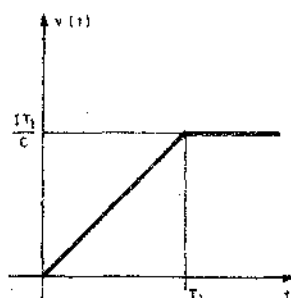


Fig. 3.17

La representación gráfica de la Ec. (3.15) se muestra en la Fig. 3.17. Obsérvese que la respuesta se obtiene como diferencia entre dos rampas, una con vértice en el origen y otra en T_1 .

f) *Excitación pulso triangular*

Dada la excitación mostrada en la Fig. 3.18, su expresión resulta:

$$i(t) = \frac{I}{T_1} t \cdot u(t) - \frac{I}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) - I u(t - T_1)$$

y la respuesta,

$$v(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t \left(\frac{I}{T_1} \cdot t \cdot u(t) - \frac{I}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) - I u(t - T_1) \right) dt \right]$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{I}{T_1} t u(t) dt - \frac{1}{C} \int_0^{T_1} \frac{I}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) dt -$$

$$\frac{1}{C} \int_{T_1}^t \frac{I}{T_1} (t - T_1) u(t - T_1) dt - \frac{1}{C} \int_0^{T_1} I \cdot u(t - T_1) dt -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{C} \int_{T_1}^t I u(t - T_1) dt \\
 v(t) &= \frac{I}{C \cdot T_1} u(t) \int_0^t t \cdot dt - 0 - \frac{I}{C T_1} u(t - T_1) \int_{T_1 - T_1}^{t - T_1} (t - T_1) \\
 & \quad d(t - T_1) - 0 - \frac{I}{C} u(t - T_1) \int_{T_1 - T_1}^{t - T_1} d(t - T_1) \\
 v(t) &= \frac{I}{2 C T_1} \cdot t^2 \cdot u(t) - \frac{I}{2 C T_1} (t - T_1)^2 u(t - T_1) - \frac{I}{C} (t - T_1) \\
 & \quad u(t - T_1) \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

La representación gráfica de la Ec. (3.16) se ilustra en la Fig. 3.19. En este caso la respuesta se obtiene como la diferencia entre dos parábolas, una con vértice en el origen, otra en T_1 y de una rampa desplazada en T_1 .

Nótese que a partir del instante en que la corriente se anula, la tensión permanece constante pues no se inyecta ni extrae carga alguna del capacitor.

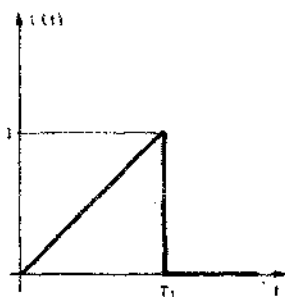


Fig. 3.18

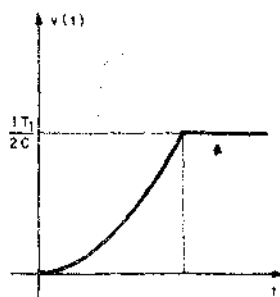


Fig. 3.19

3.5 Comportamiento de un capacitor excitado por un generador de tensión

3.5.1 Introducción

A continuación será considerado un capacitor excitado por una señal arbitraria de tensión, tal como se indica en la Fig. 3.20.

La respuesta, puede encontrarse en base a la Ec. (1.5), es decir,

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.5)$$

La última expresión indica que la respuesta está ligada a la excitación por un *operador matemático que cambia la forma de las señales*. Debido a dicho operador derivación, la forma de señal de respuesta será más abrupta que la de excitación.

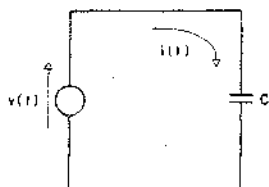


Fig. 3.20

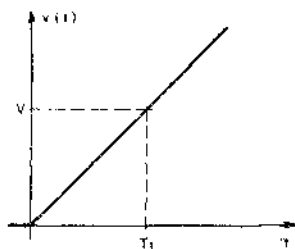


Fig. 3.21

3.5.2) Respuestas a señales de uso frecuente

Será estudiado el comportamiento del capacitor para distintas excitaciones, utilizando la Ec. (1.5) para hallar la respuesta.

a) Excitación rampa

Dada la excitación que se ilustra en la Fig. 3.21, su expresión resulta:

$$v(t) = \frac{V}{T_1} \cdot t \cdot u(t)$$

y la respuesta será:

$$i(t) = C \cdot d \left[\frac{V}{T_1} \cdot t u(t) \right] \frac{dt}{dt}$$

como V , T_1 = ctes y $t \cdot u(t) = \rho(t)$ surge:

$$i(t) = \frac{C \cdot V}{T_1} \frac{d \rho(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{C \cdot V}{T_1} \cdot u(t) \quad (3.17)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.17) se muestra en la Fig. 3.22, resultando un escalón de amplitud $\frac{CV}{T_1}$.

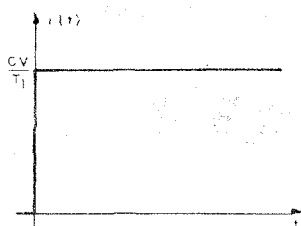


Fig. 3.22

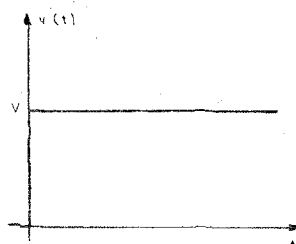


Fig. 3.23

b) *Excitación escalón*

Para la excitación que se ilustra en la Fig. 3.23 su expresión resulta:

$$v(t) = V \cdot u(t)$$

y la respuesta,

$$i(t) = C \frac{d[V \cdot u(t)]}{dt} \quad \text{como } V = \text{cte}$$

$$i(t) = C \cdot V \frac{d u(t)}{dt} \quad \therefore$$

$$i(t) = C \cdot V \cdot \delta(t) \quad (3.18)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.18) se muestra en la Fig. 3.24, resultando un impulso de área $C \cdot V$.

Nótese que para lograr una variación discontinua de la tensión sobre el capacitor, es necesario que el circuito asociado sea capaz de sostener una corriente instantánea de amplitud infinita.

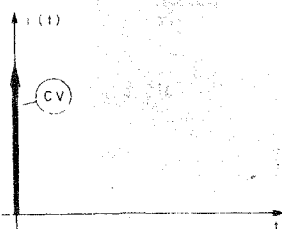


Fig. 3.24

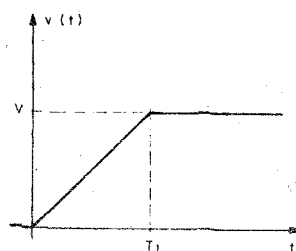


Fig. 3.25

c) *Excitación escalón de crecimiento gradual*

Para la excitación que se muestra en la Fig. 3.25, su expresión resulta:

$$v(t) = \frac{V}{T_1} \cdot \rho(t) - \frac{V}{T_1} \rho(t - T_1)$$

y la respuesta,

$$i(t) = C \frac{d \left[\frac{V}{T_1} \rho(t) - \frac{V}{T_1} \rho(t - T_1) \right]}{dt}$$

como $V_y T_1 = \text{ctes}$

$$i(t) = \frac{CV}{T_1} u(t) - \frac{CV}{T_1} u(t - T_1) \quad (3.19)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.19) se muestra en la Fig. 3.26 y resulta de la diferencia de dos escalones, uno en el origen y otro desplazado en T_1 , resultando un impulso rectangular de amplitud $\frac{C \cdot V}{T_1}$

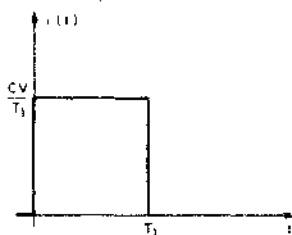


Fig. 3.26

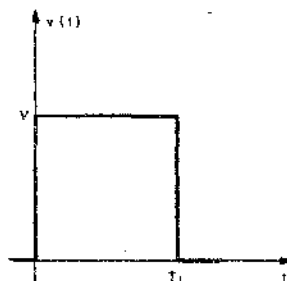


Fig. 3.27

d) *Excitación pulso rectangular*

Para la excitación que ilustra en la Fig. 3.27, su expresión resulta:

$$v(t) = V u(t) - V u(t - T_1)$$

y la respuesta,

$$v(t) = C \cdot V \cdot \frac{d u(t)}{dt} - C \cdot V \cdot \frac{d u(t - T_1)}{dt} \quad \therefore$$

$$v(t) = C \cdot V \cdot \delta(t) - C \cdot V \delta(t - T_1) \quad (3.20)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.20) se muestra en la Fig. 3.28 resultando un impulso en el origen de área CV, y un impulso negativo en T_1 , de área CV.

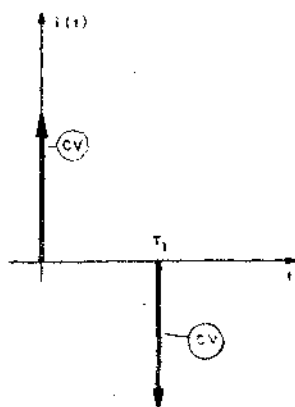


Fig. 3.28

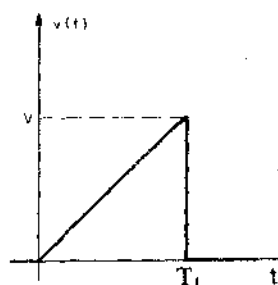


Fig. 3.29

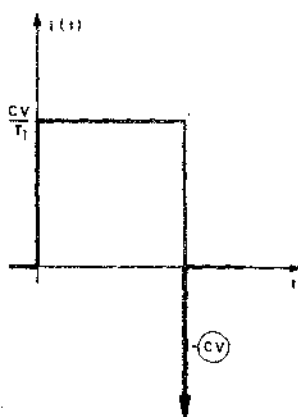


Fig. 3.30

e) *Excitación pulso triangular*

Dada la excitación que se muestra en la Fig. 3.29, su expresión resulta:

$$v(t) = \frac{V}{T_1} \rho(t) - \frac{V}{T_1} \cdot \rho(t - T_1) - Vu(t - T_1)$$

y la respuesta,

$$i(t) = \frac{CV}{T_1} \frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{CV}{T_1} \frac{d[\rho(t-T_1)]}{dt} = CV \frac{d[u(t-T_1)]}{dt}$$

$$i(t) = \frac{CV}{T_1} \cdot u(t) - \frac{CV}{T_1} \cdot u(t-T_1) - CV \cdot \delta(t-T_1) \quad (3.21)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.21) se muestra en la Fig. 3.30, resultando un pulso rectangular de amplitud $\frac{CV}{T_1}$ que finaliza en T_1 , y allí un impulso negativo de área CV .

3.6 Asociación de capacitores en serie y paralelo

a) Asociación en serie

Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.31, se tiene:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \quad \therefore \\ v(t) &= \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt + v_{C_1}(0^-) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt + v_{C_2}(0^-) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{C_n} \int_0^t i(t) dt + v_{C_n}(0^-) \quad \text{agrupando} \\ v(t) &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t i(t) dt + (v_{C_1}(0^-) + v_{C_2}(0^-) + \dots \\ &\quad \dots + v_{C_n}(0^-)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

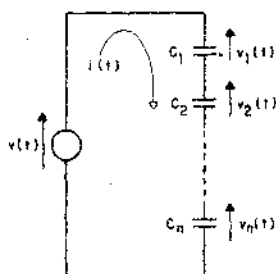


Fig. 3.31

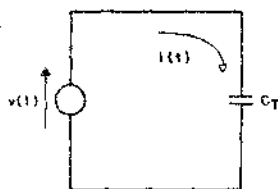


Fig. 3.32

Si ahora, tal como se indica en la Fig. 3.32 son reemplazados todos los capacitores por uno solo y es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff resulta:

$$v(t) = \frac{1}{C_T} \int_0^t i(t) dt + v_{C_T}(0^-) \quad (3.23)$$

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos es posible igualar las Ecs. (3.22) y (3.23)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t i(t) dt + (v_{C_1}(0^-) + v_{C_2}(0^-) + \dots + v_{C_n}(0^-)) = \\ = \frac{1}{C_T} \int_0^t i(t) dt + v_{C_T}(0^-) \end{aligned} \quad (3.24)$$

y si se desea obtener la misma respuesta para los dos circuitos, es decir ambas con idéntica circulación de corriente, de la Ec. (3.24) surge que:

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) = \frac{1}{C_T} \quad \therefore \quad \frac{1}{C_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (3.25)$$

Debiendo cumplirse simultáneamente que:

$$\begin{aligned} v_{C_1}(0^-) + v_{C_2}(0^-) + \dots + v_{C_n}(0^-) = v_{C_T}(0^-) \quad \therefore \\ v_{C_T}(0^-) = \sum_{k=1}^n v_{C_k}(0^-) \end{aligned} \quad (3.26)$$

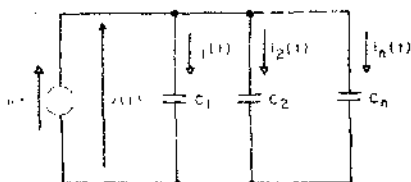


Fig. 3.33

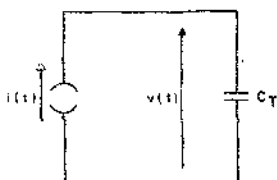


Fig. 3.34

b) Asociación en paralelo

Aplicando la 1ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.33, resulta:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) \\ i(t) &= C_1 \cdot \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} + \dots + C_n \cdot \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{agrupando } i(t) = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.27)$$

Si ahora, tal como se indica en la Fig. 3.34, son reemplazados todos los capacitores por uno solo y se aplica la 2ª Regla de Kirchhoff, resulta:

$$i(t) = C_T \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.28)$$

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos se pueden igualar las Ecs. (3.27) y (3.28),

$$(C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{dv(t)}{dt} = C_T \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.29)$$

y si se desea obtener la misma respuesta para los dos circuitos, es decir ambos con igual tensión, de la Ec. 3.29 resulta:

$$(C_1 + C_2 + \dots + C_n) = C_T \quad \therefore \\ C_T = \sum_{k=1}^n C_k \quad (3.30)$$

3.7 Comportamiento de un inductor excitado por un generador de tensión

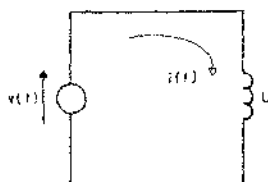


Fig. 3.35

3.7.1 Introducción

Considerando un inductor excitado por una señal arbitraria de tensión, tal como se ilustra en la Fig. 3.35.

La respuesta puede encontrarse en base a la Ec. (1.9), es decir,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i_L(0^-) \quad (1.9)$$

La última expresión indica que la respuesta está ligada a la excitación por un operador matemático que cambia la forma de las señales.

Debido a que dicho operador es una integración, la forma de señal de respuesta tendrá variaciones más "suaves" que la de excitación.

En este caso de inductor excitado por generador de tensión, será estudiada en principio, la respuesta a una sola excitación, y luego comparando con lo visto para un capacitor excitado por generador de corriente, tratará de encontrarse la forma de extender los resultados para las demás excitaciones. Por razones similares a las esgrimidas en 3.4.2 se considerará $i_L(0^-) = 0$.

3.7.2) Respuesta a excitación rampa

Dada la excitación mostrada en la Fig. 3.36, su expresión resulta:

$$v(t) = \frac{V}{T_1} \cdot t \cdot u(t)$$

y la respuesta,

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \frac{V}{T_1} \cdot t \cdot u(t) \cdot dt$$

V y T_1 son constantes, y también $u(t)$ para $t > 0$ $\therefore$

$$i(t) = \frac{V}{L \cdot T_1} \cdot u(t) \int_0^t t \cdot dt \quad \therefore$$

$$i(t) = \frac{V}{2 \cdot L \cdot T_1} \cdot t^2 \cdot u(t) \quad (3.31)$$

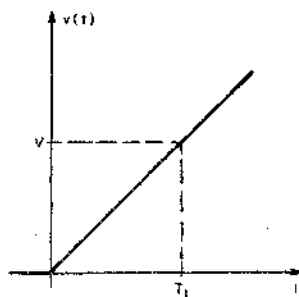


Fig. 3.36

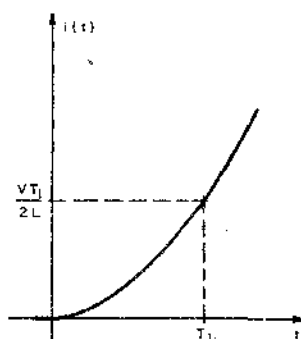


Fig. 3.37

La representación gráfica de la Ec. (3.31) se muestra en la Fig. 3.37. Se observa que la respuesta será nula de $t \rightarrow -\infty$ a $t = 0$, y que será una parábola para $t > 0$.

3.7.3) Introducción del principio de dualidad

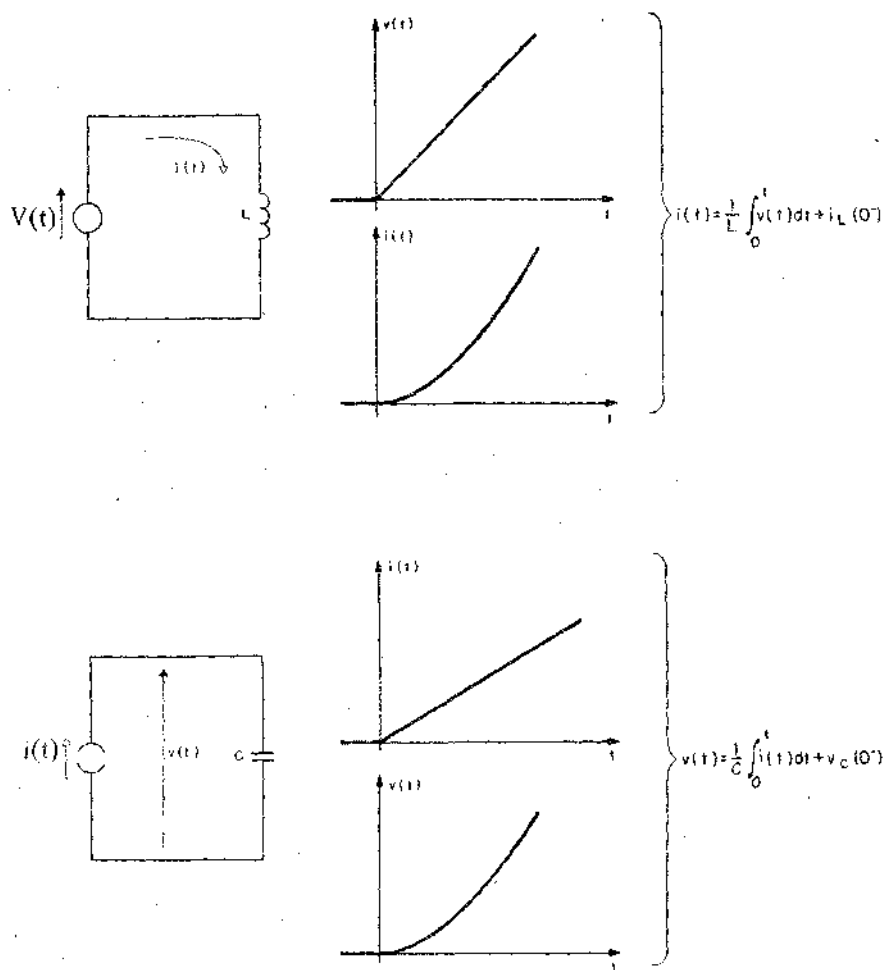


Fig. 3.38

El párrafo anterior se estudió la respuesta de un inductor excitado por un generador de tensión rampa, y se obtuvo como respuesta la señal indicada en la Fig. 3.37 y expresada matemáticamente en la Ec. (3.31).

En el párrafo 3.4.2.a) se estudió la respuesta de un capacitor excitado por un generador de corriente rampa, obteniéndose como respuesta la señal ilustrada en la Fig. 3.9 que se expresa matemáticamente por la Ec. (3.11).

Todo lo mencionado anteriormente se encuentra resumido en forma gráfica en la Fig. 3.38, y en la misma, se indican para cada caso, las expresiones que se utilizaron para hallar las respuestas. Nótese que para ambos casos, las ecuaciones utilizadas y las respuestas halladas son formalmente iguales.

En base a esto es posible enunciar el *Principio de Dualidad*: "cuando en dos circuitos la relación funcional que liga la excitación con la respuesta es la misma, se dice que dichos circuitos son duales". La importancia de este principio es que conduce a obtener un *diccionario dual* que permitirá traducir el comportamiento de un circuito a otro, que se sabe es dual del anterior.

Las primeras palabras podrán escribirse por simple inspección de las ecuaciones mostradas en la Fig. 3.38.

<i>Corriente</i>	<i>Tensión</i>
<i>Inductancia</i>	<i>Capacitancia</i>

que puede ampliarse, a saber:

<i>1° Regla de Kirchhoff</i>	<i>2° Regla de Kirchhoff</i>
<i>Nodo</i>	<i>Malla</i>
<i>Serie</i>	<i>Paralelo</i>

y que será completado más adelante.

Es debido a esto, que no tiene sentido volver a repetir todo el estudio para el inductor, ya que las respuestas a encontrar serán formalmente iguales a las halladas en el párrafo 3.4). Por otra parte en base a la experiencia obtenida y la aplicación del *Principio de dualidad* surge un método sencillo para obtener respuestas en forma cualitativa, y que además sirve como apoyo al desarrollo analítico anterior.

3.8 Ejemplos de obtención de respuestas de circuito con un solo tipo de elemento pasivo a través de un análisis cualitativo

3.8.1) Resistor excitado por generador de tensión o de corriente

Tal como se vió en el párrafo 3.2, para las dos posibilidades indicadas, la respuesta se obtiene ligando la excitación a una constante, por lo cual no existirá alteración de la forma de señal de respuesta respecto a la excitación.

3.8.2) Capacitor excitado por un generador de corriente que en base al principio de dualidad será válido para un inductor excitado por un generador de tensión.

Lo enunciado anteriormente se sintetiza en la Fig. 3.39 para condiciones iniciales nulas.

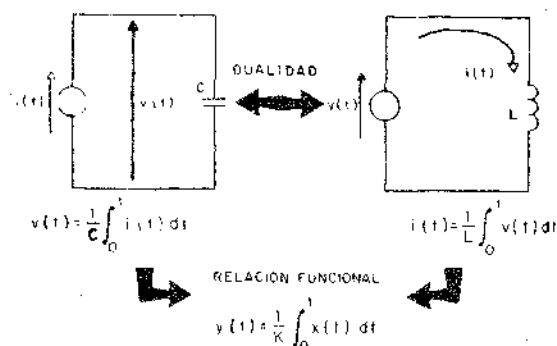


Fig. 3.39

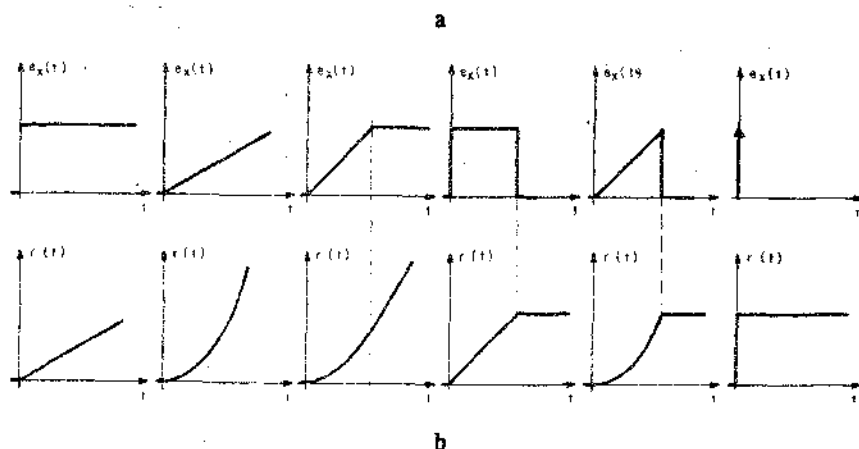


Fig. 3.40

Obsérvese, que para ambos casos, la relación funcional que liga excitación y respuesta es la misma. En base a esto y a los conocimientos sobre integración gráfica, para las excitaciones $e_x(t)$ mostrados en la Fig. 3.40.a) se hallan las respuestas $r(t)$ ilustradas en la Fig. 3.40.b).

3.8.3) Capacitor excitado por un generador de tensión que en base al principio de dualidad será válido para un inductor excitado por un generador de corriente.

Lo enunciado anteriormente se resume en la Fig. 3.41.

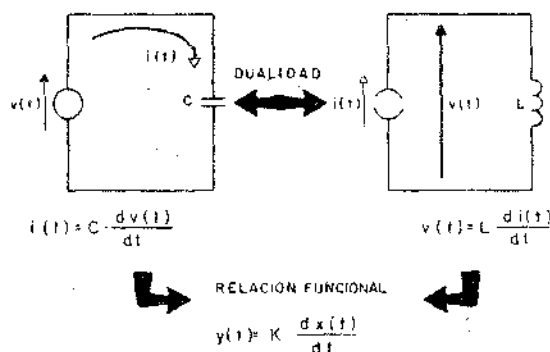


Fig. 3.41

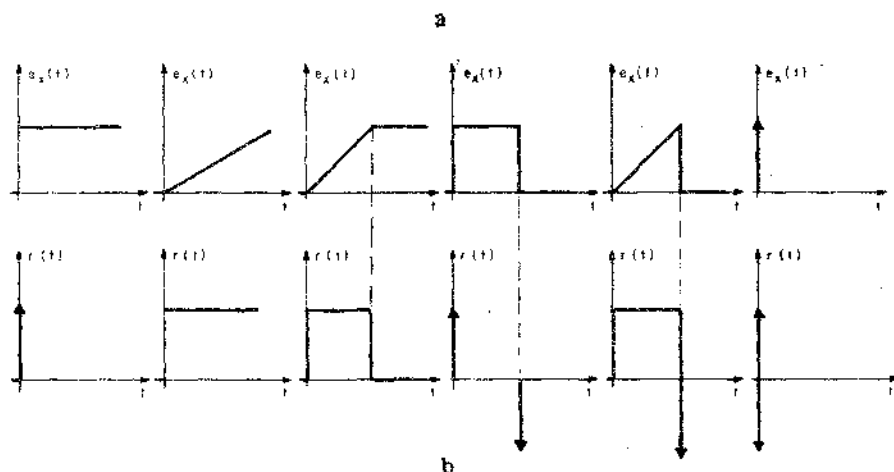


Fig. 3.42

Obsérvese, que para ambos casos, la relación funcional que liga a excitación y respuesta es la misma. En base a esto y a los conocimientos sobre derivación gráfica, para las excitaciones $e_x(t)$, mostradas en la Fig. 3.42.a) se obtienen las respuestas, $r(t)$, mostradas en la Fig. 3.42.b).

Nota: A través de los análisis realizados se observa que en circuitos con inductor o capacitor la forma de señal de respuesta se altera respecto a la de excitación debido a la presencia del operador matemático. En realidad, existe una excepción, que es el caso de excitar con una señal del tipo senoidal. Como derivar o integrar la señal mencionada da otra señal senoidal, se observa que no existirá alteración de la forma de señal, apareciendo sólo un desfase.

3.9 Asociación de inductores en serie y en paralelo

a) Asociación en serie

Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.43, se tiene:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \quad \therefore \\
 v(t) &= L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_n \frac{di(t)}{dt} \quad \text{agrupando} \\
 v(t) &= (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di(t)}{dt} \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

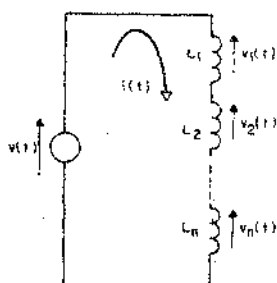


Fig. 3.43

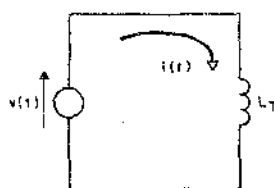


Fig. 3.44

Si ahora, tal como se indica en la Fig. 3.44 se reemplazan todos los inductores por uno solo y es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff resulta:

$$v(t) = L_T \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (3.33)$$

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos pueden igualar las Ecs. (3.32) y (3.33),

$$(L_1 + L_2 + \dots + L_n) \cdot \frac{di(t)}{dt} = L_T \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (3.34)$$

y si se desea obtener la misma respuesta para los dos circuitos, es decir ambos con idéntica circulación de corriente, de la Ec. (3.34) surge que:

$$\begin{aligned}
 L_1 + L_2 + \dots + L_n &= L_T \quad \therefore \\
 L_T &= \sum_{k=1}^n L_k \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

b) Asociación en paralelo

Aplicando la 1° Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.45,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) \quad \therefore$$

$$i(t) = \frac{1}{L_1} \int_0^t v(t) dt + i_{L_1}(0^-) + \frac{1}{L_2} \int_0^t v(t) dt + i_{L_2}(0^-) + \dots$$

$$+ \dots \frac{1}{L_n} \int_0^t v(t) dt + i_{L_n}(0^-)$$

agrupando,

$$i(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t v(t) dt + (i_{L_1}(0^-) + i_{L_2}(0^-) + \dots + i_{L_n}(0^-)) \quad (3.36)$$

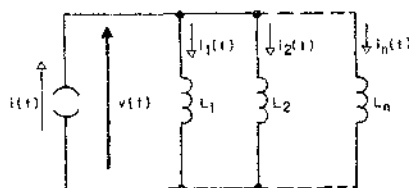


Fig. 3.45

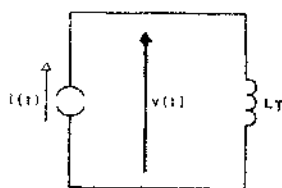


Fig. 3.46

Si ahora, tal como se ilustra en la Fig. 3.46 se reemplazan todos los inductores por uno solo y es aplicada la 1° Regla de Kirchhoff surge que:

$$i(t) = \frac{1}{L_T} \int_0^t v(t) \cdot dt + i_{L_T}(0^-) \quad (3.37)$$

Dado que el generador es el mismo para ambos circuitos es posible igualar las Ecs. (3.36) y (3.37),

$$\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t v(t) dt + [i_{L_1}(0^-) + i_{L_2}(0^-) + \dots + i_{L_n}(0^-)] =$$

$$= \frac{1}{L_T} \int_0^t v(t) dt + i_{L_T}(0^-) \quad (3.38)$$

y si se desea obtener la misma respuesta para los dos circuitos, es decir ambos con igual tensión, de la Ec. 3.38 resulta:

$$\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) = \frac{1}{L_T} \quad \therefore \quad \frac{1}{L_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (3.39)$$

Debiendo cumplirse simultáneamente que:

$$i_{L_1}(0^-) + i_{L_2}(0^-) + \dots + i_{L_n}(0^-) = i_{L_T}(0^-) \quad \therefore \quad i_{L_T}(0^-) = \sum_{k=1}^n i_{L_k}(0^-) \quad (3.40)$$

3.10 Resumen general

En la Fig. 3.47 se muestra un cuadro donde se resume el comportamiento de los elementos pasivos excitados por generadores de tensión y corriente, y en la Fig. 3.48 las reglas de asociación de los mencionados elementos.

CIRCUITOS CON UN SOLO ELEMENTO PASIVO			
ELEMENTO	EXCIT.	RESPUESTA	OBSERVACIONES
RESISTOR 	$v(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	LA RESPUESTA TIENE LA MISMA LEY DE VARIACION QUE LA EXCITACION
	$i(t)$	$v(t) = R \cdot i(t)$	
CAPACITOR 	$v(t)$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	LA RESPUESTA ES LA DERIVADA DE LA EXCITACION
	$i(t)$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_C(0^-)$	LA RESPUESTA ES LA INTEGRAL DE LA EXCITACION
INDUCTOR 	$v(t)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i_L(0^-)$	LA RESPUESTA ES LA INTEGRAL DE LA EXCITACION
	$i(t)$	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	LA RESPUESTA ES LA DERIVADA DE LA EXCITACION

Fig. 3.47

ASOCIACIONES DE ELEMENTOS			
Asociación Elemento	Resistor	Capacitor	Inductor
Serie	$R_T = \sum_{k=1}^n R_k$	$\frac{1}{C_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$ $v_{C_T(0^-)} = \sum_{k=1}^n v_{C_k(0^-)}$	$L_T = \sum_{k=1}^n L_k$
Paralelo	$\frac{1}{R_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$	$C_T = \sum_{k=1}^n C_k$	$\frac{1}{L_T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$ $i_{L_T(0^-)} = \sum_{k=1}^n i_{L_k(0^-)}$

Fig. 3.48

3.11 Divisores de tensión y corriente resistivos, capacitivos e inductivos

El estudio continuará con un mismo tipo de elemento pasivo, pero será colocado más de un elemento. Se elegirán ex profeso algunos circuitos que se presentan frecuentemente en la práctica, con el objeto de conocer el comportamiento de los mismos y poder aplicar las conclusiones finales en la resolución de problemas.

Se consideran condiciones iniciales nulas.

3.11.1) Divisores de tensión resistivos, capacitivos e inductivos.

Para los tres casos en estudio se supondrá que no se consuma energía del circuito divisor, es decir que la corriente de salida es nula. En términos reales esto quiere decir que la corriente que se toma del circuito es mucho menor que la que circula por él, y en consecuencia puede despreciarse la corriente de salida. Más adelante será estudiado el caso en que esta última debe tenerse en cuenta.

a) Divisor resistivo

Para el circuito mostrado en la Fig. 3.49 se tiene,

$$v_s(t) = R_2 \cdot i(t) \quad y$$

$$v_e(t) = (R_1 + R_2) i(t)$$

realizando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$v_s(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_e(t) \quad (3.41)$$

b) Divisor capacitivo

Dado el circuito ilustrado en la Fig. 3.50 resulta:

$$v_s(t) \approx \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad y$$

$$v_e(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t i(\tau) d\tau$$

efectuando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$v_s(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot v_e(t) \quad (3.42)$$

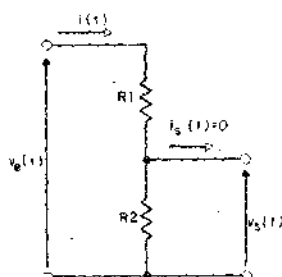


Fig. 3.49

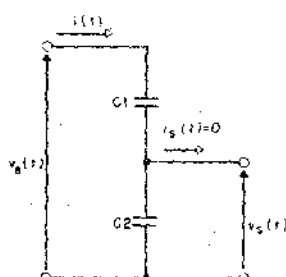


Fig. 3.50

c) Divisor inductivo

Para el circuito mostrado en la Fig. 3.51 se tiene:

$$v_s(t) = L_2 \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad y$$

$$v_e(t) = (L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt}$$

realizando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$v_s(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot v_e(t) \quad (3.43)$$

Del análisis de las Ecs. (3.41), (3.42) y (3.43) se deduce que, como la respuesta y la excitación están vinculadas a través de una constante *la forma de señal de salida será igual a la de entrada*. Pero se hace notar que en todos los casos, dicho operador o re-

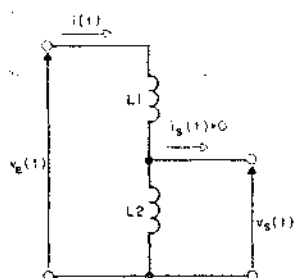


Fig. 3.51

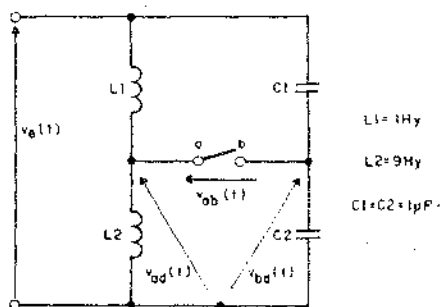


Fig. 3.52

lación de división es menor que la unidad, por lo cual *la señal de salida resulta de menor amplitud que la de entrada*. Debido a ello, estos circuitos son conocidos también con el nombre de *atenuadores*. Los divisores empleados comúnmente son el resistivo y capacitivo. Los inductivos resultan más voluminosos y antieconómicos.

d) Ejemplo de aplicación

Para el circuito y datos mostrados en la Fig. 3.52, excitado por la señal ilustrada en la Fig. 3.53.a) se pide determinar $v_{ab}(t)$ y graficarla en correspondencia con la excitación.

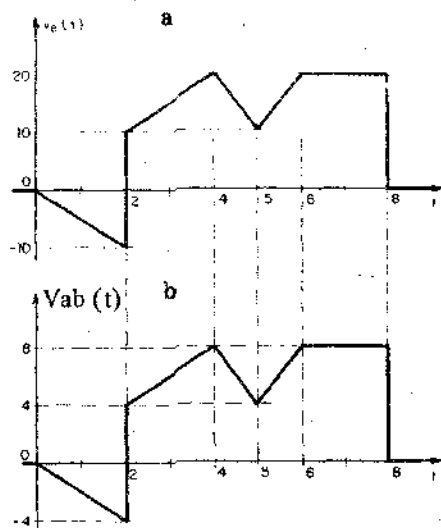


Fig. 3.53

Solución

Planteando la 2ª Regla de Kirchhoff, asignando un sentido de circulación horario se tiene:

$$\begin{aligned} -v_{ab}(t) + v_{ad}(t) - v_{bd}(t) &= 0 \quad \therefore \\ v_{ab}(t) &= v_{ad}(t) - v_{bd}(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$v_{ad}(t)$ y $v_{bd}(t)$ se obtienen aplicando directamente las Ecs. (3.42) y (3.42) respectivamente,

$$v_{ad}(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_e(t) = \frac{9 \text{ H}}{(1 + 9) \text{ H}} \cdot v_e(t) = 0,9 v_e(t) \quad (3.45)$$

$$v_{bd}(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_e(t) = \frac{1 \cdot 10^{-6} \text{ F}}{(1 + 1) \cdot 10^{-6} \text{ F}} \cdot v_e(t) = 0,5 v_e(t) \quad (3.46)$$

Reemplazando las Ecs. (3.45) y (3.46) en la Ec. (3.44),

$$\begin{aligned} v_{ab}(t) &= 0,9 v_e(t) - 0,5 v_e(t) \quad \therefore \\ v_{ab}(t) &= 0,4 v_e(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

La Ec. (3.47) establece que la forma de señal de tensión entre los puntos a-b no ha variado respecto de la tensión de entrada, pero se ha reducido en un 60% , tal como se ilustra en la Fig. 3.53.b).

3.11.2) Divisores de corriente resistivos, capacitivos e inductivos.

Este divisor no presenta el uso práctico del atenuador de tensión visto anteriormente, pero de su análisis surgen fórmulas de división de corriente que podrán aplicarse directamente en la resolución de problemas.

a) Divisor resistivo

Para el circuito mostrado en la Fig. 3.54 se tiene:

$$\begin{aligned} i_s(t) &= \frac{1}{R_2} \cdot v(t) \quad e \\ i_e(t) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \end{aligned}$$

realizando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$i_s(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i_e(t) \quad (3.48)$$

b) Divisor capacitivo

Dado el circuito ilustrado en la Fig. 3.55 resulta:

$$i_s(t) = C_2 \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad e$$

$$i_e(t) = (C_1 + C_2) \frac{dv(t)}{dt}$$

efectuando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$i_s(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot i_e(t) \quad (3.49)$$

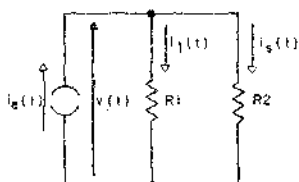


Fig. 3.54

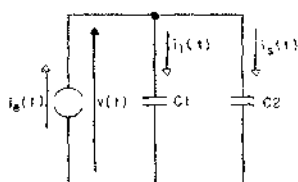


Fig. 3.55

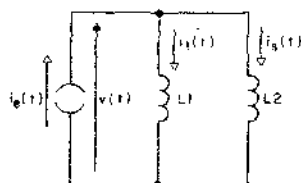


Fig. 3.56

c) Divisor inductivo

Para el circuito mostrado en la Fig. 3.56 se tiene:

$$i_s(t) = \frac{1}{L_2} \int_0^t v(t) dt \quad e$$

$$i_e(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_0^t v(t) dt$$

realizando el cociente entre ambas expresiones y operando,

$$i_s(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot i_e(t) \quad (3.50)$$

De las Ecs. (3.48), (3.49) y (3.50) se desprende que, como el operador que relaciona respuesta y excitación es una constante, la forma de señal de salida será igual a la de entrada, pero menor en amplitud, dado que la relación de división es menor que la unidad.

3.12 Divisor de tensión práctico compensado

Es propósito de este párrafo realizar un análisis cualitativo del atenuador compensado, y como se desprenderá de la formación del circuito obra de unión con el capítulo siguiente, pues aparecen dos tipos de elementos pasivos. Sin embargo, por razones didácticas es conveniente introducirlo aquí; más adelante se realizará un análisis más profundo.

Es evidente, que al divisor de tensión resistivo mostrado en la Fig. 3.49, deberá considerárselo con $i_s(t) \neq 0$ e introducirle los parámetros residuales para adecuarlos a la mayoría de los casos prácticos. En estas condiciones se llega al circuito de la Fig. 3.57. Es claro, que, al aparecer estos parámetros residuales se perderá la propiedad del divisor de no alterar las señales, y en consecuencia la tensión de salida del divisor resistivo real estará ligada a la excitación por un operador matemático que no será una constante, es decir,

$$v_{sR}(t) = \text{Operador Matemático} \cdot v_e(t)$$

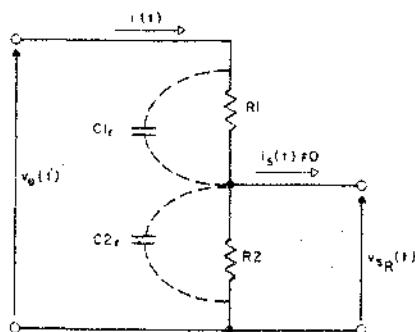


Fig. 3.57

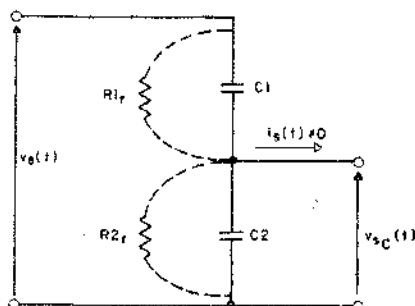


Fig. 3.58

Por otra parte, para el divisor de tensión capacitivo mostrado en la Fig. 3.50, por razones similares a las expuestas para el resistivo, se llega al circuito de la Fig. 3.58. En este caso también,

$$v_{sC}(t) = \text{Operador Matemático} \cdot v_e(t)$$

Como es lógico, el divisor a construir deberá cumplir dos condiciones; no modificar la forma de señal y atenuarla. Dado que los divisores mostrados en las Figs. 3.57 y 3.58 no logran, actuando en forma separada, satisfacer las condiciones mencionadas, serán superpuestos tal como se ilustra en la Fig. 3.59, y observándose lo siguiente:

Es factible prácticamente que se cumpla,

$$C_1 \gg C_{1r} \quad ; \quad C_2 \gg C_{2r}$$

$$R_1 \ll R_{1r} \quad ; \quad R_2 \ll R_{2r}$$

y si se une A con B se observa que los parámetros residuales se anulan mutuamente. Entonces se tendrá que:

$$v_{sR}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_e(t) \quad y$$

$$v_{sC}(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot v_e(t)$$

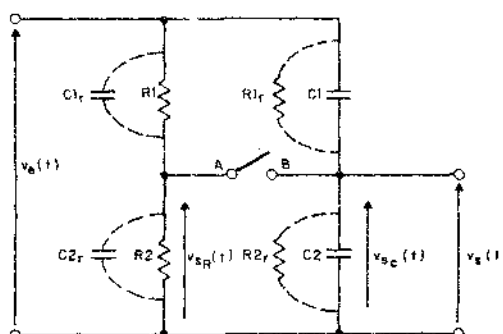


Fig. 3.59

Si las relaciones de atenuación de los dos divisores son iguales, pueden unirse los puntos A y B sin que se altere ninguna tensión o corriente. En ese caso resulta:

$$v_{sR}(t) = v_{sC}(t) \quad y$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (3.51)$$

La Ec. (3.51) se conoce como *condición de compensación*. Operando con la misma,

$$R_2 C_1 + R_2 C_2 = R_1 C_1 + R_2 C_1 \quad \therefore$$

$$R_2 \cdot C_2 = R_1 C_1 \quad (3.52)$$

se llega a la Ec. (3.52) que es una forma más sencilla de expresar la condición de compensación del atenuador. Cuando se cumple la misma, se llega al atenuador compensado, y ese circuito que ha sido logrado en forma de modelo circuital, y que se reproduce en la Fig. 3.62 cumple en la práctica en no alterar la forma de señal.

Una manera corriente y práctica de verificar lo anterior es armar el circuito ilustrado en la Fig. 3.60 con elementos variables y aplicar a la entrada una señal escalón (o eventualmente una cuadrada). La señal de salida puede visualizarse conectando un osciloscopio en la misma, y en general se observará sobre la pantalla del instrumento las formas de señal indicadas por la Fig. 3.61.

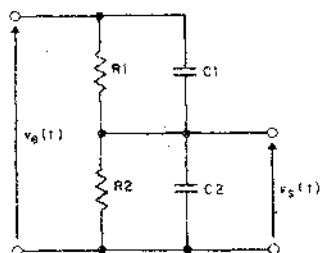


Fig. 3.60

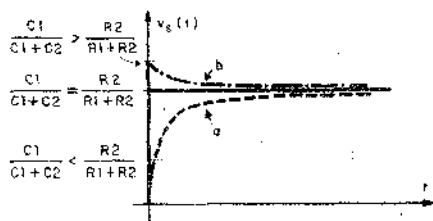


Fig. 3.61

Se dice que para el caso "a" el atenuador se encuentra subcompensado; y en el caso de "b" está sobrecompensado. En esas circunstancias se modifica el valor de alguno de los elementos para llegar a la compensación adecuada de tal manera de lograr un escalón en la pantalla del osciloscopio. Puede verificarse que en este caso se cumple la Ec. (3.52).

3.13 Problemas resueltos

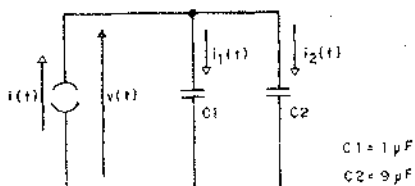


Fig. 3.62

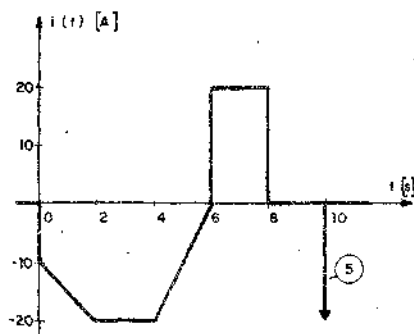


Fig. 3.63

3.13.1) Para el circuito mostrado en la Fig. 3.62, excitado por una corriente ilustrada en la Fig. 3.63 se pide:

- Hallar la expresión de la señal de excitación.
 - Encontrar la expresión de $i_2(t)$ y representarla gráficamente.
- Se suponen condiciones iniciales nulas.

Solución

a) Tal como se estudió en el Cap. 2, parágrafo 2.4.5), por superposición de señales elementales desplazadas se puede hallar la expresión de $i(t)$ resultando:

$$i(t) = -10u(t) - 5\rho(t) + 5\rho(t-2) + 10\rho(t-4) - 10\rho(t-6) + 20u(t-6) - 20u(t-8) - 5\delta(t-10) \quad [\text{A}] \quad (3.53)$$

- b) $i_2(t)$ puede hallarse directamente aplicando la Ec. (3.49)

$$i_2(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot i(t)$$

$$i_2(t) = \frac{9 \cdot 10^{-6}}{(1+9) \cdot 10^{-6}} i(t) = 0,9 i(t) \quad (3.54)$$

por lo que se aprecia que la forma de señal no se modifica y sólo varía en amplitud. Reemplazando la Ec. (3.53) en la (3.54),

$$i_2(t) = -9u(t) - 4,5\rho(t) + 4,5\rho(t-2) + 9\rho(t-4) - 9\rho(t-6) + 18u(t-6) - 18u(t-8) - 4,5\delta(t-10) \quad [\text{A}] \quad (3.55)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.55) se muestra en la Fig. 3.64.

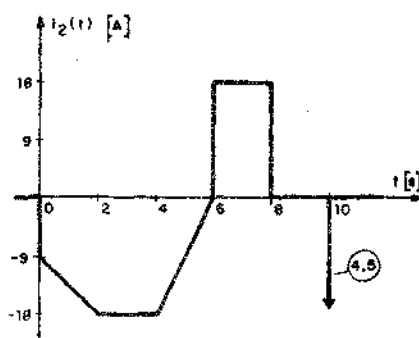


Fig. 3.64

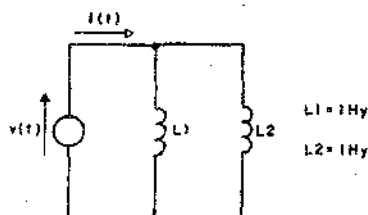


Fig. 3.65

3.13.2) Dado el circuito mostrado en la Fig. 3.65 excitado por una tensión,

$$v(t) = -10u(t) + 5\rho(t) - \frac{30}{4}\rho(t-4) + \frac{10}{4}\rho(t-8) + 10u(t-8) - \\ - 20u(t-10) + 5\rho(t-12) - 5\rho(t-14) \quad [\text{V}]$$

se pide hallar la expresión de $i(t)$ suponiendo condiciones iniciales nulas.

Solución

$i(t)$ podrá hallarse según la Ec. (1.9),

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$$

donde L es la inductancia total de la asociación paralela, que según la Ec. (3.39) resulta:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \therefore \frac{1}{L} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \text{ H}$$

por lo cual,

$$i(t) = 2 \int_0^t [-10u(t) + 5\rho(t) - \frac{30}{4}\rho(t-4) + \frac{10}{4}\rho(t-8) + 10u(t-8) - \\ - 20u(t-10) + 5\rho(t-12) - 5\rho(t-14)] dt$$

desdoblando las integrales y operando,

$$i(t) = -20\rho(t) + 5 \cdot t^2 \cdot u(t) - \frac{30}{4}(t-4)^2 u(t-4) + 2,5(t-8)^2 u(t-8) + \\ + 20\rho(t-8) - 40\rho(t-10) + 5(t-12)^2 \cdot u(t-12) - \\ - 5(t-14)^2 \cdot u(t-14) \quad [\text{A}]$$

3.13.3) Para el circuito ilustrado en la Fig. 3.66, excitado por una tensión,

$$v(t) = u(t) - 2u(t-2) + 0,5\rho(t-2) - 0,5\rho(t-6) - u(t-6) \quad [\text{V}]$$

se desea encontrar la expresión de $v_s(t)$, suponiendo condiciones iniciales nulas.

Solución

$v_s(t)$ puede encontrarse según la Ec. (3.43),

$$v_s(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot v(t) \cdot \frac{1}{1+1} \cdot v(t) = 0,5 v(t)$$

y se observa nuevamente que la forma de señal de salida no ha variado respecto de la de entrada, y resulta:

$$v_s(t) = 0,5 u(t) - u(t-2) + 0,25 p(t-2) - 0,25 p(t-6) - 0,5 u(t-6) \text{ [V]}$$

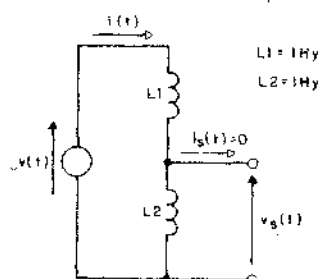


Fig. 3.66

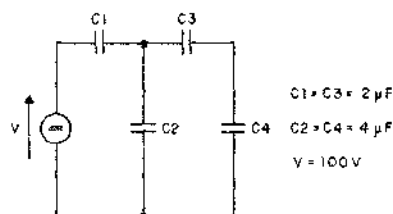


Fig. 3.67

3.13.4) Dado el circuito indicado por la Fig. 3.67 se pide calcular:

- La tensión entre los extremos de cada capacitor.
- La energía almacenada por el capacitor C_3 .

Solución

a) Se dibujará nuevamente el circuito, asignando sentidos de referencia para la tensión en los capacitores, según se muestra en la Fig. 3.68.

Calculando primeramente la capacitancia total de la rama donde se encuentran C_3 y C_4 ,

$$C_{3-4} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6}} = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

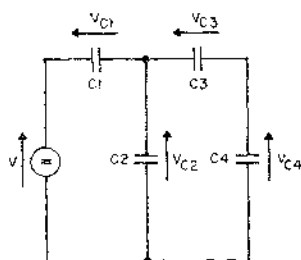


Fig. 3.68

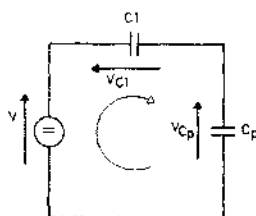


Fig. 3.69

Calculando la capacitancia total del paralelo, se llega al circuito mostrado en la Fig. 3.69,

$$C_p = C_2 + C_3 + 4 = 4 \cdot 10^{-6} + 1,33 \cdot 10^{-6} = 5,33 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

y se está en condiciones de conocer:

$$V_{C_1} = \frac{C_p}{C_1 + C_p} \cdot V = \frac{5,33 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 5,33 \cdot 10^{-6}} \cdot 100 = 72,7 \text{ V}$$

$$V_{C_1} = 72,7 \text{ V}$$

aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 3.69 se podrá determinar

$$V_{C_p} = V_{C_2}$$

$$V - V_{C_1} - V_{C_p} = 0 \therefore V_{C_p} = V - V_{C_1}$$

$$V_{C_p} = 100 - 72,7 = 27,3 \text{ V} \therefore$$

$$V_{C_2} = 27,3 \text{ V}$$

por lo tanto,

$$V_{C_3} = \frac{C_4}{C_3 + C_4} \cdot V_{C_2} = 18,2 \text{ V}$$

$$V_{C_3} = 18,2 \text{ V}$$

V_{C_4} surge por aplicación de la 2ª Regla de Kirchhoff, que asignando un sentido de circulación horario resulta:

$$V_{C_2} - V_{C_3} - V_{C_4} = 0$$

$$V_{C_4} = V_{C_2} - V_{C_3} = 9,1 \text{ V}$$

$$b) W_{C_3} = \frac{1}{2} C_3 \cdot V_{C_3}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (18,2)^2$$

$$W_{C_3} = 331,24 \cdot 10^{-6} \text{ Joule}$$

3.13.5) Para el circuito ilustrado en la Fig. 3.70 calcular el mayor valor de corriente de excitación que puede aplicarse sin dañar a los resistores.

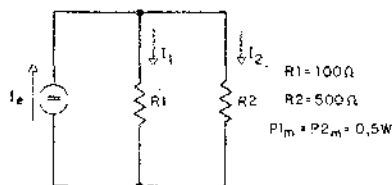


Fig. 3.70

Solución

Dado de $P = R \cdot I^2$, para cada uno de los resistores la corriente máxima resultará:

$$I_{1m} = \sqrt{\frac{P_{1m}}{R_1}} = \sqrt{\frac{0,5 \text{ W}}{100 \Omega}} = 0,0707 \text{ A}$$

$$I_{2m} = \sqrt{\frac{P_{2m}}{R_2}} = \sqrt{\frac{0,5 \text{ W}}{500 \Omega}} = 0,0316 \text{ A}$$

La corriente de excitación máxima para R_1 surge de:

$$I_{1m} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_{em} \quad \therefore$$

$$I_{em} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot I_{1m}$$

$$I_{em} = \frac{100 + 500}{500} \cdot 0,0707 = 0,085 \text{ A}$$

y la corriente de excitación máxima para R_2 se desprende de:

$$I_{2m} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I_{em} \quad \therefore$$

$$I_{em} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot I_{2m}$$

$$I_{em} = \frac{100 + 500}{100} \cdot 0,0316 = 0,189 \text{ A}$$

Es evidente que la mayor corriente de excitación que puede aplicarse la fija el resistor R_1 y resulta:

$$I_{em} = 0,085 \text{ A}$$

3.14 Problemas propuestos

3.14.1) Dado el circuito ilustrado en la Fig. 3.71 excitado por la tensión ilustrada de la Fig. 3.72 se pide:

- Hallar la expresión de la señal de excitación
- Encontrar la expresión de $i(t)$ y representarla gráficamente.

Resultados:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad v(t) = & -10u(t) + 10\rho(t) - 10\rho(t-1) + 10u(t-1) - 10\rho(t-1) + \\ & + 10\rho(t-2) + 10u(t-2) + 10\rho(t-3) - 10\rho(t-4) - 20u(t-4) [\text{V}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad i(t) = 10^{-5} \{ & -10\delta(t) + 10u(t) - 10u(t-1) + 10\delta(t-1) - 10u(t-1) \\
 & + 10u(t-2) + 10\delta(t-2) + 10u(t-3) - 10u(t-4) \\
 & - 20\delta(t-4) \} \quad [A]
 \end{aligned}
 \quad (3.56)$$

La representación gráfica de la Ec. (3.56) se muestra en la Fig. 3.73.

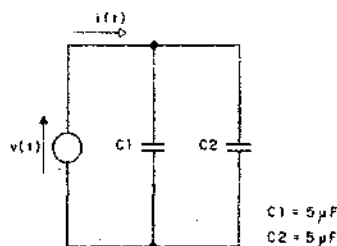


Fig. 3.71

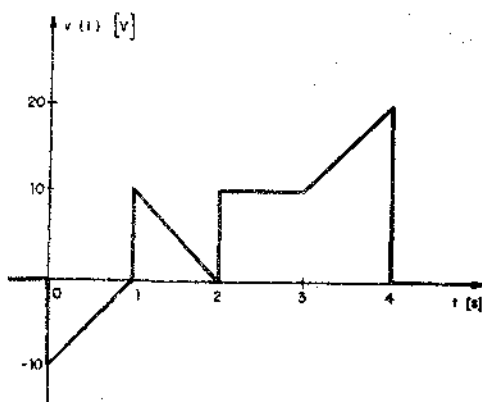


Fig. 3.72

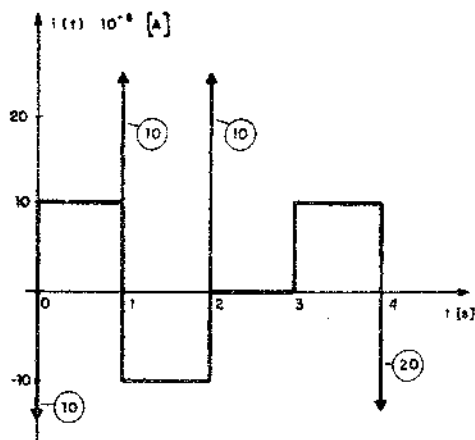


Fig. 3.73

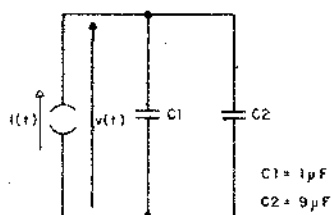


Fig. 3.74

3.14.2) Para el circuito mostrado en la Fig. 3.74 excitado por una corriente,

$$i(t) = -2u(t) + t \cdot u(t) - (t-2)u(t-2) + 2u(t-2) - 2u(t-4)$$

$$-(t-4)u(t-4) + (t-6)u(t-6) + (t-8)u(t-8) - (t-10)u(t-10)$$

[A]

Se desea hallar la expresión de $v(t)$ suponiendo condiciones iniciales nulas.
Resultados:

$$\begin{aligned} v(t) = & 10^5 [-2\rho(t) + 0,5 t^2 u(t) - 0,5 (t-2)^2 u(t-2) + 2\rho(t-2) \\ & - 2\rho(t-4) - 0,5 (t-4)^2 u(t-4) + 0,5 (t-6)^2 u(t-6) \\ & + 0,5 (t-8)^2 u(t-8) - 0,5 (t-10)^2 u(t-10)] \quad [V] \end{aligned}$$

3.14.3) Para el circuito ilustrado en la Fig. 3.75 excitado por una tensión,

$$v(t) = -10u(t) + 10\rho(t) - 10\rho(t-2) - 10u(t-2) - 10u(t-3) + 10u(t-4)$$

[V]

se desea encontrar la expresión de $v_s(t)$, suponiendo condiciones iniciales nulas.
Resultados

$$\begin{aligned} v_s(t) = & -2,5u(t) + 2,5\rho(t) - 2,5\rho(t-2) - 2,5u(t-2) - 2,5u(t-3) \\ & + 2,5u(t-4) \quad [V] \end{aligned}$$

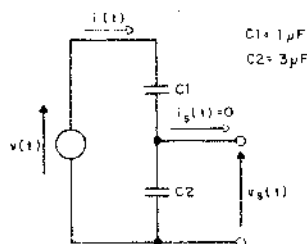


Fig. 3.75

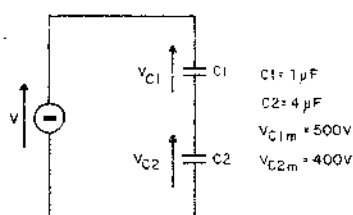


Fig. 3.76

3.14.4) Dado el circuito mostrado en la Fig. 3.76 calcular el mayor valor de tensión que puede aplicarse sin dañar los capacitores.

Resultados:

Del desarrollo surge que la mayor tensión que puede aplicarse la fija el capacitor C_1 y resulta,

$$V_m = 625 V$$

3.14.5) Para el circuito ilustrado en la Fig. 3.77 para condiciones iniciales nulas se pide:

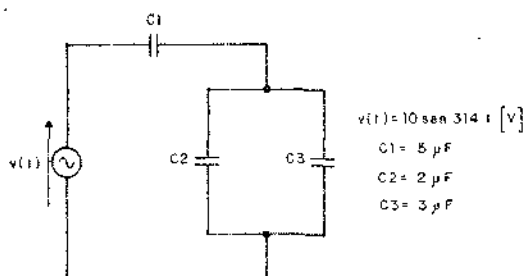


Fig. 3.77

- Calcular la capacidad equivalente.
 - Calcular $i(t)$
 - Representar gráficamente excitación y respuesta.
- Resultados:

- $C_T = 2,5 \mu\text{F} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$
- $i(t) = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 314 \cdot t \text{ [A]}$
- En la Fig. 3.78 a) se grafica la excitación y en la Fig. 3.78 b) la respuesta.

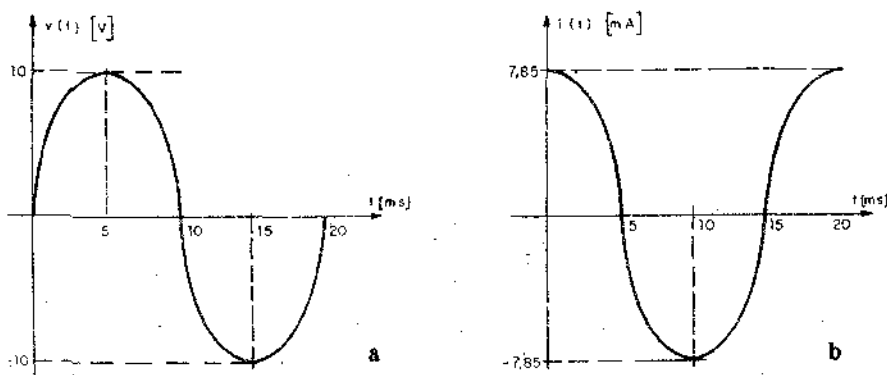


Fig. 3.78

Nótese que la forma de señal no se altera, apareciendo sólo un desfase de $\frac{T}{4}$ o sea $\pi/2$.

Respuesta de circuitos con dos tipos de elementos pasivos

4.1 Introducción

El propósito principal de este capítulo es analizar el comportamiento de circuitos constituidos por dos tipos de elementos pasivos frente a excitaciones escalón, rampa o superposición de ellas.

Se introducirán los conceptos de *constante de tiempo* y *tiempo de establecimiento*, surgiendo también las *curvas universales* a partir de la normalización de las variables.

Desarrollado totalmente en el *dominio del tiempo*, al igual que el capítulo anterior, éste resulta importante pues se analizan circuitos típicos obteniendo conclusiones sobre el comportamiento de los mismos.

Finalmente se estudiarán dos circuitos muy utilizados en la práctica, tales como los *integradores* y *diferenciadores*.

4.2 Limitaciones en las variaciones de la tensión en un capacitor y la corriente en un inductor

El estudio para ambos elementos comienza recordando su comportamiento individual y posteriormente asociado a otro tipo de elemento pasivo.

a) Capacitor

Considerando primeramente un capacitor excitado por un generador de tensión escalón, tal como se muestra en la Fig. 4.1. Siendo la excitación $v(t) = V \cdot u(t)$, la respuesta resulta:

$$i(t) = C \cdot \frac{d v(t)}{dt} = C \cdot V \cdot \delta(t) \quad (4.1)$$

Nótese que la Ec. (4.1) indica la aparición de un impulso de corriente en la respuesta, lo que implica una potencia infinita, dado que si bien $v(t)$ es finita, la corriente adopta una amplitud infinita. Es decir que en este circuito ideal, sin resistencia, para que el capacitor soporte un escalón de tensión debe admitir un impulso de corriente.

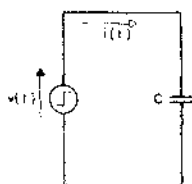


Fig. 4.1

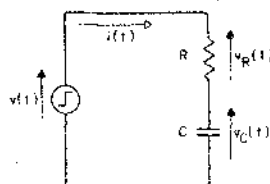


Fig. 4.2

Se verificará ahora si es posible que el capacitor admita una discontinuidad de tensión en un circuito como el ilustrado en la Fig. 4.2. Realizando la demostración *por el absurdo*, es decir, se supondrá que la tensión en el capacitor puede variar en forma discontinua, es decir $v_C(t)$ discontinua.

Aplicando al circuito mencionado la 2ª Regla de Kirchhoff resulta:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (4.2)$$

En la Ec. (4.2) se tiene:

$v(t) = Vu(t)$: finita e impuesta por el generador

$v_C(t)$ = finita pero discontinua

$$v_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4.3)$$

por el supuesto que $v_C(t)$ sea discontinua resulta que en la Ec. (4.3),

$$v_R(t) \rightarrow \infty \quad (4.4)$$

si se cumpliera esto último, no se verificaría la Ec. (4.2); pero como la misma deriva de la 2ª Regla de Kirchhoff, y ésta debe cumplirse, se concluye en que es *falsa* la hipótesis de que $v_C(t)$ sea discontinua. Esto conduce a afirmar: *La tensión en los bornes de un capacitor no puede variar en forma discontinua en circuitos con dos o más elementos pasivos diferentes que actúan en forma conjunta para determinar el comportamiento del circuito.* En consecuencia se puede decir que:

$$v_C(t = 0^-) = v_C(t = 0^+) \quad (4.5)$$

Nótese que en la afirmación anterior se hace referencia a que los dos tipos de elementos pasivos actúan en forma conjunta para determinar el comportamiento del circuito, es decir que interaccionan entre sí. Ello, por ejemplo, no ocurre en el circuito de la Fig. 4.3, donde la tensión en bornes del capacitor podría variar en forma discontinua pues está impuesta por el generador. En cambio, en el circuito de la Fig. 4.2, el resistor incluido y el generador conforman un generador real, que hace que no pueda establecerse el impulso de corriente. Esto es lógico, pues en este caso real no puede admitirse la existencia de una potencia infinita.

b) Inductor

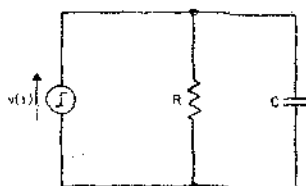


Fig. 4.3

Suponiendo previamente un inductor excitado por un generador de corriente escalón, tal como se ilustra en la Fig. 4.4. Siendo la excitación $i(t) = I \cdot u(t)$ la respuesta resulta:

$$v(t) = L \cdot \frac{d i(t)}{dt} = L \cdot I \cdot \delta(t) \quad (4.6)$$

La Ec. (4.6) indica la aparición de un impulso de tensión en la respuesta. Es decir, que en este circuito ideal, sin resistencia, para que el inductor soporte un escalón de corriente debe admitir un impulso de tensión. Nótese nuevamente la aparición de una potencia infinita.

Se verá ahora si es posible que el inductor admita una discontinuidad de corriente en un circuito como el ilustrado en la Fig. 4.5. Considerando como hipótesis que $i_L(t)$ es discontinua, se demostrará por el absurdo esa posibilidad.

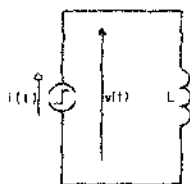


Fig. 4.4

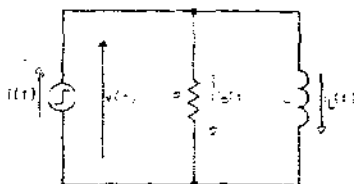


Fig. 4.5

Aplicando la 1ª Regla de Kirchhoff al mencionado circuito se tiene:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) \quad (4.7)$$

En la Ec. (4.7) se tiene:

$i(t) = I u(t)$: finita e impuesta por el generador.

$i_L(t)$: finita pero discontinua.

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{v_L(t)}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{d i_L(t)}{dt} \quad (4.8)$$

Por la suposición de que $i_L(t)$ sea discontinua, en la Ec. (4.8) resulta que:

$$i_R(t) \rightarrow \infty$$

y en consecuencia no se verifica la Ec. (4.7), que como deriva de la 1ª Regla de Kirchhoff debe cumplirse, por lo cual es falsa la hipótesis de que $i_L(t)$ sea discontinua. Esto conduce a afirmar: *la corriente que atraviesa un inductor no puede variar en forma discontinua en circuitos con dos o más elementos pasivos que actúen en forma conjunta para determinar el comportamiento del circuito*. En consecuencia, es posible decir que:

$$i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) \quad (4.9)$$

Obsérvese, que al igual que lo visto para el capacitor, en este caso también los elementos deben actuar en forma conjunta para que se cumpla la afirmación anterior. Ello, por ejemplo, no ocurre en el circuito de la Fig. 4.6, donde la corriente con el inductor puede variar en forma discontinua pues está impuesta por el generador. En cambio, en el circuito de la Fig. 4.5, el resistor incluido y el generador conforman un generador, que hace que no pueda establecerse el impulso de tensión, por la razón ya mencionada.

Las Ecs. (4.5) y (4.9), representan *las condiciones de continuidad* para el capacitor e inductor respectivamente y servirán para calcular las constantes de integración que aparecen al resolver las ecuaciones diferenciales para estos tipos de circuitos y facilitar, así mismo, la elección de la variable independiente, dado que no pueden variar en forma discontinua.

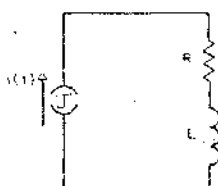


Fig. 4.6

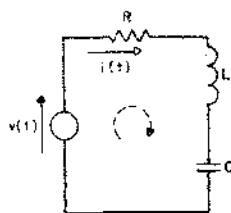


Fig. 4.7

4.3 Régimen transitorio. Componente libre y forzada de la respuesta transitoria.

Se denomina *régimen transitorio* al estado eléctrico que se produce en un modelo circuital idealizado inmediatamente después de la aplicación o desconexión de un generador, o bien de la variación brusca en el valor de un parámetro de algunos de los elementos incluidos.

Con el objeto de individualizar las componentes libre y forzada de la respuesta transitoria, será considerado por ejemplo el circuito ilustrado en la Fig. 4.7. Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff, con un sentido de circulación indicado en línea de trazo, se tiene:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$v(t) = Ri(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt \quad (4.10)$$

si se desea que la Ec. (4.10) quede en función de $v_C(t)$ se procede a reemplazar:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

resultando en consecuencia,

$$v(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + v_C(t)$$

dividiendo ambos miembros por $L \cdot C$ y ordenando,

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{v(t)}{L \cdot C} \quad (4.11)$$

La expresión recientemente encontrada, es la ecuación típica que se presentará en la resolución de circuitos en el dominio temporal. Es una ecuación diferencial, de segundo orden, lineal no homogénea.

Generalizando, la Ec. (4.11) toma el siguiente aspecto:

$$A \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + B \cdot \frac{ds(t)}{dt} + C \cdot s(t) = f(t)$$

Es necesario recordar que el *procedimiento general de resolución* para este tipo de ecuaciones diferenciales es el siguiente:

a) Se hace $f(t) = 0$, y se halla la *solución general de la ecuación diferencial homogénea*, es decir de la ecuación diferencial igualada a cero. La solución así hallada, denominada $s_h(t)$ *dependerá solamente de la configuración circuital*, dado que se la obtuvo resolviendo la ecuación diferencial con la excitación anulada. La solución $s_h(t)$ se conoce como *componente libre* o natural, y el régimen a que da lugar se denomina *régimen libre*.

b) Se halla la *solución particular de la ecuación completa*, denominada $s_p(t)$. Esta solución *determina fundamentalmente la excitación*, y el circuito sólo la puede afectar en amplitud y fase. La solución $s_p(t)$ se conoce como *componente forzada* de la respuesta, y el régimen a que da lugar se denomina *régimen forzado*.

c) La solución de la ecuación diferencial completa se encuentra sumando las soluciones anteriores, es decir:

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \quad (4.12)$$

y $s(t)$ es la respuesta transitoria, el valor que físicamente existe y que se medirá con un instrumento.

d) Finalmente, deberán calcularse las constantes de integración por la aplica-

ción de las condiciones iniciales y las condiciones de continuidad.

Si bien se vio en la Ec. (4.12) que la solución general de la ecuación diferencial completa o sea la respuesta transitoria de un circuito a una dada excitación resulta de la suma de los dos componentes indicados, es de hacer notar que en general la *componente libre se extingue* pasado un cierto tiempo, quedando sólo la *componente forzada*.

Cuando la excitación es constante o periódica de amplitud finita, y la potencia puesta en juego tiende a un límite finito, se denomina *régimen permanente o estacionario* cuando en la respuesta se extingue la componente libre y está formado sólo por la componente forzada.

Esto puede expresarse también diciendo que existe régimen permanente cuando la respuesta tiende a un límite finito, o en caso de ser oscilatoria, tiende a una amplitud constante.

En la Fig. 4.8 se muestra una forma de señal de excitación $e_X(t)$ y otra de respuesta $r(t)$. Obsérvese en este caso que si bien la excitación cumple con la condición de amplitud finita, la potencia puesta en juego no tiende a un límite finito; en consecuencia para este caso existirá *régimen forzado pero no permanente*. Físicamente, sólo existen las corrientes y tensiones transitorias. Su desdoblamiento en las componentes naturales y forzadas es un artificio matemático que facilita el estudio del régimen transitorio en los circuitos *lineales*.

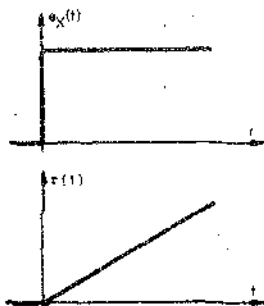


Fig. 4.8

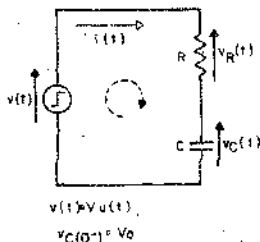


Fig. 4.9

4.4 Excitación de un circuito R.C. serie con un escalón de tensión

En el circuito de la Fig. 4.9 se desean determinar las expresiones para $v_C(t)$, $v_R(t)$ e $i(t)$ y graficarlos. En este ejemplo se resuelve el problema en forma detallada; en los siguientes se lo hará en forma resumida, dado que el procedimiento es el mismo.

En primer lugar es necesario obtener la ecuación de equilibrio instantáneo por la aplicación de las leyes de los circuitos. Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff, con un sentido de circulación que se indica con línea de trazo, resultando:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (4.13)$$

Debiendo expresar ahora la Ec. (4.13) en función de la variable sujeta a condición de continuidad, en este caso $v_C(t)$.

En primer lugar, en la Ec. (4.13) se coloca $v_R(t)$ en función de $i(t)$:

$$v(t) = R \cdot i(t) + v_C(t) \quad (4.14)$$

$$\text{pero como } i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4.15)$$

reemplazando la Ec. (4.15) en la Ec. (4.14) surge,

$$v(t) = R \cdot C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (4.16)$$

La Ec. (4.16) ha quedado así sólo en función de la variable sujeta a condición de continuidad. Por lo tanto se deberá reemplazar la expresión de la excitación $v(t) = V u(t)$, pero como para $t > 0$ resulta que $u(t)$ es constante y vale la unidad, la Ec. (4.16) será:

$$V = R \cdot C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad \text{para } t > 0 \quad (4.17)$$

Resolviendo ahora la ecuación diferencial por separación de variables. Operando con la Ec. (4.17) se tendrá:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{V}{RC}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V}{RC} - \frac{v_C(t)}{RC}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot [V - v_C(t)]$$

$$\frac{dv_C(t)}{V - v_C(t)} = \frac{1}{RC} \cdot dt \quad (4.18)$$

$$\text{pero como } d[V - v_C(t)] = -dv_C(t) \quad (4.19)$$

reemplazando la Ec. (4.19) en la Ec. (4.18) y operando,

$$\frac{d[V - v_C(t)]}{V - v_C(t)} = -\frac{1}{RC} \cdot dt$$

integrando ambos miembros,

$$\ln [V - v_C(t)] = -\frac{1}{RC} t + \ln K \quad (4.20)$$

donde K es la constante de integración. Tomando exponenciales en la Ec. (4.20)

$$e^{\ln [V - v_C(t)]} = e^{-\frac{t}{RC} + \ln K} \quad \therefore$$

$$V - v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_C(t) = V - K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.21)$$

Resuelta la ecuación diferencial, se deberá calcular la constante de integración por aplicación de las condiciones iniciales a las variables sujetas a continuidad, en este caso $v_C(t)$.

Por las condiciones de continuidad, se sabe que la tensión en un capacitor no puede variar en forma discontinua, es decir:

$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$$

y por condiciones iniciales,

$$v_C(0^-) = V_0$$

por lo tanto, en la Ec. (4.21) se realiza $t = 0$ y reemplazando $v_C(0) = V_0$, resulta:

$$V_0 = V - K \cdot e^{-\frac{0}{RC}} \quad \therefore$$

$$K = V - V_0 \quad (4.22)$$

hallada así la expresión de la constante de integración se reemplaza en la Ec. (4.21) la Ec. (4.22) y surge que:

$$v_C(t) = V - [(V - V_0) e^{-\frac{t}{RC}}] \quad (4.23)$$

Como la Ec. (4.23) provee la solución de la ecuación diferencial completa, que estará compuesta de la componente libre y la forzada. La componente forzada puede obtenerse fácilmente tomando el límite para $t \rightarrow \infty$ en la Ec. (4.23), resultando:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_C(t) = V$$

si evidentemente V es la componente forzada, de la Ec. (4.23) se desprende que la componente libre es:

$$= [(V - V_0) e^{-\frac{t}{RC}}]$$

Hallada entonces la expresión de $v_C(t)$, se puede encontrar la de $v_R(t)$ a partir de la Ec. (4.13), a saber:

$$v_R(t) = v(t) - v_C(t) \quad (4.24)$$

como $v(t) = V \cdot u(t)$ pero para $t > 0$ es $v(t) = V$, reemplazando esta última y la Ec. (4.23) en la Ec. (4.24) resulta:

$$v_R(t) = V - [V - (V - V_0) e^{-\frac{t}{RC}}] \quad \therefore$$

$$v_R(t) = (V - V_0) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.25)$$

La corriente puede hallarse como:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} \quad \therefore$$

$$i(t) = \frac{(V - V_0)}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.26)$$

Las Ecs. (4.23), (4.25) y (4.26) son las expresiones que se busca determinar. Recuerdese que las mismas son válidas para $t > 0$, por la simplificación realizada en la Ec. (4.17), es decir la eliminación de $u(t)$. Esto indica también que la respuesta será nula para $t < 0$.

En la Fig. 4.10 se representan la excitación, y las Ecs. (4.23), (4.25) y (4.26).

Si ahora se suponen *condiciones iniciales nulas*, es decir $v_C(0^-) = 0$ las Ecs. (4.23), (4.25) y (4.26) se reducen a:

$$v_C(t) = V (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.27)$$

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.28)$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.29)$$

Las ecuaciones anteriores, son también válidas para $t > 0$. En la Fig. 4.11 se representa la excitación y las Ecs. (4.27) y (4.28).

Realizando ahora un *análisis conceptual* de los resultados para *condiciones iniciales nulas*. Del gráfico de la Fig. 4.11 y de las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.29), se ob-

servan que las variables eléctricas no adoptan su valor final en forma instantánea, sino que lo hacen en forma gradual y para un tiempo infinito se llegará el régimen permanente.

Suponiendo que el capacitor está descargado, y éste en el instante inicial se comporta como un cortocircuito, toda la tensión del generador quedará aplicada sobre el resistor, que de este modo absorbe la discontinuidad. A medida que el capacitor se va cargando aumenta la tensión en el mismo, y la tensión en el resistor se reduce en la misma proporción en que la del capacitor aumenta.

Recuérdese, por otra parte, que debe cumplirse la 2ª Regla de Kirchhoff. Respecto de la corriente, al suponer que el capacitor está descargado, en el instante inicial la misma se ve limitada solamente por el resistor, confirmandose así la hipótesis de que absorbe la discontinuidad. A medida que el capacitor se va cargando, la corriente disminuirá en forma proporcional, anulándose cuando el capacitor alcanza el valor de tensión del generador.

4.5 Normalización de la tensión, la corriente y el tiempo

Si en el circuito estudiado anteriormente, que se muestra en la Fig. 4.9 son modificados los valores de R o C , es evidente que se alterará la velocidad con que el circuito tiende a su régimen permanente, puesto que cada producto $R.C$ caracteriza una exponencial distinta en cada una de las fórmulas encontradas para el circuito mencionado.

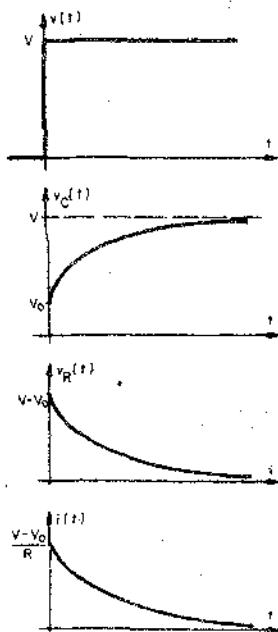


Fig. 4.10

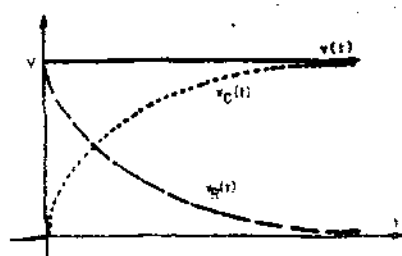


Fig. 4.11

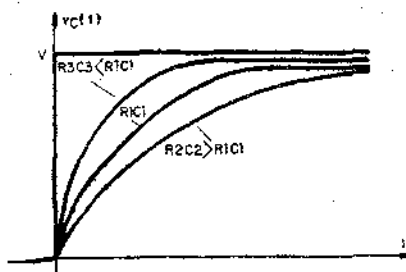


Fig. 4.12

Consecuentemente no se podrán comparar características de circuitos con distintos valores de R.C., dado que podrán tenerse infinitas velocidades para alcanzar el régimen permanente, una para cada producto R.C., tal como puede apreciarse en el gráfico de la Fig. 4.12, por ejemplo para la tensión sobre el capacitor.

Sería muy útil, y tal como se verificará al final de este parágrafo con una aplicación práctica, lograr una curva universal que contenga toda la información de las infinitas posibilidades mencionadas.

Considerando previamente, a modo de aclaración, como puede lograrse reducir infinitas curvas a una sola. Sea por ejemplo la expresión:

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{B.C.}}$$

que para un dado producto B.C., dando valores a t se obtiene la representación mostrada en la Fig. 4.13. Es evidente, que para infinitos valores del producto B.C. se obtendrán infinitas curvas. Pero si ahora en lugar de representar en función de tiempo, se grafica en función de una variable

$$x = \frac{t}{B.C.}$$

y además se divide $s(t)$ por A a efectos de independizarse de la amplitud se tiene que:

$$s(x) = e^{-x}$$

que para cada valor de x se obtiene un punto; y para distintos valores de la mencionada variable se obtendrá una sola curva, tal como se ilustra en la Fig. 4.14.

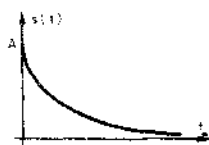


Fig. 4.13

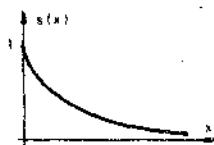


Fig. 4.14

A la luz de todo esto se hace evidente que resulta sencillo y conveniente *normalizar* las ecuaciones que se encuentran al estudiar el circuito R.C. anterior, y que son indicadas a continuación:

$$v_C(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (4.27)$$

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.28)$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.29)$$

Normalizar una variable, entonces, equivale a dividir la misma por un valor de la misma especie, o sea de igual unidad, de modo que la ecuación resultante sea adimensional y permita eliminar de la misma los parámetros circuitales que son los que pueden variar para los distintos casos.

Normalizando la ecuación, en lugar de infinitas curvas se tendrá una sola que contiene la misma información que las anteriores.

Con el objeto de normalizar las tensiones pueden dividirse las Ecs. (4.27) y (4.28) por V . Para normalizar la corriente, deberá dividirse la Ec. (4.29) por $\frac{V}{R}$.

Dado que el producto $R.C$. se mide en segundos, a saber:

$$[R][C] = \left[\frac{\text{volt}}{\text{ampere}} \right] \left[\frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} \right] = \left[\frac{\text{coulomb}}{\text{ampere}} \right] = \left[\frac{\text{ampere} \cdot \text{s}}{\text{ampere}} \right] = [s]$$

será conveniente normalizar el tiempo, llamado tn , dividiendo a la variable tiempo por el producto $R.C.$, es decir:

$$tn = \frac{t}{R.C.}$$

En consecuencia, aplicando los conceptos recientemente expuestos, pueden normalizarse las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.29), obteniéndose las tensiones y corrientes normalizadas, en función del tiempo normalizado, resultando:

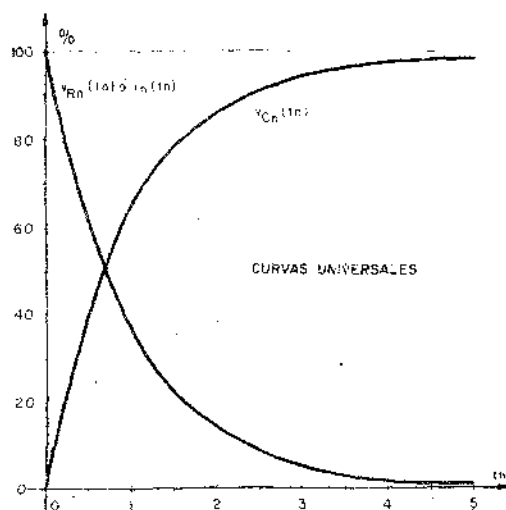


Fig. 4.15

$$v_{Cn}(tn) = 1 - e^{-tn} \quad (4.30)$$

$$v_{Rn}(tn) = e^{-tn} \quad (4.31)$$

$$i_n(tn) = e^{-tn} \quad (4.32)$$

Recuérdese que las ecuaciones anteriores son válidas para $tn > 0$. La representación gráfica de las mismas, que da lugar a la llamada *curva universal*, se ilustra en la Fig. 4.15. En el eje horizontal se llevan las unidades de tn y en el vertical las amplitudes, en porcentaje, donde 1 equivale a 100 %.

Nótese que disponiendo de esta curva universal, podrá determinarse, para cualquier circuito R.C. alimentado por una tensión escalón, el valor de las tensiones y corrientes para cualquier instante. Será descrito el proceso mediante un ejemplo:

Ejemplo de utilización de la curva universal.

Para el circuito dado en la Fig. 4.16 se pide determinar el valor de tensión en el capacitor y de corriente en el circuito a los 200 ms de cerrado el interruptor.

Solución:

En primer lugar se calcula el producto R.C.

$$R \cdot C = 10^5 \cdot 10^{-6} = 0,1 \text{ s}$$

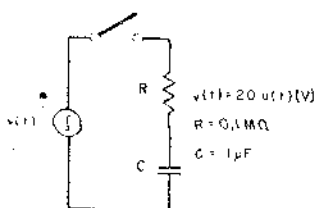


Fig. 4.16

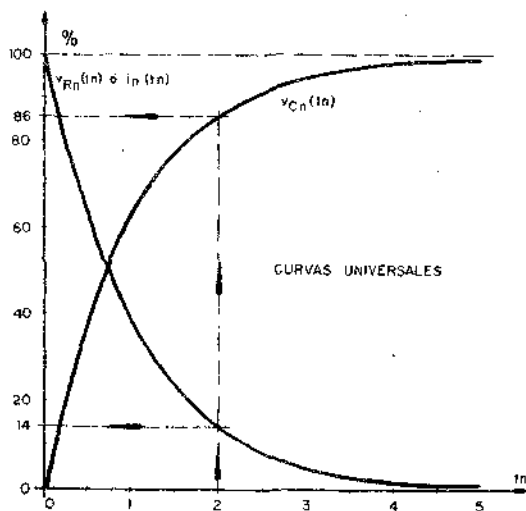


Fig. 4.17

Normalizando luego el tiempo para el cual se desea conocer el estado de las variables.

$$t_n = \frac{t}{R \cdot C} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

Con este valor de t_n se entra en la curva universal, reproducida en la Fig. 4.17 y se determinan:

$$v_{Cn(2)} = 86 \% = 0,86$$

$$i_{n(2)} = 14 \% = 0,14$$

con los datos se puede desnormalizar y calcular,

$$v_{C(0,20)} = v_{Cn(2)} \cdot V = 0,86 \cdot 20 = 17,2 \text{ V}$$

$$i_{(0,20)} = i_{n(2)} \cdot \frac{V}{R} = 0,14 \cdot \frac{20}{10^5} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

4.6 Constante de tiempo. Significados circuital y geométrico.

a) Producto R.C.

Para el circuito R.C. mostrado en la Fig. 4.9, con condiciones iniciales nulas, se encuentran las Ecs. (4.27), (4.28) y (4.29) que describirían el comportamiento del mismo, y son reproducidas a continuación:

$$v_C(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (4.27)$$

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.28)$$

$$i(t) = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.29)$$

De la observación de los mismos, se deduce que el crecimiento de $v_C(t)$, o el decrecimiento de $v_R(t)$ e $i(t)$ está determinado por $e^{-\frac{t}{RC}}$; y es obvio que depende fuertemente del producto R.C.

Como se vio en el párrafo anterior el producto R.C. tiene dimensiones de tiempo, y es constante para un circuito dado, y es por ello que se le ha asignado el nombre de *constante de tiempo*. Para el mencionado circuito resulta,

$$\tau_c = R \cdot C$$

b) Propiedades circuitales

Del análisis anterior, se desprende que τ_c , *cualitativamente* da idea de la mayor o menor velocidad con que se extingue la componente libre, es decir, de la velocidad con que las variables eléctricas tienden a sus valores finales.

Su significado *cuantitativo* puede deducirse a partir de la graficación de algunas de las ecuaciones indicadas anteriormente, por ejemplo la Ec. (4.27) que se muestra

en la Fig. 4.18. Si en la Ec. (4.27) se hace $t = R.C.$, resulta:

$$\begin{aligned} v_C(\tau_c) &= V(1 - e^{-1}) = V(1 - 0,368) \quad \therefore \\ v_C(\tau_c) &= 0,632 \cdot V \end{aligned} \quad (4.33)$$

Realizando el mismo procedimiento para la Ec. (4.28) resulta:

$$\begin{aligned} v_R(\tau_c) &= V \cdot e^{-1} \quad \therefore \\ v_R(\tau_c) &= 0,368 \cdot V \end{aligned} \quad (4.34)$$

Las propiedades indicadas en las Ecs. (4.33) y (4.34) se ilustran en las Figs. 4.18 y 4.19 respectivamente:

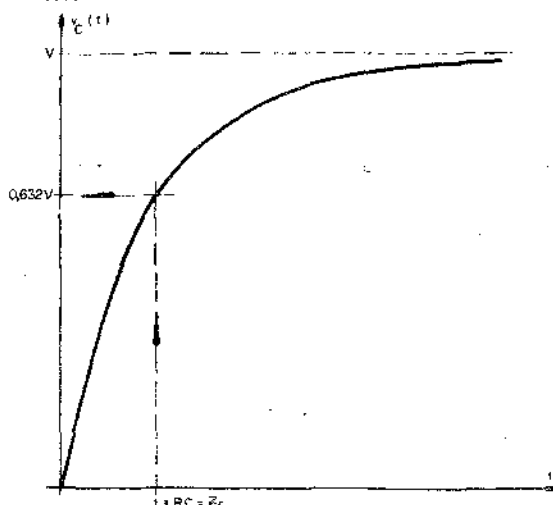


Fig. 4.18

La Ec. (4.29) no se analizará por diferir de la Ec. (4.28) sólo por una constante. Se observa entonces que, *cuantitativamente*, τ_c caracteriza al tiempo que debe transcurrir para que sobre los elementos pasivos se alcance un determinado porcentaje de tensión.

c) Propiedades geométricas

Las mismas se derivan del análisis de alguna de las ecuaciones para $v_C(t)$, $v_R(t)$ o $i(t)$.

Considerando en primer lugar la Ec. (4.27) normalizada, por comodidad, según lo indica la Ec. (4.30) se reproduce,

$$v_{Cn}(tn) = 1 - e^{-tn} \quad (4.30)$$

si en la Ec. (4.30) se le otorga valor a tn se tendrá:

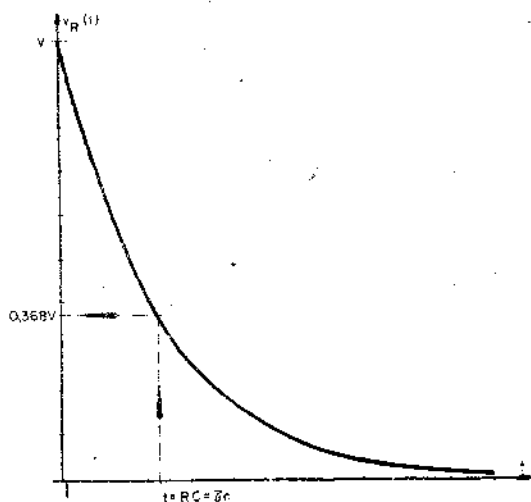


Fig. 4.19

$$v_{Cn(1)} = 1 - e^{-1} = 1 - 0,368 = 0,632$$

$$v_{Cn(2)} = 1 - e^{-2} = 1 - 0,368 \cdot 0,368 = 0,865$$

$$v_{Cn(3)} = 1 - e^{-3} = 1 - 0,368 \cdot 0,368 \cdot 0,368 = 0,950$$

particularidades que se grafican en la Fig. 4.20. Realizando un procedimiento similar en la Ec. (4.31) se tiene:

$$v_{Rn(m)} = e^{-tm} \quad (4.31)$$

$$v_{Rn(1)} = e^{-1} = 0,368$$

$$v_{Rn(2)} = e^{-2} = 0,368 \cdot 0,368 = 0,135$$

$$v_{Rn(3)} = e^{-3} = 0,368 \cdot 0,368 \cdot 0,368 = 0,050$$

particularidades que se grafican en la Fig. 4.21.

Del análisis anterior y de la observación de los gráficos se deduce la *primera propiedad geométrica*: a incrementos iguales de tiempo corresponde la misma variación porcentual de tensión.

Otra propiedad geométrica se desprende al construir la tabla ilustrada en la Fig. 4.22, donde para distintos valores de m se calculan los de $v_{Rn(m)}$, $v_{Cn(m)}$ y el error porcentual que se comete al suponer que el transitorio se ha extinguido para los correspondientes valores de tm .

Del análisis del cuadro, surge que si $tm = 5$, o sea que $t = 5\tau_c = 5 R.C.$; se comete un error menor que el 1 % al considerar que las variables eléctricas han alcanzado sus valores finales, lo que se conoce como *segunda propiedad geométrica*.

Nótese que el error mencionado es corrientemente admitido para los fines generales de la ingeniería.

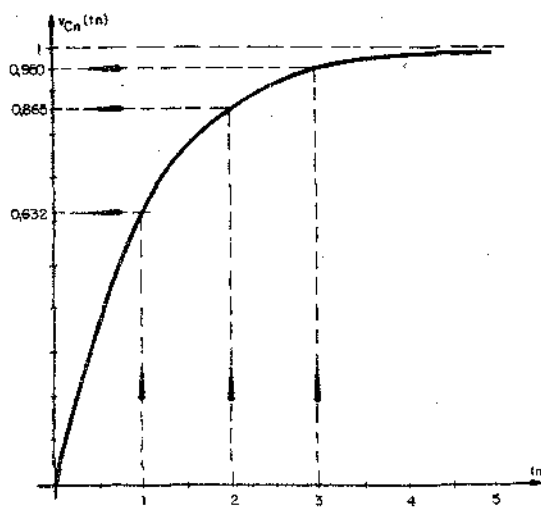


Fig. 4.20

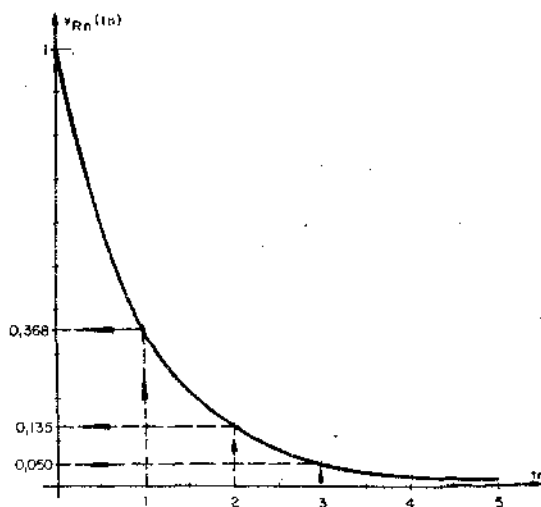


Fig. 4.21

4.7 Formas de calcular la constante de tiempo gráficamente

Un *primer método* parte del conocimiento, logrado por un registrador u osciloscopio, de la representación gráfica de alguna de las variables en cuestión.

En la Fig. 4.23 se ejemplifica para la tensión sobre el resistor. τ_c puede determinarse tomando 0,368 de la tensión máxima, y medir en la escala calibrada del instrumento, el intervalo de tiempo necesario para que $v_R(t)$ pase de su valor máxi-

t_n	e^{-t_n}	$1 - e^{-t_n}$	e %
0	1	0	—
1	0,368	0,632	37
2	0,135	0,865	15
3	0,050	0,950	5
4	0,018	0,982	2
5	0,007	0,993	0,7

Fig. 4.22

mo a 0,368 del mismo. Este intervalo es, por definición, la constante de tiempo del circuito. Procedimiento similar se aplica para $v_c(t)$, salvo que en este caso, se medirá el intervalo de tiempo necesario para pasar de cero a 0,632 de su valor máximo.

Este método es rápido, pero introduce error, pues generalmente el punto de intersección de la recta horizontal y la exponencial no está exactamente definido.

Un *segundo método* consiste en tomar por ejemplo, la expresión de $v_R(t)$ y efectuar las siguientes transformaciones:

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.28)$$

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

tomando logaritmos:

$$\ln v_R(t) = \ln V + \ln e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

$$\ln v_R(t) = \ln V - \frac{t}{\tau_c} \quad (4.35)$$

En la Ec. (4.35) para $t = 0$ resulta que $\ln v_R(t) = \ln V$. Otros puntos para la representación pueden obtenerse disponiendo de algunos valores de tensión en el resistor para determinado tiempo.

Obviamente, si se representa la Ec. (4.35) en escala semilogarítmica será una recta; por lo cual en principio se necesitaría un solo valor de $v_R(t)$ para trazarla. Como esto puede producir error considerable es conveniente disponer de varios, y en rigor, se debería trazar aplicando el método de los cuadrados mínimos.

De esta manera se puede representar gráficamente la Ec. (4.35), tal como se ilustra en la Fig. 4.24. La pendiente de dicha recta es $-\frac{1}{\tau_c}$, por lo cual la constante de tiempo podrá determinarse a partir de:

$$-\frac{1}{\tau_c} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Escala } \ln v_R(t)}{\text{Escala } t}$$

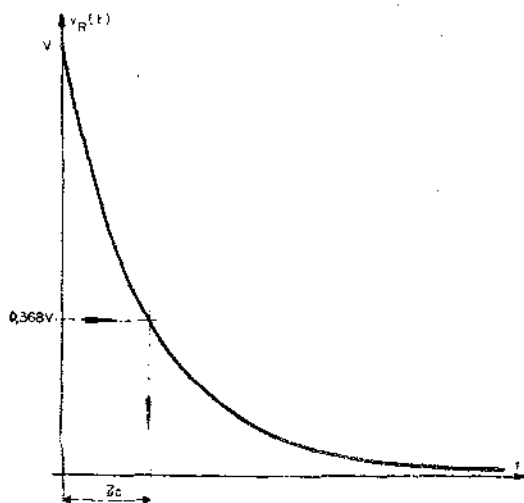


Fig. 4.23

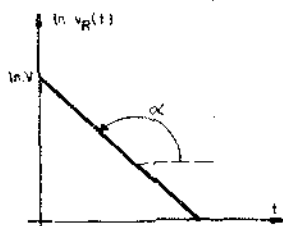


Fig. 4.24

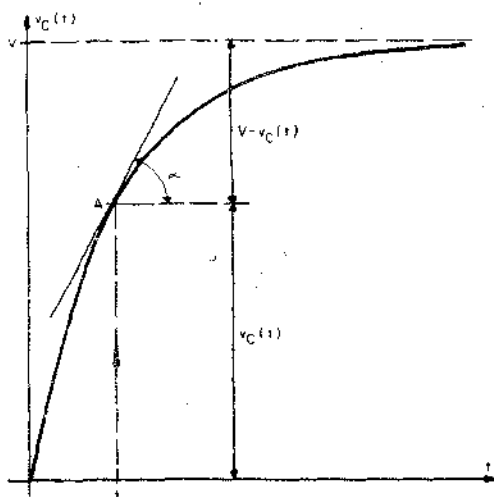


Fig. 4.25

Un *tercer método* para la determinación de τ_c , puede derivarse a partir del conocimiento de la representación gráfica de algunas de las variables, por ejemplo de $v_C(t)$, y realizando las siguientes transformaciones. A partir de la Ec. (4.18), encontrada en el párrafo 4.4, que se reproduce:

$$\frac{dv_C(t)}{V - v_C(t)} = \frac{1}{RC} dt \quad (4.18)$$

como $RC = \tau_c$ resulta:

$$\tau_c = \frac{V - v_C(t)}{\frac{dv_C(t)}{dt}} \quad (4.36)$$

Con la Ec. (4.36) podrá determinarse τ_c tal como se muestra en la Fig. 4.25.

Para un instante cualquiera t se determina un punto A sobre la curva conocida. Para ese punto puede medirse el valor correspondiente a $V - v_C(t)$, y trazando la tangente a la curva en el punto A , podrá calcularse $\frac{dv_C(t)}{dt}$ para ese punto a partir de:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\text{Escala } v_C(t)}{\text{Escala } t}$$

Obsérvese que en esta forma de determinar τ_c también se comete error, en el trazado de la tangente a la curva que no se puede realizar en forma precisa.

4.8 Trazado asintótico de las curvas de respuesta

Seguidamente se describirá un método para el trazado de las curvas de respuesta en forma aproximada, y se realizará para $v_C(t)$ y $v_R(t)$ pero no para $i(t)$, pues como ya se mencionó anteriormente difiere de $v_R(t)$ por sólo una constante.

Para el caso de $v_C(t)$ se recuerda su expresión dada por la Ec. (4.27),

$$v_C(t) = V (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.27)$$

que puede escribirse como:

$$v_C(t) = V - V \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (4.37)$$

A partir de la Ec. (4.37) es posible encontrar en forma inmediata asíntotas y puntos para su trazado,

$$v_C(0) = 0 \quad (4.38)$$

$$v_C(t \rightarrow \infty) \rightarrow V \quad (4.39)$$

y la pendiente de la tangente a la curva en el origen se halla derivando la Ec. (4.37), y haciendo luego $t = 0$, a saber:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V}{\tau_c} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

$$\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V}{\tau_c} \quad (4.40)$$

Además, por el análisis efectuado en el párrafo 4.6 se sabe que:

$$v_C(\tau_c) = 0.632 V \quad (4.41)$$

Con los datos proporcionados por las Ecs. (4.38), (4.39), (4.40) y (4.41) puede trazarse la curva de $v_C(t)$ tal como se ilustra en la Fig. 4.26.

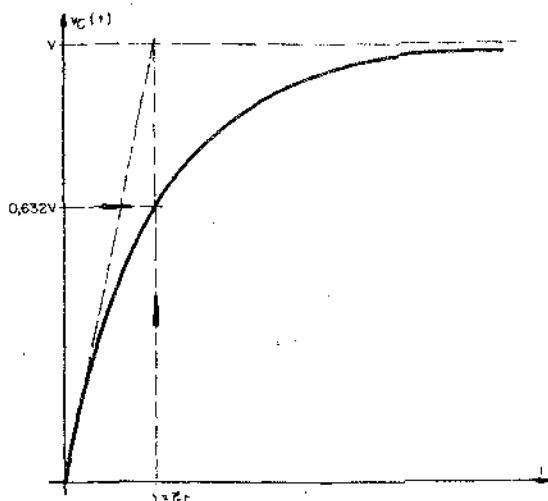


Fig. 4.26

Para el caso de $v_R(t)$ se recuerda su expresión dada por la Ec. (4.28),

$$v_R(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (4.28)$$

A partir de la Ec. (4.28) se pueden hallar inmediatamente asíntotas y puntos para su trazado.

$$v_R(0) = V \quad (4.42)$$

$$v_R(\rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (4.43)$$

y la pendiente de la tangente a la curva en el origen se encuentra derivando la Ec. (4.28) y haciendo luego $t = 0$ a saber:

$$\frac{dv_R(t)}{dt} = -\frac{V}{\tau_c} e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

$$\left. \frac{dv_R(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V}{\tau_c} \quad (4.44)$$

Además, por el análisis realizado en el párrafo 4.6, se conoce que:

$$v_R(\tau_c) = 0,368 V \quad (4.45)$$

Con los datos proporcionados por las Ecs. (4.42), (4.43), (4.44) y (4.45) puede trazarse la curva de $v_R(t)$ tal como se ilustra en la Fig. 4.27.

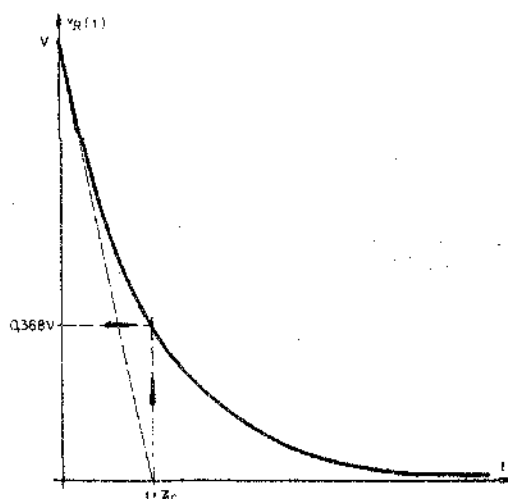


Fig. 4.27

A partir de las propiedades encontradas en el párrafo 4.6 y teniendo en cuenta el cuadro de la Fig. 4.22 podrá aplicarse en forma sucesiva el procedimiento anteriormente descrito y trazar la curva de respuesta en forma más precisa. Este procedimiento, se encuentra descrito gráficamente para $v_C(t)$ y $v_R(t)$ en las Figs. 4.28 y 4.29 respectivamente.

4.9 Tiempo de establecimiento o de elevación

De los párrafos anteriores se desprende que resulta útil conocer la velocidad con que las variables eléctricas se acercan a sus valores finales.

Los métodos descritos en el párrafo 4.7 para la determinación experimental de la constante de tiempo, aun disponiendo de la curva de respuesta, resultan en general, laboriosos e imprecisos. Además, los puntos en que la señal parte del nivel de cero al nivel de 100 %, son de difícil definición, y es por todo ello que se ha definido a otro parámetro práctico para reemplazar a la constante de tiempo, y

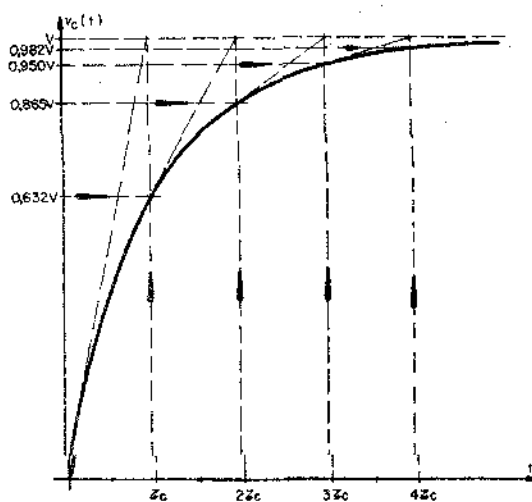


Fig. 4.28

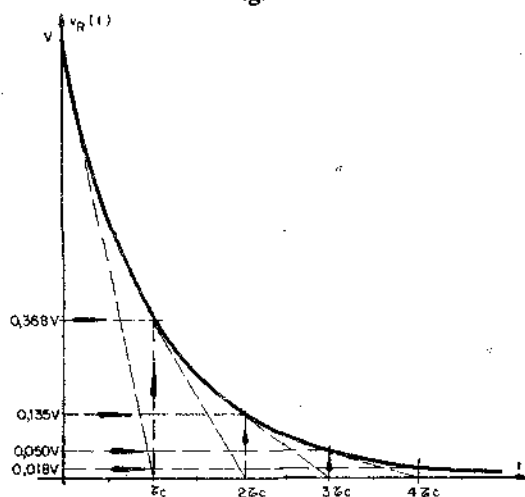


Fig. 4.29

que se denomina tiempo de establecimiento T_e .

Por definición, el tiempo de establecimiento es el tiempo que debe transcurrir para que la señal pase del 10 % al 90 % de su valor final. En la Fig. 4.30 se ejemplifica para el caso de la tensión sobre el capacitor en un gráfico normalizado. Es decir que T_e *cuantitativamente* caracteriza el tiempo necesario para que la señal pase por los mencionados porcentajes. *Cualitativamente* T_e tiene la misma finalidad que z_c , caracterizar la rapidez con que la señal tiende a sus valores finales. Como es dable esperar debe existir una relación entre ellos, y la misma puede encontrarse,

por ejemplo, partiendo de la Ec. (4.30) que se reproduce:

$$v_{cn}(tn) = 1 - e^{-tn} \quad (4.30)$$

$$e^{-tn} = 1 - v_{cn}(tn) \quad \text{tomando logaritmos}$$

$$\ln e^{-tn} = \ln [1 - v_{cn}(tn)] \quad \therefore \quad tn = -\ln [1 - v_{cn}(tn)]$$

$$tn(10\%) = tn(0,1) = -\ln(1 - 0,1) = -\ln 0,9$$

$$tn(90\%) = tn(0,9) = -\ln(1 - 0,9) = -\ln 0,1$$

Por lo que el tiempo de establecimiento normalizado resulta:

$$Ten = tn(90\%) - tn(10\%) = -\ln 0,1 + \ln 0,9 \quad \therefore$$

$$Ten = \ln \frac{0,9}{0,1} = \ln 9 = 2,1972 \cong 2,2$$

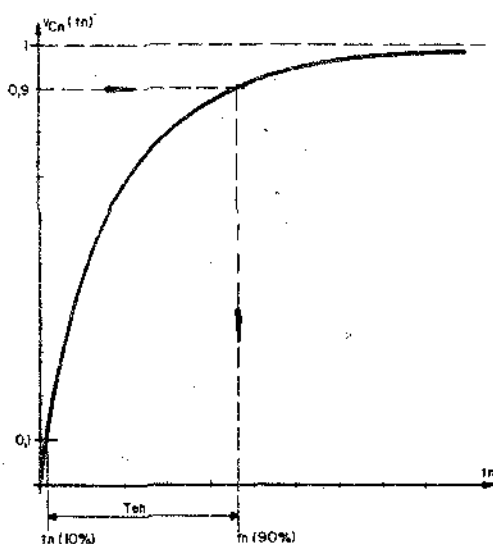


Fig. 4.30

y el tiempo de establecimiento resulta:

$$T_e = Ten RC \quad \text{o lo que es lo mismo,}$$

$$T_e = 2,2 \tau_c \quad (4.46)$$

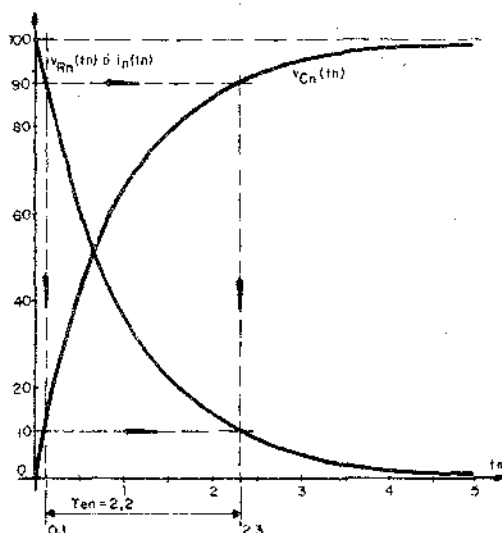


Fig. 4.31

La relación existente entre el tiempo de establecimiento y la constante de tiempo mostrada en la Ec. (4.46) puede visualizarse en forma rápida a partir de las curvas normalizadas mostradas en la Fig. 4.31. Tal como se indica en dicha figura, se determina el tiempo normalizado necesario para que la señal pase del 10 % al 90 % de su valor final, y ese tiempo resulta el de establecimiento normalizado T_{en} .

Su valor numérico resulta:

$$T_{en} = 2,2 \quad \therefore$$

$$T_e = 2,2 \tau_c \quad (4.47)$$

que obviamente coincide con la Ec. (4.46).

4.10 Desactivación de una rama R.C. serie

Considerando el circuito de la Fig. 4.32, en el mismo para el tiempo $t = 0^+$ se baja la llave. Se supone que ha transcurrido un tiempo $t \gg 5 \tau_c$ del proceso de activación; en consecuencia el capacitor se encuentra cargado al valor de tensión del generador, por lo cual la condición inicial resulta:

$$v_c(0^-) = V \quad (4.48)$$

Luego de bajar la llave, es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff, con un sentido de circulación que se indica con línea de trazo, resultando:

$$v_R(t) + v_C(t) = 0 \quad (4.49)$$

$$R i(t) + v_C(t) = 0$$

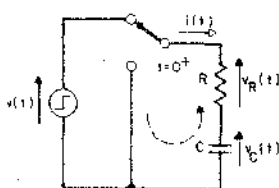


Fig. 4.32

tomando $v_C(t)$ como variable, pues está sujeta a condición de continuidad,

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad \text{operando,}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v_C(t) \quad \therefore$$

$$\frac{dv_C(t)}{v_C(t)} = -\frac{1}{RC} dt \quad \text{integrando,}$$

$$\ln v_C(t) = -\frac{1}{RC} t + \ln K \quad \therefore$$

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.50)$$

La constante de integración se determina en base a las condiciones de continuidad,

$$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$$

y por la condición inicial dada por la Ec. (4.48). Por lo tanto, en la Ec. (4.50) se hace $t = 0$ y se reemplaza $v_C(0) = V$, teniendo:

$$V = K e^0 \quad \therefore$$

$$K = V \quad (4.51)$$

Reemplazando la Ec. (4.51) en la Ec. (4.50),

$$v_C(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.52)$$

De acuerdo a la Ec (4.49) resulta:

$$v_R(t) = -v_C(t) \quad \text{por lo cual,}$$

$$v_R(t) = -V e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.53)$$

y la corriente resulta:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} \quad \text{en consecuencia,}$$

$$i(t) = -\frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.54)$$

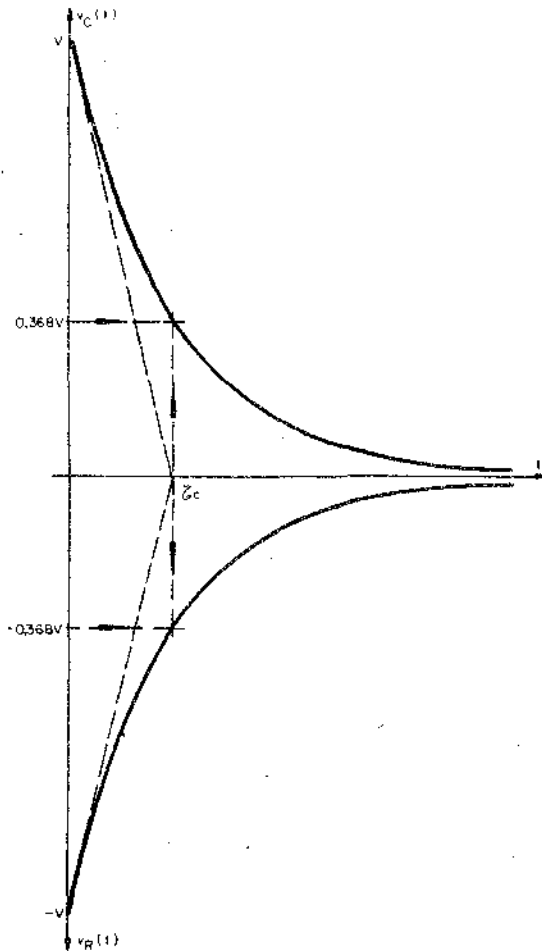


Fig. 4.33

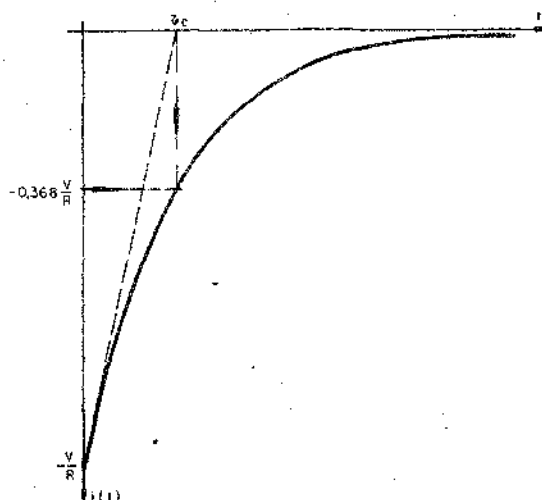


Fig. 4.34

Las Ecs. (4.52) y (4.53) se encuentran graficadas en la Fig. 4.33 y la Ec. (4.54) en la Fig. 4.34.

Nótese que en la resolución de este circuito no se modificaron los sentidos de referencia del proceso de carga, por lo cual al estudiar la descarga aparecen signos negativos para $v_R(t)$ e $i(t)$ y que deben interpretarse como que sus sentidos son opuestos a los sentidos de referencia de carga de dicho circuito, y que en su oportunidad fueron considerados positivos.

Por otra parte, si bien la corriente cambia su sentido de circulación y $v_R(t)$ su polaridad, nótese que $v_C(t)$ tiene siempre la misma polaridad, ya sea en el proceso de carga o descarga del capacitor.

Así, al descargarse el capacitor, el mismo devuelve al circuito la energía almacenada durante el proceso de carga.

Debe tenerse en cuenta además, que al igual que en el proceso de carga tienen vigencia los criterios de normalización de ecuaciones y curvas ya estudiadas.

4.11 Análisis energético de la carga y descarga de un capacitor a través de un resistor

El análisis se realizará teniendo en cuenta el circuito R.C. serie, mostrado en la Fig. 4.32, y utilizando los resultados encontrados en los párrafos 4.4 y 4.10

La energía podrá calcularse a partir de:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

$$W(t) = \int_0^t p(t) dt = \int_0^t v(t) i(t) dt \quad (4.55)$$

y en la Ec. (4.55) según se quiera analizar el proceso de carga o descarga deberán reemplazarse las expresiones de $v(t)$ e $i(t)$ que correspondan.

4.11.1) Proceso de carga

Para condiciones iniciales nulas se encontraron las expresiones que a continuación se reiteran:

$$v_C(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.27)$$

$$v_R(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.28)$$

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.29)$$

y que serán empleadas para el cálculo de las energías.

a) Energía almacenada por el capacitor

Adaptando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_C(t) = \int_0^t v_C(t) i(t) dt \quad (4.56)$$

Reemplazando en la Ec. (4.56) las Ecs. (4.27) y (4.29) surge que:

$$W_C(t) = \int_0^t V(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C V^2 + \frac{1}{2} C V^2 e^{-\frac{2t}{RC}} - C V^2 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.57)$$

Para conocer el valor final del cual tiende la energía almacenada por el capaci-

tor, en la Ec. (4.57) se necesita tender al límite para $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_C(t) = \frac{1}{2} C V^2 \quad (4.58)$$

b) *Energía disipada en el resistor*

Adoptando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_R(t) = \int_0^t v_R(t) i(t) dt \quad (4.59)$$

Reemplazando en la Ec. (4.59) las Ecs. (4.28) y (4.29) surge que:

$$W_R(t) = \int_0^t V e^{-\frac{t}{RC}} \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_R(t) = \frac{1}{2} C V^2 - \frac{1}{2} C V^2 e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (4.60)$$

Para conocer la energía total disipada en el resistor en al Ec. (4.60) se debe tender al límite para $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_R(t) = \frac{1}{2} C V^2 \quad (4.61)$$

De la última expresión se deduce que la energía disipada en el resistor es independiente del valor del mismo. Además de la comparación de las Ecs. (4.58) y (4.61) se aprecia que cualquiera sea el valor del resistor, la mitad de la energía puesta en juego se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor. Así, cargar a un capacitor, a través de un resistor significa perder en este último una cantidad de energía igual a la necesaria para cargar al primero.

4.11.2) Proceso de descarga

Las expresiones ya encontradas que describen el proceso de descarga son las que a continuación se reiteran:

$$v_C(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.52)$$

$$v_R(t) = V e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.53)$$

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.54)$$

y que serán empleadas para el cálculo de las energías.

a) *Energía entregada por el capacitor*

Adaptando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_C(t) = \int_0^t v_C(t) i(t) dt \quad (4.62)$$

Reemplazando en la Ec. (4.62) las Ecs. (4.52) y (4.54) surge que:

$$W_C(t) = \int_0^t V e^{-\frac{t}{RC}} \left(-\frac{V}{R}\right) e^{-\frac{t}{RC}} dt$$

operando en la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_C(t) = -\frac{1}{2} C V^2 + \frac{1}{2} C V^2 e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (4.63)$$

Para conocer el valor final al cual tiende la energía entregada por el capacitor, en la Ec. (4.63) debe tender al límite para $t \rightarrow \infty$ ∴

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_C(t) = -\frac{1}{2} C V^2 \quad (4.64)$$

El signo negativo en la Ec. (4.64) se debe a que ahora, el capacitor, al descargarse sobre el resistor, devuelve energía al circuito comportándose como un elemento activo. Obsérvese que es de igual magnitud que la energía almacenada en el proceso de carga.

b) *Energía disipada por el resistor*

Adaptando la Ec. (4.55) resulta,

$$W_{R(t)} = \int_0^t v_R(t) i(t) dt \quad (4.65)$$

Reemplazando en la Ec. (4.65) las Ecs. (4.53) y (4.54) surge que:

$$W_{R(t)} = \int_0^t \left(-V e^{-\frac{t}{RC}} \right) \left(-\frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right) dt$$

Operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_{R(t)} = \frac{1}{2} CV^2 - \frac{1}{2} CV^2 e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (4.66)$$

Para conocer la energía total disipada en el resistor, en la Ec. (4.66) se deberá tender al límite para $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_{R(t)} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.67)$$

Es decir que en el resistor se disipa la misma cantidad de energía que la entregada por el capacitor. La Ec. (4.67) resulta positiva, pues también en la descarga el resistor se comporta como un elemento pasivo.

4.12 Excitación de un circuito R.L. serie con un escalón de tensión

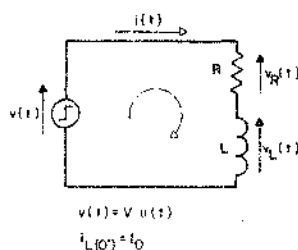


Fig. 4.35

Para el circuito de la Fig. 4.35 se desea determinar las expresiones para $i(t)$; $v_L(t)$ y $v_R(t)$. Aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff, y asignando un sentido de circulación indicado en línea de trazo, se tiene:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) \quad (4.68)$$

Será analizada a continuación la Ec. (4.68) en función de la corriente, dado que es variable sujeta a condición de continuidad. Además resulta para $t > 0$ que $v(t) = V$.

$$V = R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt} \quad \text{para } t > 0 \quad (4.69)$$

Resolviendo la Ec. (4.69) por separación de variables, y operando en la misma se tiene:

$$\frac{d i(t)}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} i(t) \quad \therefore$$

$$\frac{d i(t)}{dt} = \frac{R}{L} \left[\frac{V}{R} - i(t) \right]$$

$$\frac{\frac{d i}{\frac{V}{R} - i(t)}}{\frac{V}{R} - i(t)} = \frac{R}{L} dt \quad (4.70)$$

pero como $d \left[\frac{V}{R} - i(t) \right] = - d i(t)$ (4.71)

reemplazando en la Ec. (4.71) con la Ec. (4.70) y operando,

$$\frac{d \left[\frac{V}{R} - i(t) \right]}{\frac{V}{R} - i(t)} = - \frac{R}{L} dt$$

integrando ambos miembros,

$$\ln \left[\frac{V}{R} - i(t) \right] = - \frac{R}{L} t + \ln K \quad (4.72)$$

donde $\ln K$ es la constante de integración. Tomando exponenciales en la Ec. (4.72) y operando resulta:

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} - i(t) &= K e^{-\frac{t}{L/R}} \\ i(t) &= \frac{V}{R} - K e^{-\frac{t}{L/R}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Por las condiciones de continuidad, se conoce que la corriente en el inductor y

en consecuencia la del presente circuito, no puede variar en forma discontinua, es decir:

$$i_{(0^-)} = i_{(0)} = i_{(0^+)}$$

y por condiciones iniciales,

$$i_{(0^-)} = I_0$$

por lo tanto en la Ec. (4.73) se hace $t = 0$ y reemplazando $i_{(0^-)} = I_0$, se tiene:

$$I_0 = \frac{V}{R} - K$$

$$K = \frac{V}{R} - I_0 \quad (4.74)$$

Reemplazando la Ec. (4.74) en la Ec. (4.73):

$$i(t) = \frac{V}{R} - \left(\frac{V}{R} - I_0 \right) e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (4.75)$$

En la Ec. (4.75), que es la solución de la ecuación diferencial completa, puede individualizarse, por el método ya explicado, la componente forzada que resulta $\frac{V}{R}$ y la componenete libre que es $-\left(\frac{V}{R} - I_0\right) e^{-\frac{t}{L/R}}$

Por otra parte, $v_L(t)$ puede hallarse aplicando a la Ec. (4.75) lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ v_L(t) &= \left[- \left(\frac{V}{R} - I_0 \right) \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{t}{L/R}} \right] L \\ v_L(t) &= (V - R I_0) e^{-\frac{t}{L/R}} \end{aligned} \quad (4.76)$$

y como $v_R(t) = R i(t)$ resulta:

$$v_R(t) = V - (V - R I_0) e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (4.77)$$

Las Ecs. (4.75), (4.76) y (4.77) son las expresiones buscadas; recuérdese que las mismas son válidas para $t > 0$ por la simplificación realizada. Nótese que en los

mismos aparece el término $\frac{L}{R}$ cuya unidad resulta:

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{[\text{henry}]}{[\text{ohm}]} = \frac{[\frac{\text{volt s}}{\text{ampere}}]}{[\frac{\text{volt}}{\text{ampere}}]} = [s]$$

y como tiene unidades de tiempo y resulta constante, se lo define como constante de tiempo para el circuito R-L, resultando:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (4.78)$$

Si ahora suponiendo *condiciones iniciales nulas*, es decir $i_{(0-)} = 0$, y teniendo en cuenta la Ec. (4.78), las Ec. (4.75); (4.76) y (4.78) se reducen a:

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \quad (4.79)$$

$$v_L(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.80)$$

$$v_R(t) = V (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \quad (4.81)$$

Las ecuaciones anteriores son también válidas para $t > 0$. En la Fig. 4.36 se representa la Ec. (4.79) y en la Fig. 4.37 las Ecs. (4.80) y (4.81).

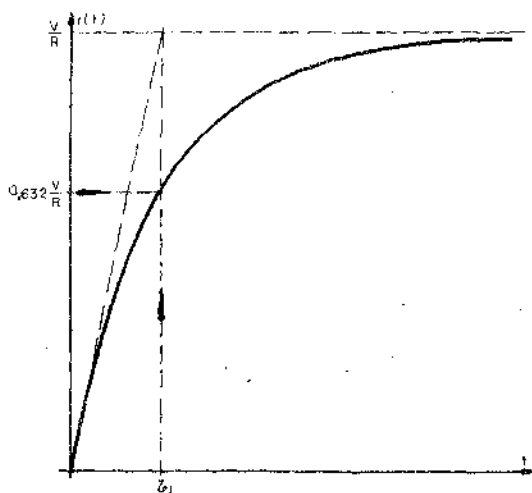


Fig. 4.36

Obsérvese, que debido a la presencia del inductor, la corriente será nula para $t = 0^+$ y en consecuencia la tensión sobre el resistor; por lo cual el inductor debe soportar íntegramente la tensión del generador. Luego la corriente alcanzará en forma gradual su valor permanente, aumentando la tensión en el resistor, y disminuyendo la del inductor en la misma proporción.

Debe tenerse en cuenta, además, que al igual que para el circuito R.C. ya estudiado, tendrán aquí también vigencia los criterios de normalización de ecuaciones y curvas vistos en su oportunidad. Por lo tanto, la curva universal mostrada en la Fig. 4.17, podrá adaptarse a dicho circuito, realizando el adecuado cambio de variables que indiquen las ecuaciones anteriores.

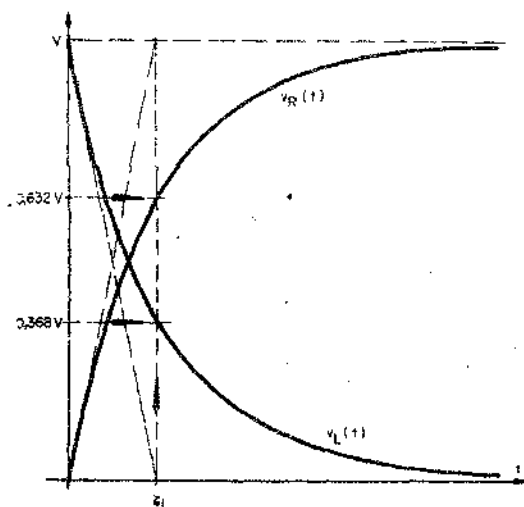


Fig. 4.37

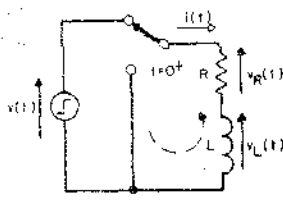


Fig. 4.38

4.13 Desactivación de una rama R-L serie

Considerando el circuito de la Fig. 4.38; en el mismo para $t = 0^+$ se baja la llave.

Si se supone que ha transcurrido un tiempo $t > 5 \tau_L$ del proceso de activación, la corriente en el circuito habrá alcanzado el régimen permanente, por lo cual la condición inicial resulta:

$$i(0^-) = \frac{V}{R} \quad (4.82)$$

Luego de bajar la llave, es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff, con un sentido de circulación que se indica con línea de trazo, resultando:

$$v_R(t) + v_L(t) = 0 \quad (4.83)$$

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

por lo cual,

$$\frac{d i(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i$$

integrando y operando,

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln K$$

$$i(t) = K e^{-\frac{R}{L} t} \quad (4.84)$$

La constante de integración se determina en base a las condiciones de continuidad,

$$i(0^-) = i(0) = i(0^+)$$

y por la condición inicial dada por la Ec. (4.83). Por lo tanto, en la Ec. (4.84) se hace $t = 0$ y reemplazando $i(0) = \frac{V}{R}$, se tiene:

$$\frac{V}{R} = K \quad (4.85)$$

Reemplazando la Ec. (4.85) en la Ec. (4.84), y como además $\frac{L}{R} = \tau_L$, resulta:

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.86)$$

Por otra parte $v_R(t) = R i(t)$ por lo cual,

$$v_R(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.87)$$

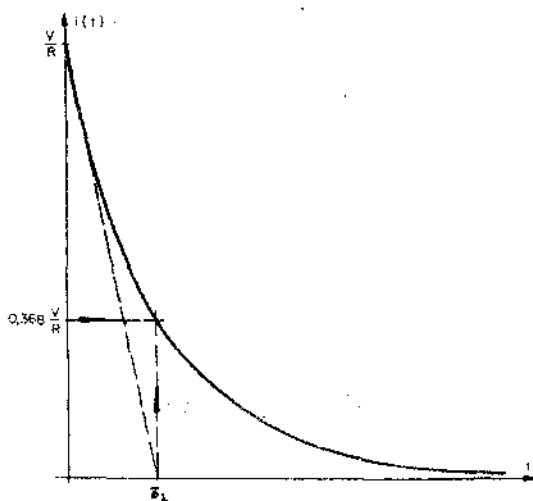


Fig. 4.39

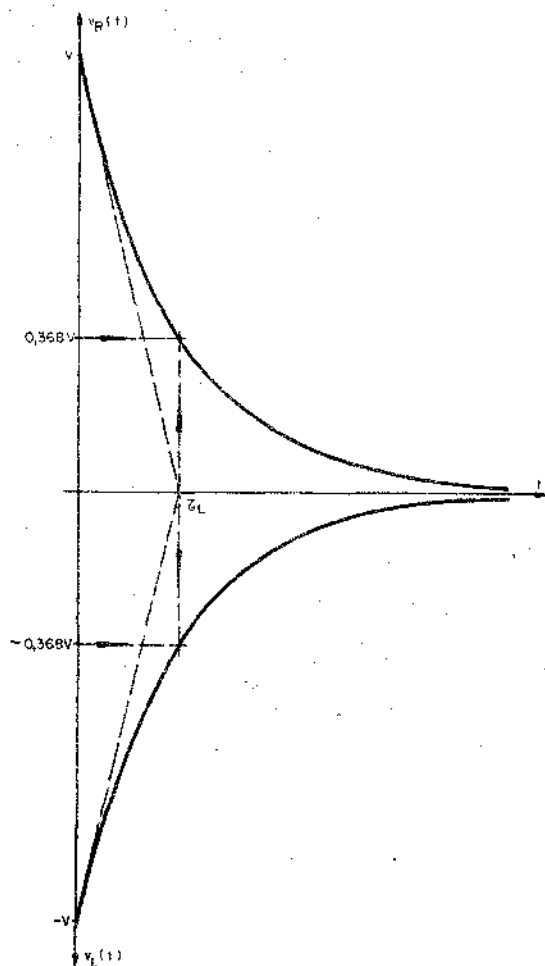


Fig. 4.40

por la Ec. (4.83),

$$v_L(t) = -v_R(t) \quad \therefore$$

$$v_L(t) = -V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.88)$$

La Ec. (4.86) se grafica en la Fig. 4.39 y las Ecs. (4.87) y (4.88) en la Fig. 4.40.

Obsérvese que, debido a la presencia del inductor, la corriente no cambia de sentido, y en consecuencia tampoco la tensión sobre el resistor. En cambio, el inductor, como entrega energía al circuito se comporta como elemento activo, coincidiendo los sentidos de $v_L(t)$ e $i(t)$, puesto que el sentido de tensión sobre el inductor se ha invertido respecto del proceso de activación.

Por otra parte, al igual que en el proceso de activación, tendrán vigencia los criterios de normalización de ecuaciones y curvas ya estudiados.

4.14 Análisis energético de la activación y desactivación de un circuito R-L serie

El análisis se realizará teniendo en cuenta el circuito R.L. serie mostrado en la Fig. 4.38, y utilizando los resultados encontrados en los párrafos 4.11 y 4.12.

La energía se calcula empleando la Ec. (4.55) que se reproduce:

$$W(t) = \int_0^t v(t) i(t) dt \quad (4.55)$$

y en esta ecuación, según se desee analizar el proceso de activación o desactivación deberán reemplazarse las expresiones de $v(t)$ e $i(t)$ que corresponden.

4.14.1 Proceso de Activación: Para condiciones iniciales nulas se encontraron las expresiones que a continuación se reiteran:

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \quad (4.79)$$

$$v_L(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.80)$$

$$v_R(t) = V (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \quad (4.81)$$

y que serán empleadas para el cálculo de las energías.

a) Energía almacenada en el inductor

Adaptando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_L(t) = \int_0^t v_L(t) i(t) dt \quad (4.89)$$

Reemplazando en la Ec. (4.89) las Ecs. (4.79) y (4.80) surge que:

$$W_L(t) = \int_0^t V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_{L(t)} = \frac{V^2 L}{2 R^2} + \frac{V^2 L}{2 R^2} e^{-\frac{2t}{\tau_L}} - \frac{V^2 L}{R^2} e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.90)$$

Para conocer el valor final al cual tiende la energía almacenada por el inductor, en la Ec. (4.90) se debe tender al límite para $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_L(t) = \frac{V^2 L}{2 R^2} \quad (4.91)$$

b) *Energía disipada en el resistor*

Adecuando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_R(t) = \int_0^t p_R(t) dt \quad (4.92)$$

Reemplazando en la Ec. (4.92) las Ecs. (4.79) y (4.81) surge que:

$$W_R(t) = \int_0^t V (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \frac{V}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_R(t) = \frac{V^2}{R} \left[t + \frac{2L}{R} (e^{-\frac{t}{\tau_L}} - 1) - \frac{L}{2R} (e^{-\frac{2t}{\tau_L}} - 1) \right] \quad (4.93)$$

Para conocer la energía total disipada en el resistor, en la Ec. (4.93) es necesario tender al límite para $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_R(t) \rightarrow \infty \quad (4.94)$$

Resultando previsible, pues una vez establecido el régimen permanente, se establecerá una corriente constante durante un tiempo infinito si no se modifica el circuito.

4.14.2 Proceso de Desactivación: Las expresiones que describen el proceso de desactivación son las que a continuación se reiteran:

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.86)$$

$$v_R(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.87)$$

$$v_L(t) = -V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (4.88)$$

y que serán empleadas para el cálculo de las energías.

a) *Energía entregada por el inductor*

Adecuando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_L(t) = \int_0^t v_L(t) i(t) dt \quad (4.95)$$

Reemplazando en la Ec. (4.95) las Ecs. (4.86) y (4.88) surge que:

$$W_L(t) = \int_0^t -V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral resulta:

$$W_L(t) = \frac{V^2 L}{2 R^2} (e^{-\frac{2t}{\tau_L}} - 1) \quad (4.96)$$

Para conocer el valor final al cual tiende la energía entregada por el inductor, en la Ec. (4.96) se debe tender al límite para $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_L(t) = -\frac{V^2 L}{2 R^2} \quad (4.97)$$

Comparando las Ecs. (4.91) y (4.97) se observa que en el proceso de desactivación el inductor devuelve al circuito toda la energía que almacenó en la activación. El signo negativo denota el comportamiento del inductor como elemento activo.

b) *Energía disipada en el resistor*

Adecuando la Ec. (4.55) resulta:

$$W_R(t) = \int_0^t v_R(t) i(t) dt \quad (4.98)$$

Reemplazando en la Ec. (4.98) las Ecs. (4.86) y (4.87) surge que:

$$W_R(t) = \int_0^t V e^{-\frac{t}{\tau_L}} \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} dt$$

operando con la última ecuación y resolviendo la integral, resulta:

$$W_R(t) = \frac{V^2 L}{2 R^2} (1 - e^{-\frac{2t}{L}}) \quad (4.99)$$

Para conocer la energía total disipada con el resistor, en la Ec. (4.99) es necesario tender al límite para $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_R(t) = \frac{V^2 L}{2 R^2} \quad (4.100)$$

Comparando las Ecs. (4.97) y (4.100), se observa que en la desactivación la energía disipada en el resistor es de igual valor absoluto y signo contrario que la entregada por el inductor.

4.15 Transitorios por variación brusca de un parámetro pasivo

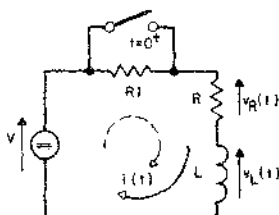


Fig. 4.41

Según la definición dada en el parágrafo 4.3, el transitorio se produce inmediatamente después de la aplicación o desconexión de un generador o bien de la *variación brusca* en el valor de un parámetro de algunos de los elementos incluidos, y este último caso es el que se procede a analizar seguidamente.

De todas las alternativas posibles, será elegido el caso de *exclusión de un resistor*, que se ilustra en la Fig. 4.41. En dicho circuito se utiliza un generador de tensión constante para indicar que existió un transitorio para tiempos anteriores al $t = 0$ de referencia, y que para dicho tiempo el transitorio se ha superado y el circuito se halla en régimen permanente. En virtud de esto, la condición inicial se determina directamente, dado que antes de cerrar la llave, la corriente está limitada por los dos resistores, es decir:

$$i(0^-) = \frac{V}{R_1 + R} \quad (4.101)$$

Para $t = 0^+$, se cierra el interruptor, produciendo una *variación brusca* de resistencia en el circuito debido a la exclusión de R_1 . En estas condiciones, planteando la 2a Regla de Kirchhoff con un sentido de circulación indicado en línea de trazo se tiene:

$$V = v_R(t) + v_L(t) \quad (4.102)$$

Colocando la Ec. (4.102) en función de variable sujeta a condición de continuidad:

$$V = R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt}$$

operando con la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{d i(t)}{dt} &= \frac{V}{L} - \frac{R}{L} i(t) = \frac{R}{L} \left[\frac{V}{R} - i(t) \right] \quad \therefore \\ \frac{\frac{d i(t)}{dt}}{\frac{V}{R} - i(t)} &= \frac{R}{L} dt \quad (4.103) \end{aligned}$$

$$\text{pero como} \quad d \left[\frac{V}{R} - i(t) \right] = -d i(t) \quad (4.104)$$

reemplazando la Ec. (4.104) en la Ec. (4.103) y operando:

$$\frac{d \left[\frac{V}{R} - i(t) \right]}{\frac{V}{R} - i(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

integrando la última ecuación y reduciendo:

$$\ln \left[\frac{V}{R} - i(t) \right] = -\frac{R}{L} t + \ln K \quad \therefore$$

$$\frac{V}{R} - i(t) = K e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$i(t) = \frac{V}{R} - K e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (4.105)$$

Como se detalló en ejemplos anteriores, la constante de integración se determina en base a las condiciones de continuidad,

$$i(0^-) = i(0) = i(0^+)$$

y por la condición inicial encontrada en la Ec. (4.101). Por lo tanto en la Ec. (4.105) se hace $t = 0$ y reemplazando $i(0) = \frac{V}{R_1 + R}$, resulta:

$$\frac{V}{R_1 + R} = \frac{V}{R} - K \quad \therefore K = \frac{V}{R} - \frac{V}{R_1 + R} \quad (4.106)$$

reemplazando la Ec. (4.106) en la Ec. (4.105),

$$i(t) = \frac{V}{R} - \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R_1 + R} \right) e^{-\frac{t}{L/R}}$$

De la Ec. (4.106), por el procedimiento descrito en su oportunidad puede identificarse la componente forzada:

$$i_p(t) = \frac{V}{R}$$

y la componente libre:

$$i_h(t) = - \left[\frac{V}{R} - \frac{V}{R_1 + R} \right] e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Las componentes forzada y libre, y su suma, que representa la Ec. (4.106), se grafican en la Fig. 4.42. Recuérdese que dicha ecuación es válida para $t > 0$.

Por otra parte, como:

$$v_R(t) = R i(t) \quad \text{por la Ec. (4.106)}$$

$$v_R(t) = V - \left(V - \frac{V R}{R_1 + R} \right) e^{-\frac{t}{L/R}}$$

operando,

$$v_R(t) = V - \left(\frac{V R_1 + V R - V R}{R_1 + R} \right) e^{-\frac{t}{L/R}} \quad \therefore$$

$$v_R(t) = V - \left(\frac{V R_1}{R_1 + R} \right) e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (4.107)$$

Además de la Ec. (4.102) se desprende que:

$$v_L(t) = V - v_R(t) \quad \text{por lo cual,}$$

$$v_L(t) = \frac{VR_1}{R_1 + R} e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (4.108)$$

Las Ecs. (4.107) y (4.108) se encuentran graficadas en la Fig. 4.43. Recuérdese que las mismas son válidas para $t > 0$.

Obsérvese que antes de cerrar el interruptor la corriente está limitada por $R_1 + R$ según indica la Ec. (4.101). Luego de cerrado el interruptor, la corriente mantendrá su valor anterior para $t = 0^+$, y luego en forma gradual tenderá a alcanzar el valor de $\frac{V}{R}$

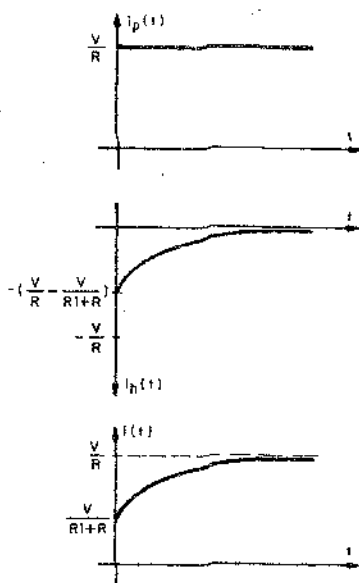


Fig. 4.42

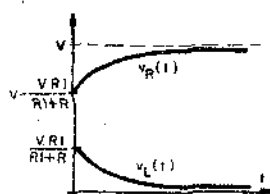


Fig. 4.43

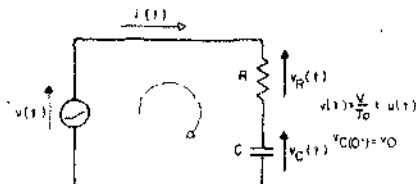


Fig. 4.44

4.16 Excitación de un circuito R.C. serie con una rampa de tensión

En el circuito de la Fig. 4.44 se desean determinar las expresiones para $v_C(t)$; $v_R(t)$ e $i(t)$. Asignando un sentido de circulación como el indicado en línea de trazo, y aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff se tiene:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (4.109)$$

Expresando la Ec. (4.109) en función de $v_C(t)$ dado que es variable sujeta a condición de continuidad. Además resulta para $t > 0$ que :

$$v(t) = \frac{V}{T_a} t$$

pues $u(t) = \text{cte}$ y vale la unidad

$$\frac{V}{T_a} t = R i(t) + v_C(t) \quad \text{para } t > 0$$

$$\frac{V}{T_a} t = R C \frac{d v_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad \text{ordenando,}$$

$$\frac{d v_C(t)}{dt} + \frac{1}{R C} v_C(t) = \frac{V}{R C T_a} t \quad (4.110)$$

La Ec. (4.110) puede resolverse por el procedimiento indicado en el párrafo 4.3. Es decir, en primer lugar se halla la solución de la ecuación diferencial homogénea; luego la solución particular de la ecuación completa, y sumando los resultados anteriores se halla la solución de la ecuación diferencial completa.

Finalmente deberá calcularse la constante de integración.

Solución de la ecuación diferencial homogénea

Adoptando el subíndice h para la solución, la Ec. (4.110) queda:

$$\frac{d v_{Ch}(t)}{dt} + \frac{1}{R C} v_{Ch}(t) = 0 \quad (4.111)$$

que en este caso sencillo puede resolverse por separación de variables, por lo cual operando con la Ec. (4.111) resulta:

$$\frac{d v_{Ch}(t)}{v_{Ch}(t)} = -\frac{1}{R C} dt \quad \text{integrando y operando,}$$

$$\ln v_{Ch}(t) = -\frac{1}{R C} t + \ln K$$

$$v_{Ch}(t) = K e^{-\frac{t}{R C}} \quad (4.112)$$

que da lugar a la componente libre.

Solución particular de la ecuación diferencial completa

Dado que la excitación es una rampa, puede ensayarse como solución, la ecuación de una recta, dado que es una función del mismo tipo que la excitación. Utilizando subíndice p para la solución de la particular se tiene:

$$v_{Cp}(t) = A + B t \quad (4.113)$$

Reemplazando adecuadamente la Ec. (4.13) en la Ec. (4.110) resulta:

$$B + \frac{1}{RC} (A + B t) = \frac{V}{RC T_a} t \quad \text{operando}$$

$$B + \frac{A}{RC} + \frac{B}{RC} t \approx \frac{V}{RC T_a} t \quad (4.114)$$

Para que se verifique término a término la igualdad indicada en la Ec. (4.114), deberá cumplirse que:

$$B + \frac{A}{RC} = 0 \quad (4.115)$$

y además

$$\frac{B}{RC} t = \frac{V}{RC T_a} t \quad \therefore$$

$$B = \frac{V}{T_a} \quad (4.116)$$

Reemplazando la Ec. (4.116) en la Ec. (4.115):

$$\frac{V}{T_a} + \frac{A}{RC} = 0 \quad \therefore \quad A = -\frac{VRC}{T_a} \quad (4.117)$$

Reemplazando las Ecs. (4.116) y (4.117) en la solución propuesta, es decir la Ec. (4.113) se tiene:

$$v_{Cp}(t) = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t \quad (4.118)$$

que da lugar a la componente forzada.

El resultado encontrado es lógico, dado que la componente forzada resulta lineal y de igual pendiente que la excitación. Nótese que además se encuentra atrasada respecto de la misma. Por otra parte se verifica la homogeneidad dimensional de la ecuación.

Solución de la ecuación diferencial completa

Se halla sumando las Ecs. (4.118) y (4.112), es decir:

$$v_C(t) = v_{Cp}(t) + v_{Ch}(t)$$

$$v_C(t) = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t + K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.119)$$

Cálculo de la constante de integración

Por las condiciones de continuidad se sabe que la tensión en bornes del capacitor no puede variar en forma discontinua, es decir:

$$v_{C(0^-)} = v_{C(0)} = v_{C(0^+)}$$

y por condiciones iniciales.

$$v_{C(0^+)} = V_0$$

por lo tanto en la Ec. (4.119) se indica $t = 0$ y reemplazando $v_{C(0^+)} = V_0$ resulta:

$$V_0 = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} \cdot 0 + K e^0$$

$$K = \frac{VRC}{T_a} + V_0 \quad (4.120)$$

Reemplazando la Ec. (4.120) en la Ec. (4.119) resulta:

$$v_C(t) = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t + \left(\frac{VRC}{T_a} + V_0 \right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.121)$$

Por otra parte, $v_R(t)$ puede hallarse, a partir de la Ec. (4.109) como,

$$v_R(t) = v(t) - v_C(t) \quad \text{que para } t > 0 \text{ resulta:}$$

$$v_R(t) = \frac{V}{T_a} t - v_C(t) \quad (4.122)$$

Reemplazando la Ec. (4.121) en la Ec. (4.122) se tiene que:

$$v_R(t) = \frac{VRC}{T_a} - \left(\frac{VRC}{T_a} + V_0 \right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.123)$$

y como $i(t) = \frac{v_R(t)}{R}$ resulta:

$$i(t) = \frac{VC}{T_a} - \left(\frac{VC}{T_a} + \frac{V_0}{R} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.124)$$

Las Ecs. (4.121), (4.123) y (4.124), son las expresiones buscadas; recuérdese que las mismas son válidas para $t > 0$ por la simplificación realizada.

Si ahora se suponen *condiciones iniciales nulas*, es decir $v_C(0^-) = 0$, las expresiones anteriores se reducen a:

$$v_C(t) = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t + \frac{VRC}{T_a} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.125)$$

$$v_R(t) = \frac{VRC}{T_a} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.126)$$

$$i(t) = \frac{VC}{T_a} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.127)$$

Las ecuaciones anteriores son también válidas para $t > 0$.

La Ec. (4.125) se encuentra graficada en la Fig. 4.45. En la misma se graficaron también la solución de la homogénea, $v_{Ch}(t)$, o sea la componente libre y la solución de la particular $v_{Cp}(t)$, o sea la componente forzada, y la excitación. Nótese el retardo de $v_{Cp}(t)$ respecto de la excitación $v(t)$. Dicho tiempo de retardo, que será llamado t_r , puede hallarse igualando a cero la solución de la particular.

$$v_{Cp}(t) = 0 = -\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t_r \quad \therefore$$

$$t_r = RC = \tau_c$$

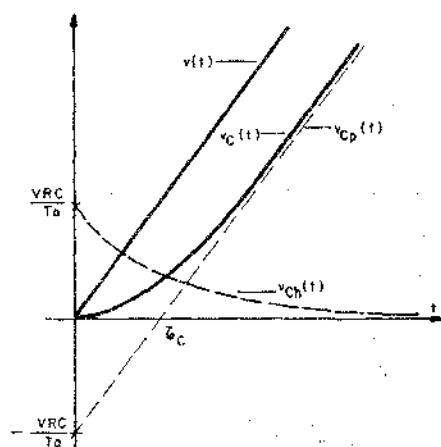


Fig. 4.45

Es decir, que para un tiempo igual a la constante de tiempo del circuito se anula la solución de la particular, como se aprecia en la Fig. 4.45. Se observa que el circuito introduce demora en el establecimiento de $v_C(t)$, y que dicha demora puede controlarse modificando el producto RC . Nótese que luego de transcurrido un tiempo igual a $5\tau_C$, la forma de señal de $v_C(t)$ será una recta, al igual que la excitación, y este es un caso típico en el que existe *régimen forzado* pero no permanente, puesto que $v_C(t)$ para $t \rightarrow \infty$ no se hace finita, de acuerdo a lo explicado en el parágrafo 4.3.

Obsérvese además, que una vez establecido el régimen forzado, entre $v(t)$ y $v_C(t)$ existirá una diferencia de potencial fija, lo que dará lugar a una corriente de valor constante para $t > 5\tau_C$. Esto último puede observarse de la graficación de las Ecs. (4.126) y (4.127) que se ilustran en la Fig. 4.46. Nótese que para estas variables existe el *régimen permanente*.

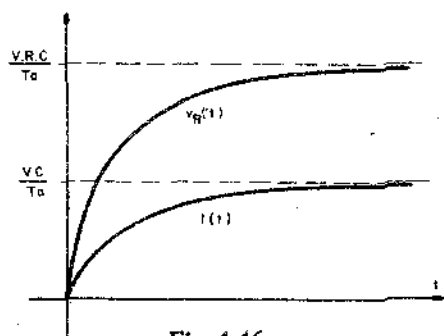


Fig. 4.46

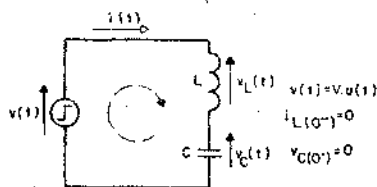


Fig. 4.47

4.17 Excitación de un circuito L.C. serie con un escalón de tensión

En el circuito de la Fig. 4.47 se desean determinar las expresiones para $v_C(t)$, $i(t)$ y $v_L(t)$. Asignando un sentido de circulación como el indicado en línea de trazo, y aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff, se tiene:

$$v(t) = v_L(t) + v_C(t) \quad (4.128)$$

De las dos variables sujetas a condición de continuidad, se elige a $v_C(t)$ pues conduce a otra de las soluciones por derivación. En consecuencia será expresada la Ec. (4.128) en función de $v_C(t)$ recordando que:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad \text{y} \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

además para $t > 0$ resulta que $v(t) = V$ por lo cual la Ec. (4.128) resulta:

$$V = L C \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + v_C(t) \quad \text{para } t > 0$$

ordenando,

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{V}{LC} \quad (4.129)$$

La Ec. (4.129) se resuelve por el procedimiento indicado en el párrafo 4.3 y detallado en el ejemplo anterior. Nótese que en la misma figura la constante $\frac{1}{LC}$ cuya unidad resulta:

$$\frac{1}{[L][C]} = \frac{1}{\left[\frac{\text{volt} \cdot \text{s}}{\text{ampere}}\right] \left[\frac{\text{ampere} \cdot \text{s}}{\text{volt}}\right]} = \left[\frac{1}{\text{s}^2}\right] = [\text{t}^{-2}]$$

que tiene dimensiones de pulsación al cuadrado, llamada ω_0^2 , que será siempre positivo al igual que $\frac{1}{LC}$, por lo cual:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (4.130)$$

Reemplazando la Ec. (4.130) en la Ec. (4.129):

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v_C(t) = V \omega_0^2 \quad (4.131)$$

Solución de la ecuación diferencial homogénea

Adoptando el subíndice h para la solución, la Ec. (4.131) resulta:

$$\frac{d^2 v_{ch}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v_{ch}(t) = 0 \quad (4.132)$$

y para su resolución será utilizado el método de Euler que convierte la ecuación diferencial en una algebraica. Se propone como solución:

$$v_{ch}(t) = e^{Bt} \quad (4.133)$$

Reemplazando adecuadamente la Ec. (4.133) en la Ec. (4.132), será:

$$B^2 e^{Bt} + \omega_0^2 e^{Bt} = 0$$

dado que, $e^{Bt} \neq 0$

$$B^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (4.134)$$

La Ec. (4.134) se denomina *ecuación característica* asociada a la ecuación diferencial, y a partir de su análisis se podrán conocer las características del circuito. Operando en la misma:

$$\begin{aligned} B^2 &= -\omega_0^2 \\ B &= \pm \sqrt{-\omega_0^2} \quad \text{por lo cual,} \\ B &= \pm j\omega_0 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Reemplazando la Ec. (4.135) en la Ec. (4.133):

$$v_{ch}(t) = e^{\pm j\omega_0 t} \quad \text{apareciendo dos soluciones,}$$

$$v_{ch_1}(t) = K_1 e^{j\omega_0 t}$$

$$v_{ch_2}(t) = K_2 e^{-j\omega_0 t}$$

la combinación lineal de las anteriores, que involucra a ambas, será una solución más general, en consecuencia:

$$v_{ch}(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t} \quad (4.136)$$

apareciendo dos constantes por el hecho de corresponder a una ecuación diferencial de segundo orden, y que da lugar a la componente libre.

Solución particular de la ecuación diferencial completa

Dado que la excitación es un escalón, se propondrá a una constante como solución:

$$v_{cp}(t) = A \quad (4.137)$$

Reemplazando adecuadamente la Ec. (4.137) en la Ec. (4.131), resulta:

$$\begin{aligned} 0 + \omega_0^2 A &= V \omega_0^2 \\ A &= V \end{aligned} \quad (4.138)$$

Reemplazando la Ec. (4.138) en la Ec. (4.137), resulta:

$$v_{cp}(t) = V \quad (4.139)$$

que da lugar a la componente forzada.

Solución de la ecuación diferencial completa

Se halla sumando las Ecs. (4.139) y (4.136)

$$v_C(t) = V + K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t} \quad (4.140)$$

Cálculo de las constantes de integración

Dado que deben determinarse dos constantes y se dispone solamente de la Ec. (4.140), deberá encontrarse otra ecuación que puede derivarse de:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

por lo que operando con la Ec. (4.140) resulta:

$$i(t) = j\omega_0 C K_1 e^{j\omega_0 t} - j\omega_0 C K_2 e^{-j\omega_0 t} \quad (4.141)$$

Por aplicación de las condiciones de las condiciones de continuidad y condición inicial $v_{C(0^-)} = 0$ a la Ec. (4.140) resulta:

$$0 = V + K_1 + K_2 \quad \therefore$$

$$K_1 + K_2 = -V \quad (4.142)$$

Por aplicación de las condiciones de continuidad y condición inicial $i_{L(0^-)} = 0$ a la Ec. (4.141) resulta:

$$0 = j\omega_0 C K_1 - j\omega_0 C K_2 \quad \therefore$$

$$K_1 = K_2 \quad (4.143)$$

de la comparación de las Ecs. (4.142) y (4.143) resulta que:

$$K_1 = K_2 = -\frac{V}{2} \quad (4.144)$$

Reemplazando la Ec. (4.144) en la Ec. (4.140) surge:

$$v_C(t) = V - \frac{V}{2} e^{j\omega_0 t} - \frac{V}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

$$v_C(t) = V - V \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) \quad \therefore$$

$$v_C(t) = V - V \cos \omega_0 t \quad (4.145)$$

Por otra parte, la corriente puede hallarse a partir de:

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C V \omega_0 \sin \omega_0 t \quad \therefore$$

$$i(t) = \omega_0 C V \sin \omega_0 t \quad (4.146)$$

y $v_L(t)$ puede encontrarse a partir de la Ec. (4.128) como:

$$v_L(t) = V - v_C(t) = V - V + V \cos \omega_0 t \quad \therefore$$

$$v_L(t) = V \cos \omega_0 t \quad (4.147)$$

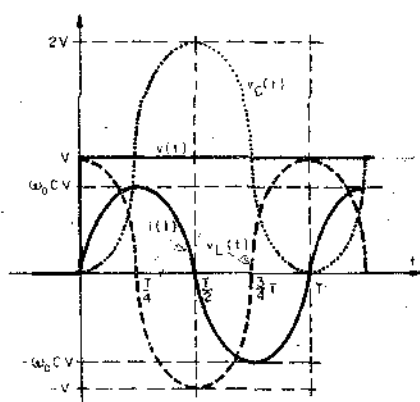


Fig. 4.48

Las Ecs. (4.145), (4.146) y (4.147) son las expresiones buscadas; recuérdese que las mismas son válidas para $t > 0$ por la simplificación realizada. Las mencionadas ecuaciones y la excitación $v(t) = V u(t)$, se encuentran graficadas en la Fig. 4.48. De la observación de las ecuaciones mencionadas y de su graficación se deduce que:

A pesar que la excitación es aperiódica de amplitud constante, las formas de señal encontradas varían en forma de oscilaciones armónicas de frecuencia:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

que se denomina *frecuencia libre de oscilación*, que como puede apreciarse depende sólo del valor de los elementos pasivos del circuito. Esta notable diferencia entre las formas de señal de excitación y respuesta se deben a los intercambios energéticos que el capacitor y el inductor efectúan entre sí.

Además, la tensión en el inductor adelanta un cuarto de período respecto de la corriente, mientras que la tensión en el capacitor atrasa un cuarto de período res-

pecto a esta última. En consecuencia las oscilaciones de la tensión en el capacitor e inductor están en oposición de fase, de modo que su suma es un valor constante igual a la tensión impuesta por el generador.

Analizando las formas de señal, y teniendo en cuenta que los elementos pasivos reciben energía cuando la tensión y la corriente tienen el mismo signo, y que el generador entrega energía al circuito cuando la corriente es positiva y recibe energía, en caso contrario, se desprende que durante dos cuartos de período la fuente entrega energía y durante los restantes el circuito devuelve dicha energía. De esta manera, al completar un período la energía neta intercambiada entre el generador y el circuito es nula, como puede comprobarse de la siguiente manera:

$$W|_T = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T v(t) i(t) dt$$

reemplazando $v(t) = V u(t)$ e $i(t)$ dado por la Ec. (4.146) se tiene:

$$W|_T = \int_0^T V u(t) \omega_0 C V \sin \omega_0 t dt$$

$$W|_T = \omega_0 C V^2 u(t) \int_0^T \sin \omega_0 t dt = 0$$

dado que la integral resulta nula.

Este resultado es previsible, dado que, en este circuito L.C. serie ideal, la ausencia de resistencia no da lugar a la pérdida de ninguna parte de la energía provista por el generador. En otras palabras, esta ausencia de resistencia no da lugar a constante de tiempo, por lo cual la componente libre no se extingue. Si por otra parte, se tiene en cuenta la expresión de la potencia instantánea provista por el generador en función de las energías almacenadas por el inductor y el capacitor resulta:

$$p(t) = d \left[\frac{W_L(t) + W_C(t)}{dt} \right]$$

lo que indica que al no ser constante la suma de las energías en los elementos pasivos, el generador entrega una potencia instantánea igual a la velocidad de variación de la energía total almacenada en el circuito. Lo que resulta nulo es la energía intercambiada a lo largo de un período.

4.18 Obtención de la respuesta de circuitos con dos tipos de elementos pasivos a señales compuestas por aplicación del principio de superposición

A efectos de ejemplificar, en forma sencilla este procedimiento se elegirá de entre todos los casos posibles, el circuito R.C. serie, por ser uno de los más utilizados. Respecto de las excitaciones, serán elegidas dos de ellas, en las cuales las respuestas a sus componentes elementales fueron halladas en párrafos anteriores.

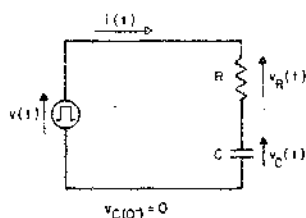


Fig. 4.49

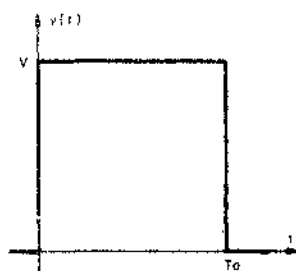


Fig. 4.50

4.18.1) Excitación pulso rectangular

Considerando el circuito mostrado en la Fig. 4.49 excitado por la señal de tensión ilustrada en la Fig. 4.50. La expresión de la excitación resulta:

$$v(t) = Vu(t) - Vu(t - T_a) \quad (4.148)$$

La Ec. (4.148) puede expresarse como suma de dos componentes elementales,

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$\text{donde } v_1(t) = Vu(t) \quad (4.149)$$

$$\text{y } v_2(t) = -Vu(t - T_a) \quad (4.150)$$

y dado que los circuitos son lineales e invariantes en el tiempo, podrá hallarse la respuesta a cada una de las componentes, y luego, aplicando el principio de superposición, la suma de las respuestas a cada uno de los componentes dará la respuesta total. Resolviendo para $v_C(t)$ y $v_R(t)$ se omite para $i(t)$ pues difiere de $v_R(t)$ por sólo una constante.

En virtud de lo anteriormente expresado, las respuestas buscadas podrán hallarse como:

$$v_C(t) = v_{1C}(t) + v_{2C}(t) \quad \text{y} \quad (4.151)$$

$$v_R(t) = v_{1R}(t) + v_{2R}(t) \quad (4.152)$$

Las respuestas a las componentes elementales indicadas por la Ec. (4.149) fueron encontradas en el parágrafo 4.4, para condiciones iniciales nulas, en las Ecs. (4.27) y (4.28). Adaptando esas expresiones para el presente caso se tiene que:

$$v_{1C}(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}) \quad (4.153)$$

$$v_{1R}(t) = Ve^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (4.154)$$

y son válidos para $t > 0$, lo que puede ponerse en evidencia multiplicando las mismas por $u(t)$.

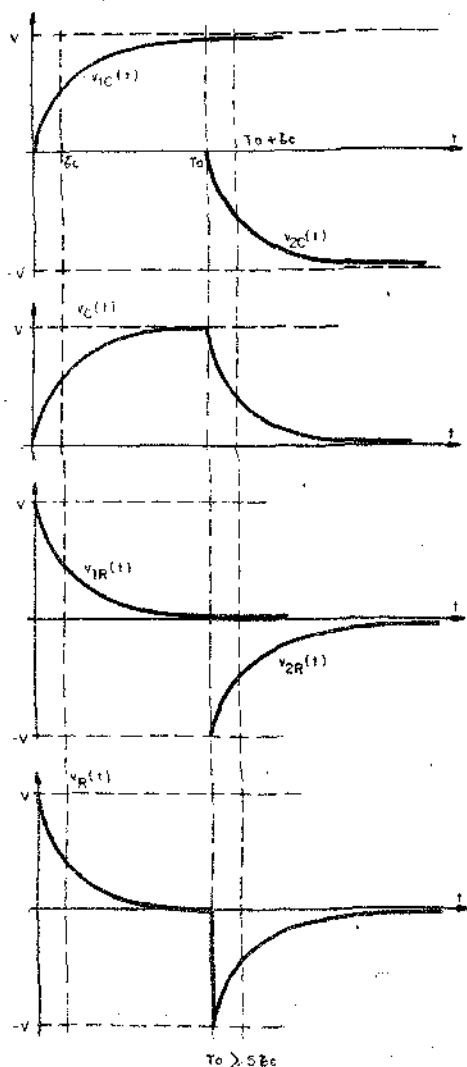


Fig. 4.51

La respuesta a la componente indicada por la Ec. (4.150) se halla en virtud de lo anteriormente expresado, cambiando de signo las soluciones dadas en las Ecs. (4.153) y (4.154), y desplazándolos en T_d , por lo cual resulta:

$$v_{2C}(t) = -V \left[1 - e^{-\frac{(t - T_d)}{\tau_c}} \right] \quad (4.155)$$

$$v_{2R}(t) = -V e^{-\frac{(t-T_a)}{\tau_c}} \quad (4.156)$$

y son válidos para $t > T_a$, lo que puede ponerse en evidencia multiplicando los mismos por $u(t - T_a)$.

Reemplazando adecuadamente las Ecs. (4.153), (4.154), (4.155) y (4.156) en las Ecs. (4.151) y (4.152) se tiene que:

$$v_C(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}})u(t) - V(1 - e^{-\frac{(t-T_a)}{\tau_c}})u(t - T_a) \quad (4.157)$$

$$v_R(t) = V e^{-\frac{t}{\tau_c}}u(t) - V e^{-\frac{(t-T_a)}{\tau_c}}u(t - T_a) \quad (4.158)$$

Las Ecs. (4.157) y (4.158) se encuentran graficadas en la Fig. 4.51 para $T_a \geq 5\tau_c$, y en la Fig. 4.52 para $T_a \approx \tau_c$. Nótese cómo a partir de una excitación pulso rectangular, variando la constante de tiempo del circuito puede obtenerse sobre los elementos distintas formas de señal, propiedad que será aprovechada en el próximo parágrafo al estudiar los circuitos diferenciadores e integradores.

4.18.2) Excitación pulso triangular: Considerando el circuito mostrado en la Fig. 4.53, excitado por la señal de tensión mostrada en la Fig. 4.54. La expresión de la excitación resulta:

$$v(t) = \frac{V}{T_a} t u(t) - \frac{2V}{T_a} (t - T_a) u(t - T_a) + \frac{V}{T_a} (t - 2T_a) u(t - 2T_a) \quad (4.159)$$

La Ec. (4.159) puede expresarse como suma de tres componentes elementales:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)$$

$$\text{donde, } v_1(t) = \frac{V}{T_a} t u(t) \quad (4.160)$$

$$v_2(t) = -\frac{2V}{T_a} (t - T_a) u(t - T_a) \quad (4.161)$$

$$v_3(t) = \frac{V}{T_a} (t - 2T_a) u(t - 2T_a) \quad (4.162)$$

La solución del problema se desarrolla por las mismas pautas y procedimientos detallados en el ejemplo anterior. Por razones de extensión, en este ejemplo se solucionará sólo para la tensión sobre el capacitor. En consecuencia, la tensión sobre el capacitor puede expresarse como:

$$v_C(t) = v_{1C}(t) + v_{2C}(t) + v_{3C}(t) \quad (4.163)$$

Para la componente de excitación indicada por la Ec. (4.160) en el parágrafo

4.15, para condiciones iniciales nulas, se encontró la expresión para $v_C(t)$ dada por la Ec. (4.125).

Adaptando esa expresión para el presente caso se tiene que:

$$v_{1C}(t) = \left(-\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t + \frac{VRC}{T_a} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) u(t) \quad (4.164)$$

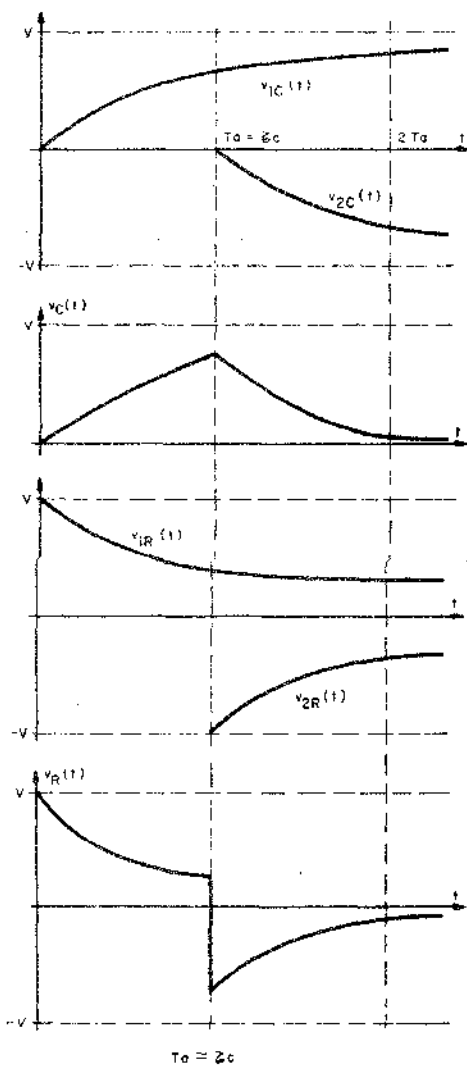


Fig. 4.52

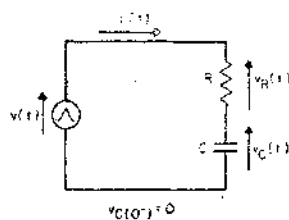


Fig. 4.53

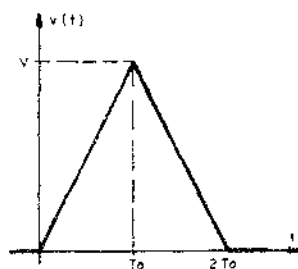


Fig. 4.54

y para los demás componentes:

$$v_{2C}(t) = \left[\frac{2VRC}{T_a} - \frac{2V}{T_a} (t - T_a) - \frac{2VRC}{T_a} e^{-\frac{(t-T_a)}{\tau_c}} \right] u(t - T_a) \quad (4.165)$$

$$v_{3C}(t) = \left[-\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} (t - 2T_a) + \frac{VRC}{T_a} e^{-\frac{(t-2T_a)}{\tau_c}} \right] u(t - 2T_a) \quad (4.166)$$

Reemplazando las Ecs. (4.164), (4.165) y (4.166) en la Ec. (4.163) se tiene que:

$$\begin{aligned} v_C(t) = & \left[-\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} t + \frac{VRC}{T_a} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right] u(t) + \left[\frac{2VRC}{T_a} - \right. \\ & \left. - \frac{2V}{T_a} (t - T_a) - \frac{2VRC}{T_a} e^{-\frac{(t-T_a)}{\tau_c}} \right] u(t - T_a) + \\ & + \left[-\frac{VRC}{T_a} + \frac{V}{T_a} (t - 2T_a) + \frac{VRC}{T_a} e^{-\frac{(t-2T_a)}{\tau_c}} \right] u(t - 2T_a) \end{aligned} \quad (4.167)$$

La Ec. (4.167) se grafica en la Fig. 4.55 para $T_a \geq 5 \tau_c$. Superpuesta a la respuesta $v_C(t)$ se ha dibujado también la excitación $v(t)$. Nótese el retardo existente entre $v_C(t)$ y la excitación. Además se observa que al finalizar el pulso de excitación, se va anulando la tensión en el capacitor. Este resultado es previsible, pues dado que $v_C(t) = \frac{q_C(t)}{C}$ y como $C = \text{cte}$, al volver la tensión a su valor original, la carga también debe hacerlo, y en este caso serán nulas, dado que son nulas las condiciones iniciales, pues $v_{C(0)} = 0$.

4.19 Circuitos integradores y diferenciadores

Es propósito de este párrafo realizar un análisis cualitativo de los circuitos integradores y diferenciadores, de aplicación muy diversa en electrónica eligiendo el modelo resistivo-capacitivo por ser el más empleado.

Para el análisis de los mismos se supondrá nula la corriente de salida. Prácticamente ello quiere decir que la corriente que se toma del circuito es mucho menor que la que circula por él, por lo cual podrá desprejarse la corriente de salida.

4.19.1) **Circuito integrador:** Considerando el circuito de la Fig. 4.56; aplicando la 2ª Regla de Kirchhoff con un sentido de circulación horario resulta:

$$v_e(t) = v_R(t) + v_s(t)$$

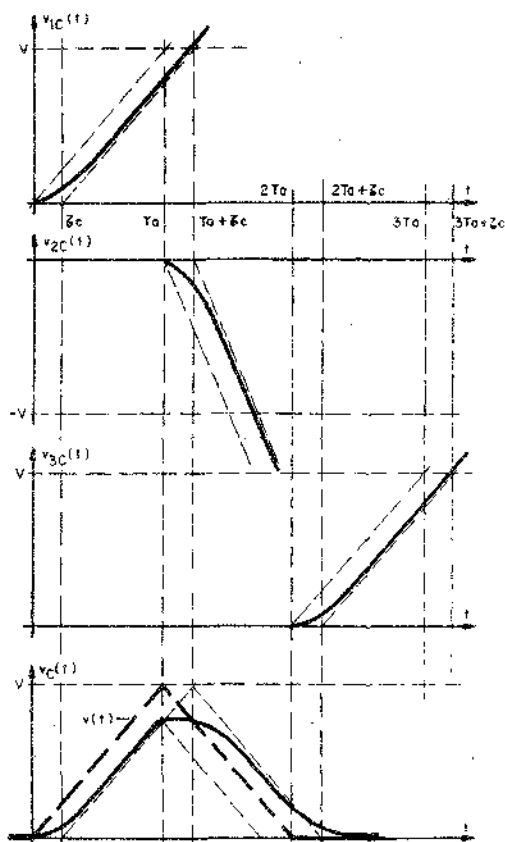


Fig. 4.55

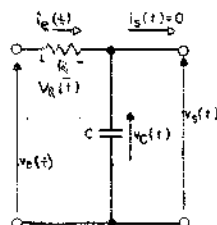


Fig. 4.56

$$v_e(t) = R i_e(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)} \quad (4.168)$$

imponiendo la condición que:

$$v_R(t) \gg v_C(t) \quad (4.169)$$

es decir,

$$R i_e(t) \gg \frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)}$$

la Ec. (4.168) se reduce a:

$$v_e(t) \approx R i_e(t)$$

$$i_e(t) \approx \frac{v_e(t)}{R} \quad (4.170)$$

Por otra parte, la tensión de salida, que es la tensión sobre el capacitor es:

$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)} \quad (4.171)$$

reemplazando la Ec. (4.170) en la Ec. (4.171),

$$v_s(t) \approx \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_e(t)}{R} dt + v_{C(0)} \quad \therefore$$

$$v_s(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t v_e(t) dt + v_{C(0)} \quad \text{o bien,}$$

$$v_s(t) \approx \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_e(t) dt \quad (4.172)$$

En consecuencia, cuando se cumple la condición dada por la Ec. (4.169), en la salida del circuito se dispone de una tensión proporcional a la integral de la tensión de entrada. Nótese que en el conjunto generador de tensión $v_e(t)$ y resistor, se presenta al capacitor como un generador ideal de corriente, donde el valor de la amplitud impuesta está determinado por $v_{C(0)}$ y R , e independiente del valor de C .

Para el caso de *señales periódicas*, la condición dada por la Ec. (4.169) puede expresarse de una manera más práctica. La forma más simple de encontrar la condición mencionada, es realizar por ejemplo el análisis gráfico mostrado en la Fig. 4.57, donde se grafica para una dada excitación la respuesta de un integrador ideal, y las respuestas correspondientes a dos relaciones distintas entre la constante de tiempo del circuito y el semiperíodo de la señal de excitación. Del análisis de la mencionada figura se desprende que a medida que el producto $R.C.$ se hace mayor respecto de $\frac{T}{2}$, el circuito integra mejor. En otras palabras, para que el circuito actúe como integrador la constante de tiempo del mismo debe ser mucho mayor que el semiperíodo de la excitación, es decir:

$$R.C. \gg \frac{T}{2} \quad (4.173)$$

Obsérvese, que tanto la Ec. (4.169) y la Ec. (4.173), resultan ambas *condición necesaria y suficiente* para que el circuito integre.

Finalmente, serán mencionadas las *limitaciones* del circuito integrador. Desde el punto de vista teórico, debido a la condición impuesta por la Ec. (4.173), y del análisis de la Ec. (4.172), se desprende que el costo de una mejor integración es una tensión de salida mas pequeña. Es decir que la tensión de salida tiende a cero cuando la operación matemática tiende a ser realizada perfectamente. Las limitaciones de carácter *práctico* están referidas a la aparición inevitable, de la resistencia interna del generador excitador, y de los parámetros residuales de los elementos pasivos, que a frecuencias elevadas modificarán el comportamiento del circuito.

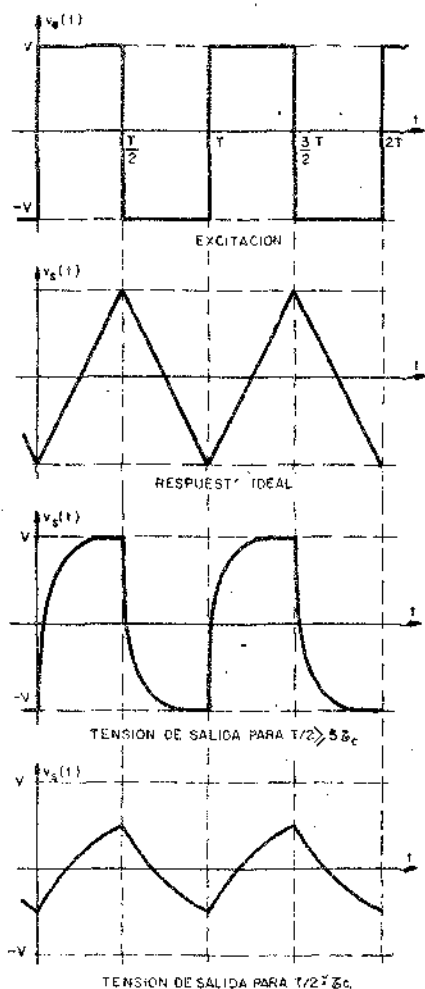


Fig. 4.57

4.19.2) **Circuito diferenciador:** En el circuito ilustrado en la Fig. 4.58, es aplicada la 2ª Regla de Kirchhoff con un sentido de circulación horario, resultando:

$$v_e(t) = v_C(t) + v_s(t)$$

$$v_e(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)} + R i_e(t) \quad (4.174)$$

imponiendo la condición que,

$$v_C(t) \gg v_R(t) \quad (4.175)$$

es decir,

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)} \gg R i_e(t)$$

la Ec. (4.174) se reduce a:

$$v_e(t) \simeq \frac{1}{C} \int_0^t i_e(t) dt + v_{C(0)} \quad \text{y derivando}$$

$$\frac{d v_e(t)}{dt} \simeq \frac{1}{C} i_e(t)$$

$$i_e(t) \simeq C \frac{d v_e(t)}{dt} \quad (4.176)$$

Por otra parte, la tensión de salida, que es la tensión sobre el resistor es:

$$v_s(t) = R i_e(t) \quad (4.177)$$

reemplazando la Ec. (4.176) en la Ec. (4.177),

$$v_s(t) \simeq R C \frac{d v_e(t)}{dt} \quad (4.178)$$

Por lo tanto, cuando se cumple la condición dada por la Ec. (4.175), en la salida del circuito se dispone de una tensión proporcional a la derivada de la tensión de entrada. Nótese que el conjunto generador de tensión excitador y capacitor se comporta frente al resistor como un generador de corriente ideal, que entrega una corriente proporcional a la derivada de la tensión de entrada, e independiente del valor R .

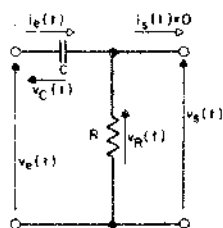


Fig. 4.58

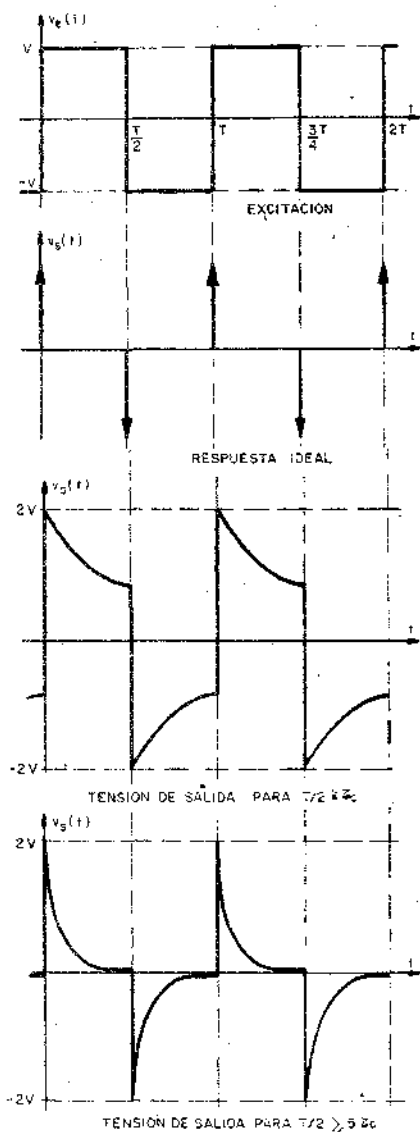


Fig. 4.59

Para el caso de *señales periódicas* la condición dada por la Ec. (4.175), puede expresarse de una manera más práctica. Pero nótese que la condición mencionada no se cumple para los tiempos en los que la excitación presenta discontinuidades. Esto se debe a que las variaciones bruscas de la tensión de entrada serán transferidas

directamente al resistor, pues el capacitor está sujeto a condición de continuidad. La nueva condición y lo anteriormente descrito puede visualizarse en el gráfico de la Fig. 4.59, donde se grafican para una dada excitación, la respuesta de un diferenciador ideal, y las respuestas correspondientes a dos relaciones distintas entre la constante de tiempo del circuito y el semiperíodo de la señal de excitación. Del análisis de la mencionada figura se desprende que a medida que el producto R.C. se hace menor respecto de $\frac{T}{2}$, el circuito diferencia mejor. Es decir, para que el circuito actúe como diferenciador, la constante de tiempo del mismo debe ser mucho menor que el semiperíodo de la excitación, es decir:

$$R.C. \ll \frac{T}{2} \quad (4.179)$$

Obsérvese que la Ec. (4.175) es condición necesaria y suficiente para que el circuito integre, pero nótese que en los instantes inmediatamente posteriores a la inversión de polaridad la misma no se cumple. Pero la Ec. (4.179), es condición necesaria pero no suficiente, pues no es válida para los instantes inmediatos a los cambios de polaridad, como antes ya se mencionara.

Finalmente, se indicarán las *limitaciones* del circuito diferenciador. Desde el punto de vista *teórico*, debido a la condición impuesta por la Ec. (4.179), y del análisis de la Ec. (4.178), surge que el costo de una mejor diferenciación es una tensión de salida más pequeña. Es decir que cuanto más exactamente se efectúe la operación matemática, menor resulta la tensión de salida, y en el límite, la misma será nula cuando dicha operación tiende a realizarse perfectamente. Las limitaciones de carácter *práctico* están referidas a la aparición ineludible de la resistencia interna del generador excitador, y de los parámetros residuales de los elementos pasivos, que al elevarse la frecuencia modificarán el comportamiento del circuito.

En la Fig. 4.60 se muestra un resumen de las características principales de los circuitos integradores y diferenciadores. Estos circuitos se aplican en computadores digitales y analógicos, en circuitos de comunicaciones, radar, televisión y en instrumentos electrónicos de medición y control.

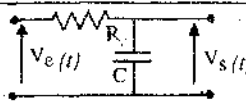
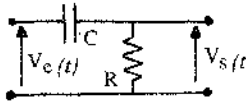
OPERACION	CIRCUITO	RESPUESTA	CONDICION DE DISEÑO
Integración		$V_s(t) \approx \frac{1}{R.C.} \int_{-\infty}^t V_e(t) dt$	$R.C. \gg \frac{T}{2}$
Diferenciación		$V_s(t) \approx R.C. \frac{d V_e(t)}{dt}$	$R.C. \ll \frac{T}{2}$

Fig. 4.60

4.20 Problemas resueltos

4.20.1) Para la configuración ilustrada en la Fig. 4.61 la llave conmutadora permanece en la posición 1 desde $t = 0^+$ hasta $t = 5$ mseg, y luego pasa a la posición 2. Se desea hallar la expresión de $v_C(t)$ y representarla gráficamente.

Solución

Llave en posición 1: $0^+ \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3}$ seg

En estas condiciones resulta el circuito estudiado en el parágrafo 4.4 del mismo es extraída la Ec. (4.27), que se reproduce:

$$v_C(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t) \quad (4.27)$$

dado que $RC = 0,1 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 0,01$ seg. y en función de los datos, la Ec. (4.27) resulta:

$$v_C(t) = 100 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,01}} \right) u(t) \quad (4.180)$$

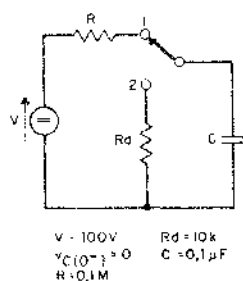


Fig. 4.61

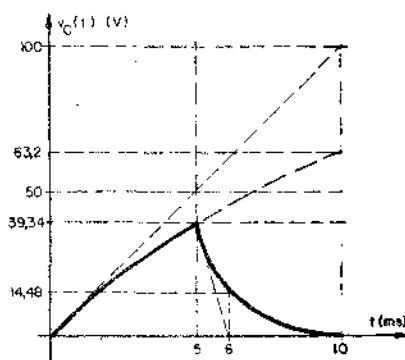


Fig. 4.62

La Ec. (4.180) se representa de la manera acostumbrada en la Fig. 4.62. Nótese que como la llave permanece en la posición 1 hasta 5 mseg, y dado que la constante de tiempo del circuito es de 10 mseg, el capacitor se cargará a sólo una fracción de la tensión total del generador. El valor de dicha tensión para $t = 5$ mseg, puede calcularse a partir de la Ec. (4.180).

$$v_C(5 \text{ mseg}) = 100 \left(1 - e^{-\frac{0,005}{0,01}} \right) = 39,34 \text{ V}$$

Llave en posición 2: $t > 5 \cdot 10^{-3}$ seg

Con la llave en esta posición, resulta el circuito estudiado en el parágrafo 4.9, del mismo se extrae la Ec. (4.50) que se reproduce:

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad (4.50)$$

pero como la referencia es ahora $t = 5$ mseg, se debe realizar en la misma el desplazamiento temporal correspondiente. Además, tal como se analizó en el parágrafo mencionado, K resulta la tensión a la cual se cargó el capacitor en el proceso anterior, que del presente caso es 39,34 V. Por otra parte, la constante de tiempo para el proceso de descarga resulta:

$$R_d C = 10 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} = 0,001 \text{ seg}$$

En base a estas consideraciones la Ec. (4.50) se transforma en:

$$v_C(t - 0,005) = 39,34 e^{-\frac{(t - 0,005)}{0,001}} u(t - 0,005) \text{ [V]} \quad (4.181)$$

La Ec. (4.181) se representa a partir de $t = 5$ mseg en la Fig. 4.62. Nótese que en período de 5 a 10 mseg el capacitor se descarga totalmente dado que al resultar la constante de tiempo de descarga igual a 1 mseg, para el período mencionado transcurren cinco constantes de tiempo.

4.20.2) En el circuito mostrado en la Fig. 4.63, a los 250 mseg de abierto el interruptor, la corriente en el capacitor disminuye a razón de $10 \mu\text{ A}$ por segundo. Se desea calcular el valor de la corriente del generador.

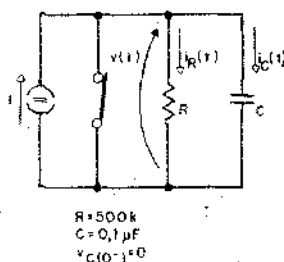


Fig. 4.63

Solución

Por aplicación de la 1° Regla de Kirchhoff resulta:

$$I = i_R(t) + i_C(t) \quad (4.182)$$

Colocando la Ec. (4.182) en función de variable sujeta a condición de continuidad, y nótese que $v(t) = v_R(t) = v_C(t)$ por lo cual,

$$I = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{I}{C} - \frac{v(t)}{RC} = \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{operando,}$$

$$\frac{1}{RC} [RI - v(t)] = \frac{dv(t)}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{dv(t)}{[RI - v(t)]} = \frac{1}{RC} dt \quad \text{pero } d[RI - v(t)] = -dv(t)$$

por lo cual,

$$d \frac{[RI - v(t)]}{RI - v(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

integrando y operando,

$$RI - v(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} \quad \therefore$$

$$v(t) = RI - K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.183)$$

Debido a la aplicación de las condiciones iniciales y de las de continuidad, en la Ec. (4.183) resulta:

$$v(0) = 0 = RI - K e^0 \quad \therefore$$

$$K = RI \quad (4.184)$$

Reemplazando la Ec. (4.184) en la Ec. (4.183),

$$v(t) = RI - RI e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.185)$$

y la corriente puede hallarse como:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

por lo cual operando la Ec. (4.185) resulta:

$$i'(t) = -CRI \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = I e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.186)$$

Por otra parte, en función de los datos, se sabe que a los 0,25 seg la corriente decrece a razón de $10 \mu\text{A}$ por segundo, lo que puede expresarse como:

$$\frac{d i(t)}{dt} = -10^{-5} \frac{\text{A}}{\text{seg}} \quad (4.187)$$

En consecuencia, si se deriva la Ec. (4.186),

$$\frac{d i(t)}{dt} = -\frac{I}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

calculando esta derivada para $t = 0,25$ seg y reemplazando valores,

$$\frac{d i(t)}{dt} = -\frac{I}{500 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} e^{-\frac{0,25}{500 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\frac{d i(t)}{dt} = -\frac{I}{50 \cdot 10^{-3}} e^{-\frac{0,25}{0,05}} \therefore$$

$$\frac{d i(t)}{dt} = -0,135 I \left[\frac{\text{A}}{\text{seg}} \right] \quad (4.188)$$

igualando las Ec. (4.187) y (4.188),

$$-10^{-5} = -0,135 I \therefore$$

$$I = \frac{10^{-5}}{0,135} = 74 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$I = 74 \mu\text{A}$$

4.20.3) En el circuito ilustrado en la Fig. 4.64 el interruptor se abre para un tiempo $t = \infty$. Se supone que el mismo permaneció cerrado el tiempo suficiente para que el circuito alcance el régimen permanente. Se desea encontrar las expresiones de $v_C(t)$; $v_{R_1}(t)$ y $v_{R_2}(t)$, y representarlas gráficamente.

Solución

Debido a los datos podrá determinarse la condición inicial. Si antes de abrir la llave, se llegó al régimen permanente, es evidente que por R_1 circuló toda la corriente de la fuente. Como en ese estado, el capacitor y el resistor R_1 están conectados en paralelo será:

$$v_C(0^-) = R_1 I \quad (4.189)$$

En $t = 0^+$ se abre la llave por lo cual se incluye a R_2 , y por aplicación de la 1ª Regla de Kirchhoff, resulta:

$$I = i_C(t) + i_{R_2}(t) \quad (4.190)$$

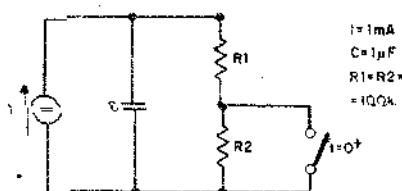


Fig. 4.64

Colocando la Ec. (4.190) en función de variable sujeta a condición de continuidad, y siendo $R_1 + R_2 = R$ resulta:

$$I = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} \quad \text{operando,}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC} [RI - v_C(t)] \quad \therefore$$

$$\frac{dt}{[RI - v_C(t)]} = \frac{1}{RC} dt \quad \text{pero } d[RI - v_C(t)] = -dv_C(t)$$

$$\frac{d[RI - v_C(t)]}{RI - v_C(t)} = -\frac{1}{RC} dt \quad \text{integrando y operando,}$$

$$RI - v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} \quad \therefore$$

$$v_C(t) = RI - K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.191)$$

La constante K se obtendrá en base a las condiciones de continuidad y la condición inicial dada por la Ec. (4.189) resultando:

$$v_C(t) = R_1 I = RI - K \quad \therefore$$

$$K = (RI - R_1 I) = R_2 I \quad (4.192)$$

Reemplazando la Ec. (4.192) en la Ec. (4.191) se obtendrá la expresión buscada para $v_C(t)$:

$$v_C(t) = RI - (R_2 I) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.193)$$

que reemplazando valores,

$$v_C(t) = 200 - 100 e^{-\frac{t}{0,2}} \text{ [V]}; t > 0 \quad (4.194)$$

La Ec. (4.194) se representa en la Fig. 4.65. Además será:

$$v_C(t) = v_{R_1}(t) + v_{R_2}(t) \quad \text{por lo cual,}$$

$$v_{R_1}(t) = \frac{v_C(t) R_1}{R} \quad \text{y} \quad v_{R_2}(t) = \frac{v_C(t) R_2}{R} \quad \text{en consecuencia,}$$

dado que $R_1 = R_2$ y utilizando la Ec. (4.194) resulta:

$$v_{R_1}(t) = 100 - 50 e^{-\frac{t}{0,2}} \text{ [V] } t > 0 \quad (4.195)$$

$$v_{R_2}(t) = 100 - 50 e^{-\frac{t}{0,2}} \text{ [V] } t > 0 \quad (4.196)$$

Las Ecs. (4.195) y (4.196) se representan en las Figs. 4.66 y 4.67 respectivamente.

Nótese, de la Ec. (4.189) que antes de abrir la llave, la tensión en el capacitor es de 100 V, y debido a la condición de continuidad, ésta debe mantenerse inalterable inmediatamente después de abrir la llave, tal como se visualiza en la Fig. 4.65. Como esta tensión se aplica simultáneamente a los resistores R_1 y R_2 , de igual valor, cada uno de ellos soportará la mitad de la misma, tal como se ilustra en las Figs. 4.66 y 4.67; notándose que $v_{R_1}(t)$ pasa de 100 V a 50 V en forma instantánea; transcurridos cinco constantes de tiempo, la suma de la tensión en ambos resistores se hace de 200 V, obviamente igual a la tensión máxima de carga del capacitor para el nuevo estado.

4.21 Problemas propuestos

4.21.1) Para el circuito mostrado en la Fig. 4.68, excitado por la señal de tensión ilustrada en la Fig. 4.69 se desea determinar:

- La expresión de $v_C(t)$ y $v_R(t)$
- Representar gráficamente las expresiones halladas.

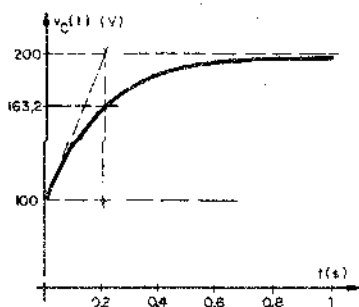


Fig. 4.65

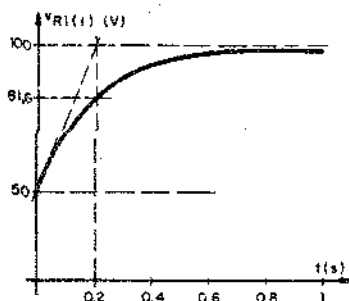


Fig. 4.66

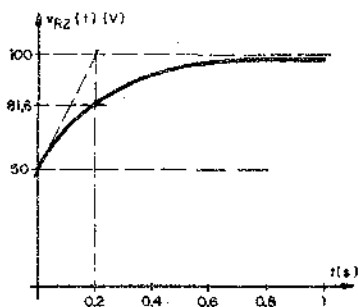


Fig. 4.67

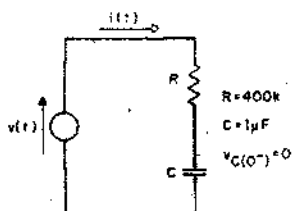


Fig. 4.68

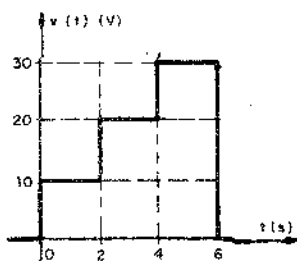


Fig. 4.69

Resultados

a) Aplicando el principio de superposición se llega a que:

$$\begin{aligned}
 v_C(t) = & 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.4}} \right) u(t) + 10 \left(1 - e^{-\frac{(t-2)}{0.4}} \right) u(t-2) + \\
 & + 10 \left(1 - e^{-\frac{(t-0.4)}{0.4}} \right) u(t-4) - 30 \left(1 - e^{-\frac{(t-6)}{0.4}} \right) u(t-6) \text{ [V]}
 \end{aligned}$$

$$v_R(t) = 10 e^{-\frac{t}{0,4}} u(t) + 10 e^{-\frac{(t-2)}{0,4}} u(t-2) + \\ + 10 e^{-\frac{(t-4)}{0,4}} u(t-4) - 30 e^{-\frac{(t-6)}{0,4}} u(t-6) \text{ [V]}$$

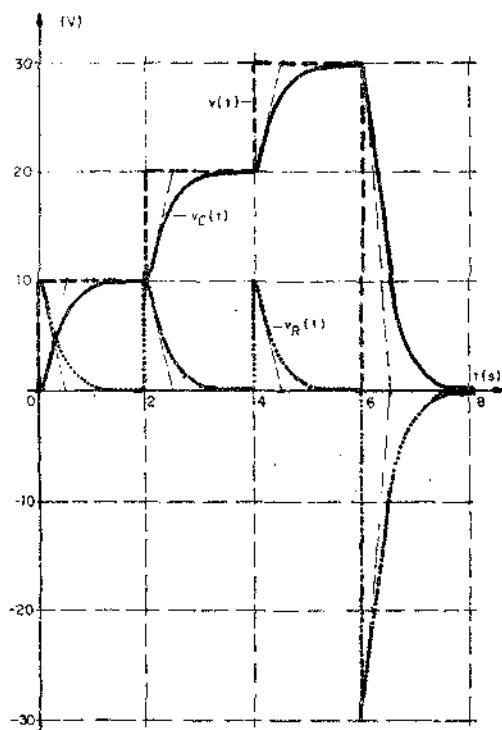


Fig. 4.70

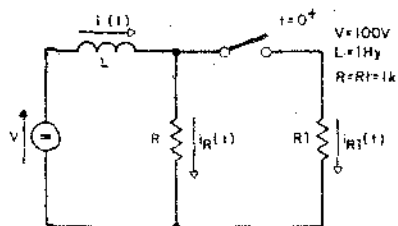


Fig. 4.71

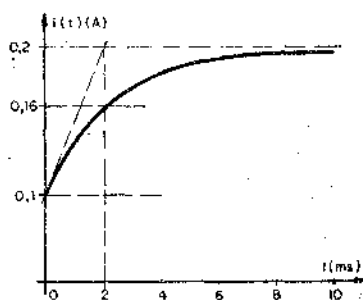


Fig. 4.72

b) En la Fig. 4.70 se representan las variables halladas, además de la excitación. Nótese que como $\tau_c = 0,4$ seg, y como el tiempo de duración de cada escalón es de 2 seg, trascurren cinco constantes de tiempo, por lo cual las variables eléctricas alcanzan sus valores finales.

4.21.2) En el circuito ilustrado en la Fig. 4.71 el interruptor se cierra para un tiempo $t = 0^+$. Se supone que el mismo permaneció abierto el tiempo suficiente para que el circuito alcance el régimen permanente.

Se desea encontrar:

- La condición inicial.
- Las expresiones para $i_R(t)$ e $i_{R_1}(t)$.
- Representarlas gráficamente.

Resultados

$$a) \quad i(0^-) = \frac{V}{R} = 0,1 \text{ A}$$

$$b) \quad \text{siendo } R_T = \frac{R R_1}{R + R_1} \text{ resulta,}$$

$$i(t) = \frac{V}{R_T} - \left(\frac{V}{R_T} - \frac{V}{R} \right) e^{-\frac{t}{L/R_T}}$$

reemplazando valores,

$$i(t) = 0,2 - 0,1 e^{-\frac{t}{0,002}} \text{ [A] para } t > 0 \quad (4.197)$$

$$i_{R(t)} = 0,1 - 0,05 e^{-\frac{t}{0,002}} \text{ [A] para } t > 0 \quad (4.198)$$

$$i_{R_1(t)} = 0,1 - 0,05 e^{-\frac{t}{0,002}} \text{ [A] para } t > 0 \quad (4.199)$$

c) Las Ecs. (4.197) (4.198) y (4.199) se representan en las Figs. 4.72, 4.73 y 4.74 respectivamente.

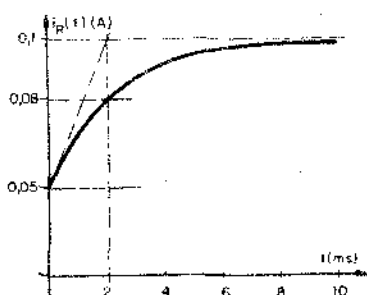


Fig. 4.73

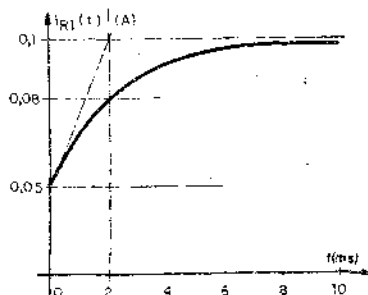


Fig. 4.74

Nótese que antes de cerrar el interruptor la corriente $i(t)$ es de 0,1 A; e inmediatamente de operado el interruptor mantiene su valor debido a la presencia del inductor. Ese valor de corriente se reparte entre los resistores. Llegado al régimen permanente la suma de las corrientes en los resistores se iguala a la del inductor, que es la corriente total del circuito.

4.21.3) Para el circuito mostrado en la Fig. 4.75, excitado por la señal de tensión que se ilustra en la Fig. 4.76 se desea:

- hallar la expresión de $i(t)$.
- representarla gráficamente.

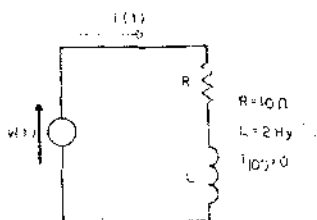


Fig. 4.75

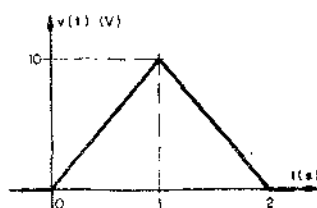


Fig. 4.76

Resultados

$$a) \quad i(t) = \left[-0,2 + t + 0,2 e^{-\frac{t}{0,2}} \right] u(t) + \left[0,4 - 2(t-1) - 0,4 e^{-\frac{(t-1)}{0,2}} \right] u(t-1) + \left[-0,2 + (t-2) + 0,2 e^{-\frac{(t-2)}{0,2}} \right] u(t-2) \quad [A]$$

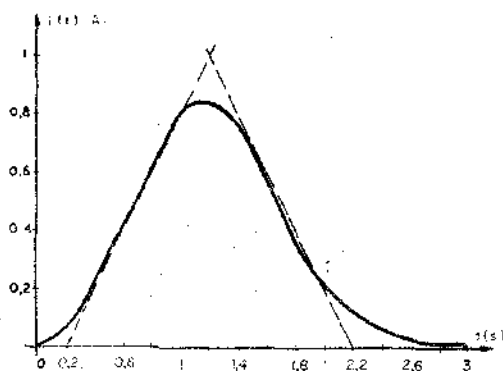


Fig. 4.77

b) La representación gráfica pedida se ilustra en la Fig. 4.77. Nótese que $\tau_L = 0,2$ seg, por lo cual en el tiempo de 1 seg la corriente puede alcanzar los valores correspondientes a la componente forzada.

Respuesta de circuitos con tres tipos de elementos pasivos

5.1 Introducción

En este capítulo desarrollado en el dominio del tiempo, se estudiará la respuesta de un circuito R.L.C. en paralelo excitado por una señal escalón. Se elige el circuito paralelo y no el serie, pues el primero de ellos es el más utilizado en electrónica. Por otra parte aplicando el *principio de dualidad* podrán extenderse los resultados hallados para el caso de asociación en serie. Es de hacer notar que, como en este caso la respuesta se complica, será analizado el comportamiento del circuito elegido solamente para excitación escalón. De acuerdo con lo expuesto en los capítulos anteriores, es posible predecir el comportamiento del circuito. Es decir, que si de los tres elementos, dos de ellos prevalecen sobre el tercero, el circuito responderá con distintos regímenes, ya estudiados anteriormente, a saber:

Si R y C preponderan frente a L , o si R y L prevalecen sobre C , el circuito poseerá una constante de tiempo, y en consecuencia existirá una componente libre que se extinguirá según una exponencial.

Si C y L son preponderantes frente a R , de tal manera que puede despreciarse el efecto disipativo, el circuito no presentará constante de tiempo, y la componente libre no se extinguirá, resultando una respuesta semiperiódica de amplitud prácticamente constante.

Si finalmente C y L son preponderantes, pero no lo suficiente como para despreciar el efecto disipante de R , resultará una respuesta que es combinación de las anteriormente mencionadas. Es decir una respuesta oscilatoria de amplitud amortiguada según una exponencial, cuyo exponente dependerá de la constante de tiempo del circuito. Concluyendo, se puede decir que según los valores que adopten los elementos pasivos incluidos, se obtendrán algunas de las respuestas anteriormente mencionadas.

5.2 Respuesta de un circuito R.L.C. paralelo excitado por un escalón de corriente

Pasando a considerar el circuito ilustrado en la Fig. 5.1, con el objeto de hallar la ecuación de equilibrio instantáneo, se plantea la 1ª Regla de Kirchhoff, resultando:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \quad (5.1)$$

Se debe expresar la Ec. (5.1) en función de la variable sujeta a condición de continuidad. Eligiendo $i_L(t)$, puesto que derivando la misma puede hallarse $v_C(t)$. No es recomendable el proceso inverso pues conduce a un problema de integración.

Nótese que al ser común la tensión para todos los elementos resulta que:

$$v(t) = v_R(t) = v_C(t) = v_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}$$

por lo que:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{d i_L(t)}{dt} \quad (5.2)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = L C \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} \quad (5.3)$$

reemplazando las Ecs. (5.2) y (5.3) en la Ec. (5.1), y explicitando la excitación se tiene:

$$iu(t) = \frac{L}{R} \frac{d i_L(t)}{dt} + i_L(t) + L C \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$$

para $t > 0$ podrá eliminarse $u(t)$. Operando y ordenando la ecuación anterior resulta:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d i_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC}; \quad t > 0 \quad (5.4)$$

se procederá a resolver la ecuación diferencial.

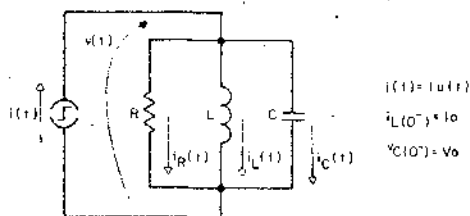


Fig. 5.1

a) *Solución particular de la ecuación diferencial completa*

Ensayando como solución una del mismo tipo que la excitación, es decir una constante,

$$i_{LP}(t) = A \quad (5.5)$$

Reemplazando convenientemente la Ec. (5.5) en la Ec. (5.4),

$$0 + \frac{1}{RC} 0 + \frac{1}{LC} A = \frac{I}{LC}$$

$A = I$ y en consecuencia la Ec. (5.5) queda:

$$i_{LP}(t) = I \quad (5.6)$$

b) *Solución de la ecuación diferencial homogénea*

Anulando la excitación en la Ec. (5.4),

$$\frac{d^2 i_{Lh}(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d i_{Lh}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_{Lh}(t) = 0 \quad (5.7)$$

Este tipo de ecuación diferencial se resuelve por el método de Euler proponiendo como solución:

$$i_{Lh}(t) = e^{Bt} \quad (5.8)$$

Reemplazando convenientemente la Ec. (5.8) en la Ec. (5.7) resulta:

$$B^2 e^{Bt} + \frac{B}{RC} e^{Bt} + \frac{1}{LC} e^{Bt} = 0$$

como $e^{Bt} \neq 0$ resulta

$$B^2 + \frac{B}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (5.9)$$

La Ec. (5.9) es la *ecuación característica* asociada a la ecuación diferencial homogénea, y siendo una ecuación de segundo grado sus soluciones son:

$$B_{1-2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5.10)$$

$$\text{definiendo } \frac{1}{2RC} = \alpha \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_o^2 \quad (5.12)$$

la Ec. (5.10) resulta:

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \quad (5.13)$$

Con el objeto de determinar el tipo de raíz a obtener, es necesario normalizar uno de los parámetros. Para ello se puede multiplicar y dividir el radicando de la Ec. (5.13) por ω_o^2 , por lo cual:

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \sqrt{\frac{\omega_o^2 (\alpha^2 - \omega_o^2)}{\omega_o^2}} = -\alpha \pm \omega_o \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\omega_o}\right)^2 - 1} \quad (5.14)$$

$$\text{definiendo } \frac{\alpha}{\omega_o} = \gamma \quad (5.15)$$

donde γ es un número que no depende de la excitación, y sólo es función del valor de los parámetros circuitales, como puede apreciarse si se reemplazan las Ecs. (5.11) y (5.12) en la Ec. (5.15) es decir:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\omega_o} = \frac{\frac{1}{2RC}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.16)$$

Nótese que cuanto mayor es la influencia del elemento disipativo (menor la resistencia), más elevado es el valor de γ . Como se vio en la introducción, al influir más el resistor, la respuesta resultará más amortiguada.

Reemplazando ahora la Ec. (5.15) en la Ec. (5.14),

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \omega_o \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (5.17)$$

En la Ec. (5.17) según los valores que adopte γ podrán obtenerse distintos valores de B , que a su vez definirán distintos regímenes, a saber:

$\gamma < 1$: dos raíces complejas conjugadas $\Rightarrow$ Régimen subamortiguado u oscilatorio amortiguado

$\gamma > 1$: dos raíces reales y distintas $\Rightarrow$ Régimen amortiguado

$\gamma = 1$: dos raíces reales y coincidentes $\Rightarrow$ Régimen crítico

Entonces, para estudiar cada uno de los regímenes mencionados, es necesario continuar resolviendo la ecuación diferencial homogénea, a partir de la Ec. (5.17), para cada uno de los casos.

5.2.1 $\gamma < 1$. Régimen subamortiguado u oscilatorio amortiguado: Este régimen, según se desprende de la Ec. (5.16), se define cuando:

$$\alpha < \omega_o \quad \text{o bien,}$$

lo que implica que $2RC > \sqrt{\frac{L}{C}}$

Continuando ahora con la solución en la *ecuación diferencial homogénea*. En este caso $\gamma < 1$ la Ec. (5.17) resulta:

$$B_{1-2} = -\alpha \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (5.18)$$

$$\text{definiendo, } \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} = \omega_d \quad (5.19)$$

reemplazando la Ec. (5.19) en la Ec. (5.18),

$$B_{1-2} = -\alpha \pm j \omega_d \quad (5.19)$$

reemplazando la Ec. (5.19) en la solución propuesta por la Ec. (5.8),

$$i_{Lh}(t) = e^{(-\alpha \pm j \omega_d)t} \quad \text{surgen dos soluciones:}$$

$$i_{Lh1}(t) = K_1 e^{(-\alpha + j \omega_d)t} \quad , \quad i_{Lh2}(t) = K_2 e^{(-\alpha - j \omega_d)t}$$

y de la combinación lineal de las soluciones singulares hallar la solución más general.

$$i_{Lh}(t) = K_1 e^{(-\alpha + j \omega_d)t} + K_2 e^{(-\alpha - j \omega_d)t} \quad (5.20)$$

c) Solución general de la ecuación diferencial completa

Se halla sumando la solución particular dada por la Ec. (5.6) y la de la homogénea dada por la Ec. (5.20), resultando:

$$i_L(t) = I + K_1 e^{(-\alpha + j \omega_d)t} + K_2 e^{(-\alpha - j \omega_d)t} \quad (5.21)$$

Operando con la Ec. (5.21) se logra una expresión de fácil interpretación:

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} (K_1 e^{j \omega_d t} + K_2 e^{-j \omega_d t})$$

y como $e^{\pm j \omega_d t} = \cos \omega_d t \pm j \sin \omega_d t$ resulta,

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} [K_1 (\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + K_2 (\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)]$$

agrupando

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} [(K_1 + K_2) \cos \omega_a t + j (K_1 - K_2) \sin \omega_a t]$$

si $K_1 + K_2 = K_3$ y $j (K_1 - K_2) = K_4$ resulta,

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} (K_3 \cos \omega_a t + K_4 \sin \omega_a t) \quad (5.22)$$

y como ya se conoce, la suma indicada entre paréntesis resultará una función senoidal, cuya amplitud, llamada K_5 , y su fase llamada θ , dependerán de las amplitudes y fases de los componentes sumandos. En consecuencia la Ec. (5.22) resulta:

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} K_5 \sin (\omega_a t + \theta) \quad (5.23)$$

d) Cálculo de las constantes

Las incógnitas son dos; K_5 y θ ; y se dispone solamente de la Ec. (5.23); la otra ecuación necesaria puede obtenerse a partir de:

$$v(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}$$

por lo cual empleando la Ec. (5.23) surge que:

$$v(t) = L e^{-\alpha t} K_5 [-\alpha \sin (\omega_a t + \theta) + \omega_a \cos (\omega_a t + \theta)] = \quad (5.24)$$

$$= L e^{-\alpha t} K_5 \sqrt{\alpha^2 + \omega_a^2} \sin (\omega_a t + \theta + \frac{\pi}{2} + \delta)$$

$$\text{donde } \delta = \arctg \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

Disponiendo de las Ecs. (5.23) y (5.24) se podrá determinar K_5 y θ .

Debido a la aplicación de las condiciones de continuidad para el inductor, y de la condición inicial $i_{L(0)} = I_0$, de la Ec. (5.23) surge que:

$$I_0 = I + K_5 \sin \theta$$

$$K_5 \sin \theta = I_0 - I \quad (5.25)$$

Aplicando las condiciones de continuidad para el capacitor, y de la condición inicial $v_{C(0)} = V_0$, de la Ec. (5.24) resulta:

$$V_0 = -L K_5 \alpha \sin \theta + L K_5 \omega_a \cos \theta \quad (5.26)$$

reemplazando en la Ec. (5.26) el valor de $K_5 \sin \theta$ dado por la Ec. (5.25);

$$V_0 = -L \alpha (I_0 - I) + L K_5 \omega_a \cos \theta$$

$$K_5 \cos \theta = \frac{V_0 + L \alpha (I_0 - I)}{L \omega_a} \quad (5.27)$$

elevando al cuadrado las Ecs. (5.25) y (5.27) y sumándolos resulta:

$$K_s^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (I_0 - I)^2 + \left[\frac{V_0 + L \alpha (I_0 - I)}{L \omega_a} \right]^2$$

como $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

surge que,

$$K_s = \sqrt{(I_0 - I)^2 + \left[\frac{V_0 + L \alpha (I_0 - I)}{L \omega_a} \right]^2} \quad (5.28)$$

conocida esta expresión, puede reemplazarse en la Ec. (5.25) y obtenerse la de θ .

$$\theta = \arcsen \left(\frac{I_0 - I}{K_s} \right) \quad (5.29)$$

Con las Ecs. (5.28) y (5.29) pueden obtenerse los valores de K_s y θ . Estas constantes se dejan indicadas pero no serán reemplazadas en la Ec. (5.23) a efecto de no complicar las ecuaciones.

En el caso de *condiciones iniciales nulas*, es decir $i_{L(0^-)} = 0$ y $v_{C(0^-)} = 0$; de la Ec. (5.28) resulta:

$$K_s = \sqrt{I^2 + \frac{L^2 \alpha^2 I^2}{L^2 \omega_a^2}} = \sqrt{I^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega_a^2} \right)}$$

y por la Ec. (5.19) se sabe que $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2}$ $\therefore$

$$K_s = \sqrt{I^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega_0^2 (1 - \gamma^2)} \right)}$$

y por la Ec. (5.11) es $\gamma = \alpha/\omega_0$ $\therefore$

$$K_s = \sqrt{I^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \right)} \quad \therefore$$

$$K_s = I \sqrt{\frac{1}{1 - \gamma^2}} \quad (5.30)$$

En lo referente a θ , de la Ec. (5.29) resulta:

$$\theta = \arcsen \left(-\frac{I}{K_s} \right) \quad \text{y reemplazando la Ec. (5.30),}$$

$$\theta = \arcsen (-\sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (5.31)$$

Las Ecs. (5.30) y (5.31) dan las expresiones de cálculo de K_s y θ para condiciones iniciales nulas.

e) *Representaciones gráficas*

Graficando la excitación, $i_L(t)$, $v(t)$ e $i_C(t)$, expresiones que se reproducen a continuación. Nótese que no se representa $i_R(t)$ pues sólo difiere de $v(t)$ por una constante.

$$i(t) = I u(t) \\ i_L(t) = I + e^{-\alpha t} K_s \sin(\omega_a t + \theta) \quad (5.23)$$

$$v(t) = I_0 e^{-\alpha t} K_s [-\alpha \sin(\omega_a t + \theta) + \omega_a \cos(\omega_a t + \theta)] = \quad (5.24) \\ = I_0 e^{-\alpha t} K_s \sqrt{\alpha^2 + \omega_a^2} \sin\left(\omega_a t + \theta + \frac{\pi}{2} + \delta\right) \\ \text{siendo}$$

$$\delta = \arctg \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$$

$$i_C(t) = I - i_L(t) - i_R(t) \quad (5.32)$$

Todas las expresiones anteriores son válidas, naturalmente, para $t > 0$. En la Fig. 5.2.a) se grafica la excitación. Se consideran condiciones iniciales no nulas. En la Fig. 5.2.b) se grafica $i_L(t)$. De la Ec. 5.23 surge

$$i_L(0) = I + K_s \sin \theta$$

pero la última ecuación debe ser igual a I_0 debido a la condición de continuidad de corriente en el inductor,

$$i_L(0) = I + K_s \sin \theta = I_0 \quad (5.33)$$

Además,

$$i_L(\infty) \rightarrow I \quad (5.34)$$

y la oscilación tendrá una envolvente superior:

$$I + K_s e^{-\alpha t}$$

y una envolvente inferior:

$$I - K_s e^{-\alpha t}$$

En la Fig. 5.2.c) se grafica $v(t)$. De la observación de la Ec. 5.24 se deduce que será una oscilación de igual pulsación que $i_L(t)$. Además deberá adelantar respecto de esta última en $\frac{\pi}{2} + \delta \approx \frac{\pi}{2}$ para $\gamma \ll 1$. Los valores límites resultan:

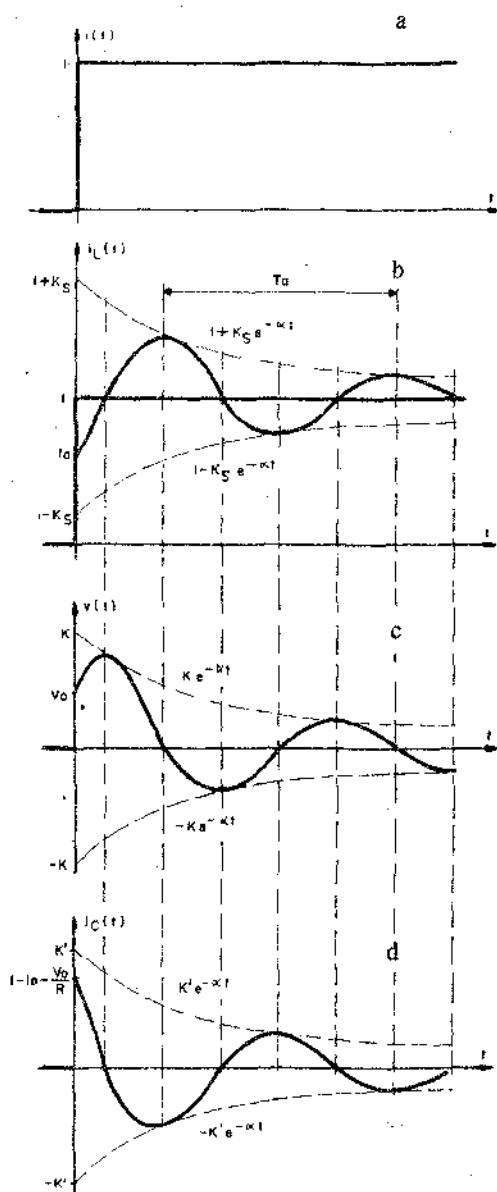


Fig. 5.2

$$v(0) = L K_5 [-\alpha \operatorname{sen} \theta + \omega_a \cos \theta] = V_0 \quad (5.35)$$

$$v(\infty) \rightarrow 0 \quad (5.36)$$

y poseerá además una envolvente superior que puede indicarse como:

$$K e^{-\alpha t}$$

y una envolvente inferior:

$$-K e^{-\alpha t}$$

Respecto de $i_R(t)$, sus valores límites resultan:

$$i_R(0) = \frac{v(0)}{R} \quad \text{y por la Ec. (5.35)}$$

$$i_R(0) = \frac{V_0}{R} \quad (5.37)$$

y por la Ec. (5.36),

$$i_R(\infty) \rightarrow 0 \quad (5.38)$$

En la Fig. 5.2 *d*) se grafica $i_C(t)$. Esta oscilación debe adelantar respecto de $v(t)$ en $\frac{\pi}{2} + \delta \approx \frac{\pi}{2}$ para $\gamma \ll 1$. Considerando la Ec. (5.32) surgen los valores límites:

$$i_C(0) = I - i_L(0) - i_R(0)$$

utilizando las Ecs. (5.33) y (5.37):

$$i_C(0) = I - I_0 - \frac{V_0}{R}$$

por otra parte,

$$i_C(\infty) = I - i_L(\infty) - i_R(\infty)$$

empleando las Ecs. (5.34) y (5.38) resulta:

$$i_C(\infty) = I - I - 0 = 0$$

y poseerá una envolvente superior que puede indicarse como $K' e^{-\alpha t}$ y una envolvente inferior $-K' e^{-\alpha t}$

Nótese que en todos los casos, la oscilación amortiguada posee una pulsación ω_a , y en consecuencia un pseudoperíodo T_a , y la relación entre ambos puede expresarse como:

$$\omega_a T_a = 2 \pi$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad (5.39)$$

Reemplazando en la Ec. (5.39) el valor de ω_a dado por la Ec. (5.19) resulta:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\gamma^2}} \quad \therefore$$

$$T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (5.40)$$

y la Ec. (5.40) da la expresión del pseudoperíodo de la oscilación amortiguada.

Además se aprecia que el amortiguamiento de las oscilaciones depende de $e^{-\alpha t}$, que recibe el nombre de *coeficiente o factor de amortiguamiento*.

Por otra parte, como la característica de la amortiguación está dada por el valor de α , se lo denomina *constante absoluta de amortiguamiento*.

Recordando de la Ec. (5.11) que:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

se advierte que su inversa goza de las propiedades de una constante de tiempo pero aplicada a las envolventes de los máximos y mínimos en la oscilación. Cuanto más elevado es el valor de α , mayor será el amortiguamiento, es decir, mayor es la velocidad de decrecimiento de los exponentes envolventes. Pero α no es totalmente eficiente en su misión de caracterizar el amortiguamiento, ya que puede variarse R y C , alterando el régimen, pero de modo que su producto permanezca constante, por lo cual α no variará a pesar de variar R y C .

Por ese motivo, se define la *constante relativa o normalizada de amortiguamiento*,

$$\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{por Ec. (5.16)}$$

donde ω_0 es la pulsación de la oscilación libre o natural del circuito sin amortiguamiento, que de la Ec. (5.12) resulta:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

de donde se deduce que si no varía L y C , la pulsación de la oscilación libre se mantendrá constante. Finalmente, queda por verificar si γ es realmente caracterizante del amortiguamiento. Esto puede observarse a partir de la Ec. (5.19) que se reproduce,

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\gamma^2} \quad (5.19)$$

Tomando por ejemplo dos casos típicos, resulta que si $R \rightarrow \infty$; o sea $\gamma \rightarrow 0$; $\omega_a \rightarrow \omega_0$ es decir que la pulsación de oscilación del circuito y la libre coinciden.

Si $2R = \sqrt{\frac{L}{C}}$; o sea $\gamma = 1$; $\omega_a = 0$ lo que significa un período asociado infinito, es decir que da lugar a un régimen aperiódico.

En consecuencia puede afirmarse que γ es una constante que caracteriza eficazmente el comportamiento del modelo.

Los gráficos de la Fig. 5.2, como ya fue aclarado se han realizado para las condiciones iniciales impuestas en la Fig. 5.1.

Si por otra parte se considera $i_L(0^-) = 0$ y $v_C(0^-) = 0$, es decir que se comienza de condiciones iniciales nulas, es evidente que los valores finales de las oscilaciones mostradas en la Fig. 5.2 no se alterarán, pero sí lo harán sus valores iniciales. En consecuencia $i_L(t)$, $v_L(t)$ e $i_R(t)$ partirán de un valor nulo, e $i_C(t)$ del valor I ; todos guardando entre sí los desfases correspondientes.

Finalmente se realizará un análisis conceptual de los procesos descriptos en los gráficos de la Fig. 5.2.

f) Interpretación conceptual

f.1) En el instante inicial se aplica un incremento brusco de corriente $i(t) = I u(t)$. Debido a las condiciones de continuidad, $i_L(t)$ y $v_C(t)$ no pueden variar en forma discontinua. Pero como el capacitor y el resistor están conectados en paralelo, la tensión sobre ellos es la misma, y en consecuencia no podrán variar en forma brusca $v_R(t)$ e $i_R(t)$. Si entonces no pueden variar en forma brusca $i_C(t)$ e $i_L(t)$, el escalón de corriente deberá ser absorbido íntegramente por el capacitor a fin de satisfacer la 1ª Regla de Kirchhoff.

f.2) Luego que el capacitor absorbió el escalón de corriente, el mismo comienza a cargarse y se modificarán los valores de $i_R(t)$ e $i_L(t)$. Pasado el tiempo necesario para que se anule la componente libre, las oscilaciones serán de amplitud nula desapareciendo la fuerza contra electromotriz en el inductor, que se comporta como un cortocircuito, y finalmente toda la corriente circulará por él. El hecho de que la oscilación sea amortiguada se debe a la presencia del resistor que disipa energía.

5.2.2 $\gamma > 1$ Régimen sobreamortiguado: Este régimen, como se deduce de la Ec. (5.16) se define cuando:

$$\alpha > \omega_0 \text{ o bien} \\ 2RC < \sqrt{LC}$$

Continuando, entonces, con la solución de la ecuación diferencial homogénea. En este caso de $\gamma > 1$ la Ec. (5.17) se presenta como sigue:

$$B_{1,2} = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (5.17)$$

Esta ecuación puede ser expresada:

$$B_{1-2} = \omega_0 \left(-\frac{\alpha}{\omega_0} \pm \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) = -\omega_0 (\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

donde la presencia de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ no implica la existencia de oscilaciones en la solución, pues el exponente es real y por lo tanto no conducirá a funciones trigonométricas.

Reemplazando esta ecuación en la solución propuesta por la Ec. (5.8), resulta:

$$i_{Lh}(t) = e^{-\omega_0 (\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - 1}) t}$$

de donde surgen dos soluciones:

$$i_{Lh1}(t) = K_1 e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t}$$

$$i_{Lh2}(t) = K_2 e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t}$$

La solución general resulta de la combinación lineal de las soluciones singulares:

$$i_{Lh}(t) = K_1 e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} + K_2 e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} \quad (5.41)$$

c) Solución general de la ecuación diferencial completa

Se obtiene sumando las soluciones dadas por Ecs. 5.6 y 5.41, resultando:

$$i_L(t) = I + K_1 e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} + K_2 e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} \quad (5.42)$$

d) Cálculo de las constantes

Teniendo dos incógnitas, K_1 y K_2 ; se dispone solamente de la Ec. (5.42). La otra ecuación necesaria puede obtenerse a partir de $v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. Teniendo en cuenta la Ec. (5.42) resulta:

$$\begin{aligned} v(t) = & -\omega_0 L K_1 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} - \\ & - \omega_0 L K_2 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Las Ecs. (5.42) y (5.43) conjuntamente con las condiciones iniciales permitirán hallar las constantes K_1 y K_2 . Teniendo en cuenta la condición de continuidad para el inductor y su condición inicial $i_{L(0^-)} = I_0$, la Ec. (5.42) conduce a:

$$I_0 = I + K_1 + K_2$$

$$\therefore K_1 = I_0 - I - K_2 \quad (5.44)$$

Aplicando la condición de continuidad para el capacitor y la condición inicial $v_{C(0^-)} = V_0$, de la Ec. (5.43) resulta:

$$V_0 = -\omega_0 L K_1 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \omega_0 L K_2 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \quad (5.45)$$

Reemplazando en la Ec. (5.45) la expresión de K_1 dada por la Ec. (5.44) resulta:

$$V_0 = -\omega_0 L (I_0 - I - K_2) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \omega_0 L K_2 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

$$V_0 = -\omega_0 L (I_0 - I) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) +$$

$$+ \omega_0 L K_2 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \omega_0 L K_2 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

Simplificando y operando:

$$V_0 = -\omega_0 L (I_0 - I) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) - 2 \omega_0 L K_2 \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$\therefore K_2 = -\frac{V_0 + \omega_0 L (I_0 - I) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})}{2 \omega_0 L \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (5.46)$$

y reemplazando la Ec. (5.46) en la Ec. (5.44):

$$K_1 = (I_0 - I) + \frac{V_0 + \omega_0 L (I_0 - I) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})}{2 \omega_0 L \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (5.47)$$

Con las Ecs. (5.46) y (5.47) pueden obtenerse los valores de K_1 y K_2 . Estas constantes se dejan indicadas y no se reemplazan en la Ec. (5.42), a efectos de no extender innecesariamente las expresiones.

En el caso de condiciones iniciales nulas, es decir $i_{L(0^-)} = v_{C(0^-)} = 0$, la Ec. (5.46) resulta:

$$K_2 = I \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (5.48)$$

y la Ec. (5.47) queda:

$$K_1 = -I \left(1 - \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \quad (5.49)$$

e) Representaciones gráficas

Graticando la excitación, las corrientes $i_L(t)$ e $i_C(t)$ y la tensión $v(t)$. Obsérvese que no se representa $i_R(t)$, pues sólo difiere de $v(t)$ en una constante.

Denominando,

$$\frac{1}{\omega_o (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})} = \tau_1 \quad (5.50)$$

y

$$\frac{1}{\omega_o (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})} = \tau_2 \quad (5.51)$$

Donde, obviamente, es $\tau_1 > \tau_2$

Las variables a representar tienen entonces las ecuaciones siguientes:

Excitación:

$$i(t) = I u(t) \quad (5.52)$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (5.50) y (5.51), la Ec. (5.42) puede expresarse:

$$i_L(t) = I + K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (5.53)$$

Análogamente, la Ec. (5.43) puede escribirse:

$$v(t) = -\frac{L K_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{L K_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (5.54)$$

Teniendo en cuenta que $i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$, en base a la Ec. (5.54) puede escribirse:

$$i_C(t) = \frac{L C K_1}{\tau_1^2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{L C K_2}{\tau_2^2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (5.55)$$

Las expresiones de las Ecs. (5.53) a (5.55) son válidas sólo para $t > 0$. Efectuando la representación gráfica con condiciones iniciales nulas, ya que para el caso general se dan varias alternativas posibles, según sean los valores y signos de V_o e I_o e $(I_o - I)$.

En la Fig. 5.3.b) se muestra la excitación $i(t)$. Analizando la Ec. (5.48) puede apreciarse que, para condiciones iniciales nulas es siempre $K_2 > 0$.

Por otra parte, como $K_1 = -(I + K_2)$, resulta $K_1 < 0$. Además, obviamente es $|K_1| > |K_2|$.

En la Fig. 5.3.b) se representan las componentes libres $i'_{Lh(t)}$ e $i''_{Lh(t)}$ de la corriente en el inductor, teniendo en cuenta que, como ya se dijo, es $\tau_1 > \tau_2$.

$$i'_{Lh}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$i''_{Lh}(t) = K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

En el mismo gráfico se representa la componente libre:

$$i_{Lh}(t) = i'_{Lh}(t) + i''_{Lh}(t)$$

Nótese que $i_{Lh(0)} = K_1 + K_2$, que teniendo en cuenta las Ecs. (5.46) y (5.47), resulta:

$$i_{Lh(0)} = I_0 - I$$

o para condiciones iniciales nulas:

$$i_{Lh(0)} = -I$$

Además resulta:

$$i_{Lh(\infty)} \rightarrow 0$$

En la Fig. 5.3.c) se representa $i_L(t) = I + i_{Lh}(t)$, de acuerdo con la Ec. (5.53). Según la cual es:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0 = I + K_1 + K_2$$

$$i_L(\infty) \rightarrow I$$

Para representar $v(t)$, es importante recordar que $v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. En consecuencia, donde $i_L(t)$ presenta un punto de inflexión, $v(t)$ tendrá un punto *extremal* (máximo o mínimo). Puesto que la pendiente de $i_L(t)$ es siempre positiva, es posible afirmar que se trata de un máximo.

Por otra parte, puesto que $v(0^+) = v(0^-) = V_0 = 0$, la pendiente de la tangente en el origen correspondiente a $i_L(t)$ deberá ser nula. Está claro que si $V_0 > 0$ la pendiente mencionada debería ser positiva y si $V_0 < 0$ debería ser negativa, por lo que la curva de $i_L(t)$ presentaría un punto *extremal*.

En la Fig. 5.3.d) se representan las componentes:

$$v^*(t) = -\frac{L K_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

y

$$v''(t) = -\frac{L K_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Siendo $K_1 < 0$ y como L y τ_1 son positivos, resulta $-\frac{L K_1}{\tau_1} > 0$. Análogamente $-\frac{L K_2}{\tau_2} < 0$. Se observa además que:

$$v'(\infty) \rightarrow 0$$

$$v''(\infty) \rightarrow 0$$

En el mismo gráfico se dibuja la tensión total:

$$v(t) = v'(t) + v''(t)$$

que, como ya se dijo, presenta un máximo. Derivando $v(t)$ en la Ec. (5.54) e igualando a cero resulta:

$$\frac{L \cdot K_1}{\tau_1^2} e^{-\frac{t_{mv}}{\tau_1}} + \frac{L \cdot K_2}{\tau_2^2} e^{-\frac{t_{mv}}{\tau_2}} = 0$$

De donde puede despejarse el tiempo correspondiente al máximo:

$$t_{mv} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)} \ln \left[-\frac{K_2}{K_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2 \right] \quad (5.56)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de τ_1 y τ_2 dadas por las Ecs. (5.50) y (5.51) queda:

$$t_{mv} = \frac{1}{2 \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \left[-\frac{K_2}{K_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2 \right]$$

$$\text{también, } t_{mv} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \ln \left[-\frac{K_2}{K_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2 \right] \quad (5.57)$$

Reemplazando en la Ec. (5.57) las expresiones de K_1, K_2, τ_1 y τ_2 dadas por las Ecs. (5.46), (5.47), (5.50) y (5.51) y operando, resulta:

$$t_{mv} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L \cdot C}{\gamma^2 - 1}} \ln \left[\frac{V_0 + \omega_0 L (I_0 - I) (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})}{V_0 + \omega_0 L (I_0 - I) (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})} \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right)^2 \right] \quad (5.58)$$

para condiciones iniciales nulas:

$$t_{mv_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L \cdot C}{\gamma^2 - 1}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (5.59)$$

Finalmente, la Ec. (5.54) muestra que:

$$v(0) = V_0$$

$$v(\infty) \rightarrow 0$$

Como ya se mencionó, la curva de $i_R(t)$ se obtiene dividiendo por R a $v(t)$.

Para graficar $i_C(t)$, es conveniente recordar que $i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$. Observando

que $v(t)$ comienza con una pendiente positiva, decreciente hasta anularse en el máximo, para luego cambiar de signo y aumentar, hasta llegar al punto de inflexión, en que comienza a decrecer. Por lo tanto, $i_C(t)$ parte de un valor positivo, decrece, cruza el eje, presenta un mínimo y luego tiende a cero, según se aprecia en la Fig. 5.3.e).

Puesto que $i_C(t) = I - i_L(t) - i_R(t)$, en el origen será:

$$i_C(0) = I - I_0 - \frac{V_0}{R} \quad \text{en este caso } i_C(0) = I$$

Por otra parte, según la Ec. (5.55) resulta:

$$i_C(\infty) \rightarrow 0$$

Al igual que para $v(t)$, se puede hallar el tiempo t_{mc} para el cual se produce el mínimo de $i_C(t)$. Derivando la Ec. (5.55) e igualando a cero, resulta:

$$\frac{di_C(t)}{dt} = -\frac{LCK_1}{\tau_1^3} e^{-\frac{tmc}{\tau_1}} - \frac{LCK_2}{\tau_2^3} e^{-\frac{tmc}{\tau_2}} = 0$$

$$\therefore t_{mc} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} \ln \left[-\frac{K_2}{K_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^3 \right]$$

y procediendo como en el caso anterior:

$$t_{mc} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{LC}{\gamma^2 - 1}} \ln \left[\frac{V_0 + \omega_0 L(I_0 - I)(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})}{V_0 + \omega_0 L(I_0 - I)(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})} \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right)^3 \right] \quad (5.60)$$

o para condiciones iniciales nulas:

$$t_{mc0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{LC}{\gamma^2 - 1}} \ln \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right)^2$$

$$\therefore t_{mc0} = \sqrt{\frac{LC}{\gamma^2 - 1}} \ln \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) = 2 t_{mv0} \quad (5.61)$$

Para concluir, se realizará un análisis conceptual de los procesos descriptos en los gráficos de la Fig. 5.3.

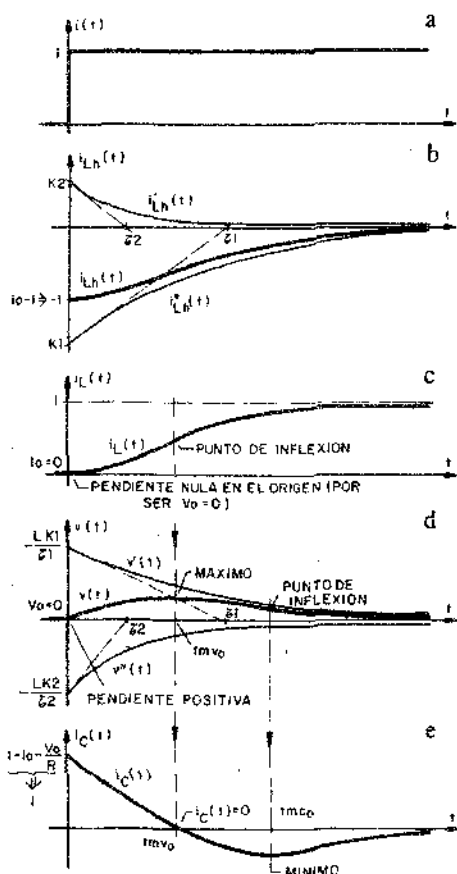


Fig. 5.3

f) Interpretación conceptual

f.1) Ver caso $\gamma < 1$

f.2) Luego que el capacitor absorbió el escalón de corriente, el mismo se va cargando y comienza a circular corriente por el resistor y el inductor, aumentando consecuentemente $i_R(t)$ e $i_L(t)$. Pero luego el inductor comienza a ser el camino más fácil para el pasaje de la corriente, y pasado un tiempo considerable toda la corriente circulará a través de él. De esta manera, una vez que $i_R(t)$ alcanzó un máximo, comenzará a disminuir hasta anularse, como así también $i_C(t)$.

En este caso el resistor amortigua tanto que no llegan a producirse oscilaciones.

5.2.3) $\gamma = 1$ Régimen crítico

Este régimen, como se deduce de la Ec. (5.16) se define cuando :

$$\alpha = \omega_0 \quad \text{o bien,}$$

$$2RC = \sqrt{LC}$$

y en este caso las raíces de la ecuación característica serán reales e iguales, y a diferencia de los dos casos estudiados anteriormente en que se tenían infinitas posibilidades para cumplir con las desigualdades indicadas, en este caso la relación entre los valores de los elementos pasivos será única.

Dicha relación surge de considerar la Ec. (5.16) que se reproduce a continuación:

$$\gamma = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.16)$$

si $\gamma = 1$ resulta $R = R_c$, llamada resistencia crítica, cuyo valor es:

$$R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.62)$$

Continuando entonces, con la solución de la *ecuación diferencial homogénea*. La Ec. (5.17) resultó:

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (5.17)$$

en el caso $\gamma = 1$

$$B_{1-2} = -\alpha$$

para este caso el método de Euler propone como solución para la Ec. (5.8):

$$i_{Lh}(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}$$

$$i_{Lh}(t) = e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t) \quad (5.63)$$

c) *Solución general de la ecuación diferencial completa*

La misma es hallada sumando la solución particular dada en la Ec. (5.6) y la de la homogénea dada por la Ec. (5.63) resultando:

$$i_L(t) = I + e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t) \quad (5.64)$$

d) *Cálculo de las constantes*

Se tienen dos incógnitas, K_1 y K_2 disponiendo solamente de la Ec. (5.64), la otra ecuación necesaria puede obtenerse a partir de:

$$v(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} \quad \text{por lo cual empleando la}$$

Ec. (5.64) surge que:

$$v(t) = L [-\alpha e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t) + K_2 e^{-\alpha t}] \quad (5.65)$$

Disponiendo de las Ecs. (5.64) y (5.65) podrán determinarse K_1 y K_2 .

Por la aplicación de las condiciones de continuidad para el inductor, y de la condición inicial $i_{L(0^-)} = I_0$, de la Ec. (5.64) surge que:

$$I_0 = I + K_1 \therefore$$

$$K_1 = I_0 - I \quad (5.66)$$

Aplicando las condiciones de continuidad para el capacitor, y la condición inicial $v_{C(0^-)} = V_0$, de la Ec. (5.65) resulta:

$$V_0 = L (-\alpha K_1 + K_2) \quad (5.67)$$

reemplazando en la Ec. (5.67) el valor de K_1 dado por la Ec. (5.66) queda:

$$V_0 = L [-\alpha (I_0 - I) + K_2] \therefore$$

$$K_2 = \frac{V_0}{L} + \alpha (I_0 - I) \quad (5.68)$$

Con las Ecs. (5.66) y (5.68) pueden determinarse los valores de K_1 y K_2 .

En el caso de *condiciones iniciales nulas*, es decir $i_{L(0^-)} = 0$ y $v_{C(0^-)} = 0$ la Ec. (5.66) resulta:

$$K_1 = I \quad (5.69)$$

y la Ec. (5.68) resulta:

$$K_2 = -\alpha I \quad (5.70)$$

Obsérvese que en este caso, a diferencia de los anteriores, las constantes resultan sencillas, *especialmente en el caso de condiciones iniciales nulas*, es por eso que reemplazando las constantes dadas por las Ecs. (5.69) y (5.70) en las Ecs. (5.64) y (5.65), respectivamente, resulta:

$$i_{L(t)} = I + e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t) \quad (5.64)$$

$$i_{L(t)} = I + e^{-\alpha t} (-I - \alpha I t) \therefore$$

$$i_{L(t)} = I - I e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \quad (5.71)$$

además

$$v(t) = L [-\alpha e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t) + K_2 e^{-\alpha t}] \quad (5.65)$$

$$v(t) = L [-\alpha e^{-\alpha t} (-I - \alpha I t) - \alpha I e^{-\alpha t}] \therefore$$

$$v(t) = L I \alpha^2 t e^{-\alpha t} \quad (5.72)$$

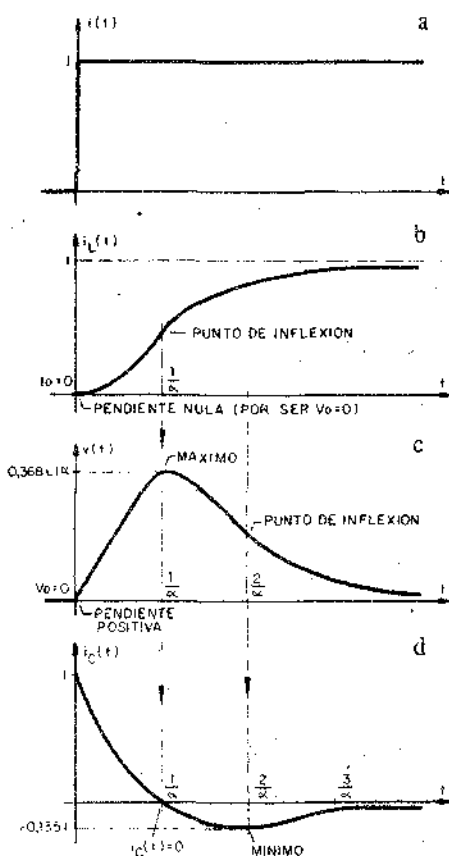


Fig. 5.4

e) Representaciones gráficas

Se graficará la excitación: $i_L(t)$; $v(t)$ e $i_C(t)$, expresiones que se reproducirán a continuación. Por las razones ya mencionadas se considerarán condiciones iniciales nulas para las representaciones. Además no se representará $i_R(t)$ pues sólo difiere de $v(t)$ por una constante.

$$i(t) = I u(t)$$

$$i_L(t) = I - I e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \quad (5.71)$$

$$v(t) = L I \alpha^2 t e^{-\alpha t} \quad (5.72)$$

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R_c} = \frac{L I \alpha^2}{R_c} t e^{-\alpha t} \quad (5.73)$$

$$i_C(t) = I - i_L(t) - i_R(t) \quad (5.74)$$

Todas las expresiones anteriores son válidas, naturalmente para $t > 0$.

Reemplazando las Ecs. (5.71) y (5.73) en la Ec. (5.74) para lograr una forma más explícita para $i_C(t)$, resulta:

$$i_C(t) = I - I + I e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) - \frac{L I \alpha^2}{R_c} t e^{-\alpha t} \therefore$$

$$i_C(t) = I e^{-\alpha t} (1 + \alpha t - \frac{L \alpha^2}{R_c} t)$$

$$i_C(t) = I e^{-\alpha t} [1 + \alpha t (1 - \frac{L \alpha}{R_c})] \quad (5.75)$$

pero de la expresión,

$$R_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \therefore \quad (5.62)$$

$$\frac{L}{R_c} = 4 R_c C \quad (5.76)$$

Además, adaptando la Ec. (5.11) a este caso

$$\alpha = \frac{1}{2 R_c C} \quad (5.77)$$

reemplazando las Ecs. (5.76) y (5.77) en la Ec. (5.75) resulta:

$$i_C(t) = I e^{-\alpha t} [1 + \alpha t (1 - 2)] \therefore$$

$$i_C(t) = I e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) \quad (5.78)$$

En la Fig. 5.4.a) se grafica la excitación. En la Fig. 5.4.b) se representa $i_{L(t)}$ dada por la Ec. (5.71), que da lugar a una exponencial creciente cuyos valores límites resultan:

$$i_{L(0)} = 0$$

$$i_{L(\infty)} \rightarrow I$$

Para graficar $v(t)$ se recuerda que $v(t) = L \frac{d i_{L(t)}}{d t}$

En la Fig. 5.4.c) se representa $v(t)$ dada en la Ec. (5.72). Sus valores límites resultan:

$$v_{(0)} = 0$$

$$v_{(\infty)} \rightarrow 0$$

y entre dichos valores, para un dado t existirá un punto *extremal*. Dicho valor de t puede deducirse a partir de:

$$\frac{d v(t)}{d t} = 0 = L I \alpha^2 e^{-\alpha t} - L I t \alpha^3 e^{-\alpha t} \therefore$$

$$0 = L I \alpha^2 e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) \quad (5.79)$$

de la Ec. (5.79) surge que el punto *extremal* se da para:

$$t = 1/\alpha \quad (5.80)$$

reemplazando la condición dada por la Ec. (5.80) en la Ec. (5.72) resulta el valor *extremal* de $v(t)$:

$$v\left(\frac{1}{\alpha}\right) = L I \alpha e^{-1} = 0,368 \cdot L I \alpha \quad (5.81)$$

que resulta un valor positivo pues corresponde a un máximo, y puede verificarse si se realiza la derivada segunda de $v(t)$, que resultará negativa. Además, la pendiente de $i_{L(t)}$ es siempre positiva.

En la Fig. 5.4.d) se grafica $i_{C(t)}$ dado por la Ec. (5.78). Nótese que $i_{C(t)} = C \frac{d v(t)}{d t}$. Además es:

$$i_{C(0)} = 0$$

$$i_{C\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = 0$$

$$i_{C(\infty)} \rightarrow 0$$

el punto extremal puede deducirse a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{d i_{C(t)}}{dt} &= 0 = I [-\alpha e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) - e^{-\alpha t} \alpha] \\ 0 &= I e^{-\alpha t} (\alpha^2 t - 2 \alpha) \therefore \\ 0 &= I \alpha e^{-\alpha t} (\alpha t - 2) \end{aligned} \quad (5.82)$$

de la Ec. (5.78) surge que el punto extremal se da para:

$$t = \frac{2}{\alpha} \quad (5.83)$$

reemplazando la condición dada por la Ec. (5.83) en la Ec. (5.78) resulta el valor extremal de $i_{C(t)}$:

$$i_{C(\frac{2}{\alpha})} = I e^{-2} (1 - 2) = -0,135 I$$

que resulta un valor negativo pues corresponde a un mínimo, y puede verificarse si se realiza la derivada segunda de $i_{C(t)}$, que resultará positiva. Además la pendiente de $v(t)$ es negativa y por lo tanto deben serlo las ordenadas de $i_{C(t)}$.

f) Interpretación conceptual

f.1) Ver caso $\gamma < 1$.

f.2) En este caso el razonamiento a efectuar es similar que para el caso $\gamma > 1$, pero es de hacer notar que debido a las características de las exponenciales se tiende más rápidamente a los valores finales. Esto puede interpretarse conceptualmente, pensando que al ser menor el valor de R comparado al caso anterior, la amortiguación es menor.

5.3. Importancia tecnológica de los distintos tipos de respuesta

En general, todo servomecanismo es diseñado para que responda en un mínimo de tiempo a contar desde el instante en que se le impartió la orden de actuar. Si por ejemplo se trata del timón de una nave, es deseable que la dirección que tome la misma sea la ordenada, alcanzada en el mínimo tiempo posible, y no la logre a través de un recorrido sinuoso. Debido a ello el servomecanismo asociado debe diseñarse para que trabaje en régimen crítico, indicado como $\gamma = 1$ en la Fig. 5.5.

En cambio, en otros casos, importa que el sistema responda exclusivamente en un mínimo de tiempo, y como en los fines prácticos de la ingeniería se acepta un cierto error respecto al valor a que tienden las variables, en estos casos se podrá hacer funcionar al sistema para un valor de γ ligeramente inferior a la unidad. En la Fig. 5.5 puede observarse que para $\gamma < 1$ la variable entra más rápidamente dentro de la banda de error admitida.

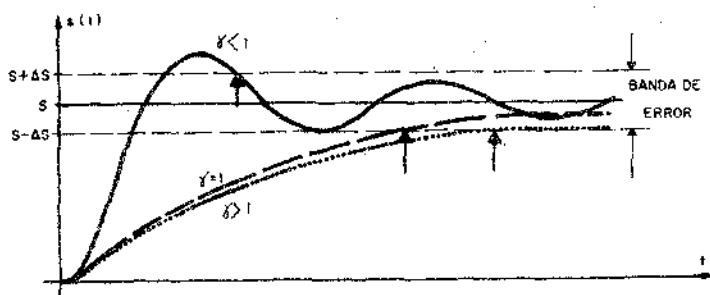


Fig. 5.5

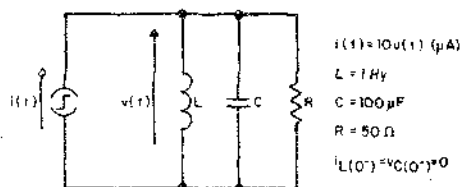


Fig. 5.6

5.4 Problemas resueltos

5.4.1) Para el circuito de la Fig. 5.6 se pide representar la forma de señal de $v(t)$.

Solución

Con el objeto de encontrar en qué régimen se encuentra el circuito, se calculará el valor de γ , empleando la Ec. (5.6).

$$\gamma = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2 \cdot 50} \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 10^{-6}}} = 1$$

encontrándose en régimen crítico, por lo cual puede emplearse la Ec. (5.72) que se reproduce seguidamente:

$$v(t) = LI\alpha^2 t e^{-\alpha t} \quad (5.72)$$

y el valor de α surge de la Ec. (5.11),

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 100 \frac{1}{s}$$

reemplazando en la Ec. (5.72) los valores de α , L e I resulta:

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 t e^{-10^2 t} \therefore \\ v(t) &= 10^2 t e^{-10^2 t} \end{aligned} \quad (5.84)$$

t	$v(t)$
[ms]	[mV]
0	0
2	164
4	268
6	329
8	359
10	368
12	361
14	345
16	323
18	297
20	271
22	244
24	218
26	193
28	170
30	150

Fig. 5.7

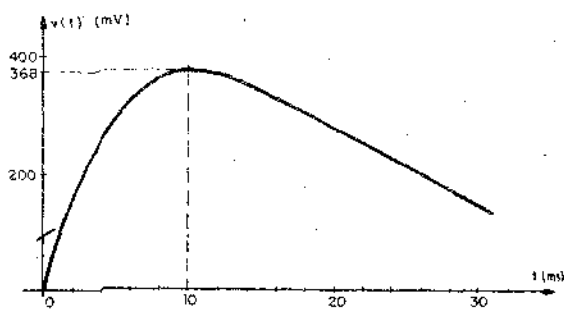


Fig. 5.8

En el cuadro de la Fig. 5.7 se dan valores de t y se calculan los correspondientes de $v(t)$, y en la Fig. 5.8 se la representa gráficamente.

Según la Ec. (5.80) el máximo debe producirse para:

$$t = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{100} = 0,01 = 10 \text{ ms}$$

y por la Ec. (5.81) el valor de dicho máximo será:

$$v\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0,368 L I \alpha = 0,368 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 368 \text{ mV}$$

obsérvese que ambos valores se verifican gráficamente.

5.4.2) Dado el circuito ilustrado en la Fig. 5.9 se pide hallar:

- La ecuación diferencial de equilibrio instantáneo en función de $v_C(t)$.
- La ecuación característica asociada.
- Las expresiones de las constantes de amortiguamiento absoluta y normalizada.
- Los valores de α , ω_0 , γ y ω_a para $R = 3,3 \text{ k}\Omega$
- El valor que debe tener R para que el circuito se encuentre en el régimen de amortiguamiento crítico.

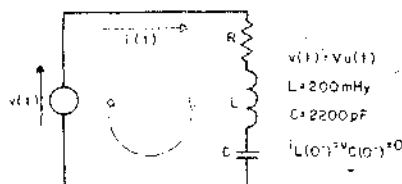


Fig. 5.9

Solución

a) Planteando la 2ª Regla de Kirchhoff con el sentido de circulación indicado surge:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad \therefore$$

$$Vu(t) = R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt} + v_C(t) \quad (5.85)$$

como $v(t) = V$ para $t > 0$ e $i(t) = C \frac{d v_C(t)}{dt}$

la Ec. (5.85) resulta:

$$V = R C \frac{d v_C(t)}{dt} + L C \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + v_C(t) \quad \therefore$$

$$\frac{d^2 v_{C(t)}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d v_{C(t)}}{dt} + \frac{1}{LC} v_{C(t)} = \frac{V}{LC} \quad (5.86)$$

La Ec. (5.86) es la pedida, válida para $t > 0$.

b) Resulta de la resolución de la ecuación diferencial homogénea que se deriva de la Ec. (5.86):

$$\frac{d^2 v_{Ch(t)}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d v_{Ch(t)}}{dt} + \frac{1}{LC} v_{Ch(t)} = 0 \quad (5.87)$$

al proponer como solución $v_{Ch(t)} = e^{Bt}$, se reemplaza adecuadamente en la Ec. (5.87), resultando la ecuación característica:

$$B^2 e^{Bt} + \frac{R}{L} B e^{Bt} + \frac{1}{LC} e^{Bt} = 0 \therefore$$

$$B^2 + \frac{R}{L} B + \frac{1}{LC} = 0 \quad (5.88)$$

c) Resolviendo la Ec. (5.88),

$$B_{1-2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{donde } \frac{R}{2L} = \alpha \quad (5.89)$$

$$\text{y } \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (5.90)$$

en consecuencia,

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 1}$$

$$\text{donde } \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R \sqrt{LC}}{2L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma \quad (5.91)$$

por lo tanto,

$$B_{1-2} = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (5.92)$$

d) Empleando la Ec. (5.89),

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{3,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 200 \cdot 10^{-3}} = 8,25 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

a partir de la Ec. (5.86),

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 200 \cdot 10^{-12}}} = 47,7 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

de la Ec. (5.91)

$$\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{8,25 \cdot 10^3}{47,7 \cdot 10^3} = 0,17$$

y como $\gamma < 1$ indica que en este caso el circuito se encuentra en el régimen oscilatorio amortiguado. La pulsación de dicha oscilación amortiguada se calcula a partir de la Ec. (5.92).

$$B_{1-2} = -\alpha \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} \therefore$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} = 47,7 \cdot 10^3 \sqrt{1 - (0,17)^2} = 47 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

e) De la Ec. (5.91), para el caso $\gamma = 1$ resulta:

$$\gamma = 1 = \frac{R_c}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \therefore$$

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 200 \cdot 10^{-12}}} = 19,073 \Omega$$

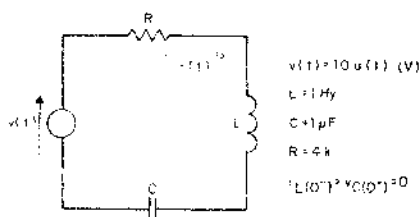


Fig. 5.10

5.5 Problemas propuestos

5.5.1) Para el circuito mostrado en la Fig. 5.10 se pide:

- Las expresiones de $v_C(t)$ e $i(t)$.
- Las expresiones de las constantes de integración.
- Reemplazar valores en la expresión de $i(t)$ y representarla gráficamente.

Resultados

$$\begin{aligned}
 \text{a) } v_C(t) &= V + K_1 e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} + \\
 &\quad + K_2 e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} \\
 i(t) &= -\omega_0 C K_1 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} \\
 &\quad - \omega_0 C K_2 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } K_1 = - \left[V + \frac{V}{2} \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]$$

$$K_2 = V \frac{(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})}{2 \sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

$$\text{c) } i(t) = 2,8 \cdot 10^{-3} e^{-268 t} - 2,8 \cdot 10^{-3} e^{-3732 t} \text{ [A] } t > 0$$

Cuya representación gráfica se ilustra en la Fig. 5.11.

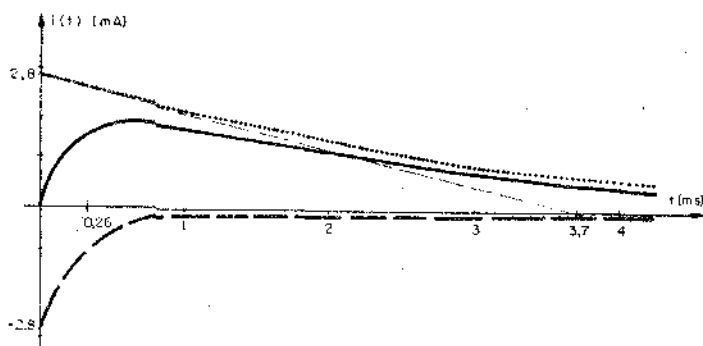


Fig. 5.11

5.5.2) Para un circuito R.L.C. serie alimentado por un escalón de tensión, hallar las expresiones de $v_C(t)$ para los tres regímenes posibles, aplicando dualidad en los resultados obtenidos para el circuito paralelo. Graficar además, en forma cualitativa las expresiones obtenidas para condiciones iniciales nulas.

Resultados

Para $\gamma < 1$ será $v_C(t) = V + e^{-\alpha t} K_5 \sin(\omega_d t + \theta)$

Para $\gamma > 1$ será $v_C(t) = V + K_1 e^{-\omega_0 (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}) t} +$
 $+ K_2 e^{-\omega_0 (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) t}$

Para $\gamma = 1$ será $v_C(t) = V + e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t)$ y el gráfico pedido se ilustra en la Fig. 5.12.

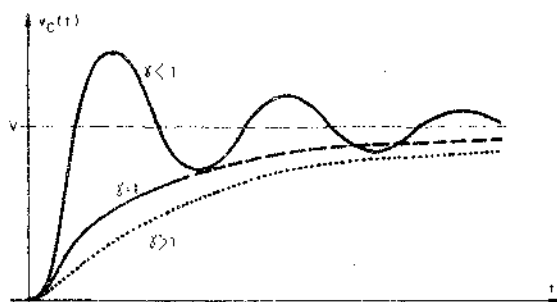


Fig. 5.12

capítulo 6

Fasores armónicos y fasores eficaces asociados a las señales senoidales

6.1) Introducción

En los capítulos anteriores, se desarrolló una metodología para analizar la respuesta de circuitos simples en el dominio del tiempo. El procedimiento utilizado es simple y de aplicación general. No obstante la solución de los sistemas de ecuaciones integrodiferenciales se hace más y más laboriosa, a medida que aumenta el número de mallas y nodos.

En este capítulo, se pondrá en práctica una metodología que permite convertir los sistemas de ecuaciones integrodiferenciales, en sistemas de ecuaciones algebraicas. El procedimiento mencionado, sólo es válido para *excitaciones senoidales* y con él solo puede hallarse el régimen permanente de la respuesta.

No obstante, las ventajas operativas que se obtienen y la gran cantidad de casos abarcados justifican ampliamente la introducción del método.

Se iniciará este capítulo con una revisión de números complejos, poniendo especial énfasis en la representación gráfica. Luego se introducirá el operador unitario $e^{j\omega t}$ y los fasores armónicos. Se estudiará la relación existente entre los fasores armónicos y las funciones senoidales y su permanencia a través de algunas operaciones matemáticas. A continuación se introducirá un procedimiento para resolver las ecuaciones integrodiferenciales del tipo de las estudiadas en los capítulos anteriores. Finalmente se definirán los fasores eficaces y se extenderá el método para la utilización de los mismos.

6.2) Números complejos

Los números complejos aparecieron naturalmente a los algebristas del siglo XVI, cuando estudiaban la resolución de las ecuaciones de 2º grado, del tipo de la Ec.(6.1).

$$x^2 + 4 = 0 \quad (6.1)$$

cuya solución requería una extensión del concepto de números que hasta entonces se poseía. En efecto, el resultado es:

$$x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} \quad (6.2)$$

Como no existía ningún número que elevado al cuadrado fuera igual a (-1) , para salvar este inconveniente, se introdujo un número imaginario j tal que:

$$j^2 = -1 \quad (6.3)$$

Aplicando formalmente la Ec. (6.3) a la regla operativa de la radicación de un producto (6.2), resulta:

$$x = \pm 2j \quad (6.4)$$

Quedaba todavía por resolver el problema de la representación gráfica, ya que el número hallado no tenía cabida en la recta mostrada en la Fig. 6.1 cuyos puntos representan los números reales (enteros, fraccionarios e irracionales).

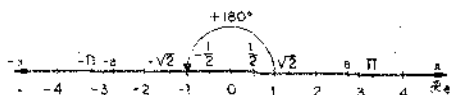


Fig. 6.1

Este problema fue resuelto por Wessel (1797) y Argand (1806), al sugerir la posibilidad de que los números ocuparan un plano en lugar de una recta. La idea básica es la siguiente: la semirrecta representativa de los números negativos, puede ser obtenida girando en 180° la correspondiente a los números positivos, tal como se ve en la Fig. 6.1.

Se conviene en tomar como sentido positivo de giro el contrario al de las agujas del reloj. Según este concepto, multiplicar un número por $j^2 = -1$, equivale a girarlo en $+180^\circ$. Inmediatamente surge la idea de que al multiplicar un número por $j = \sqrt{-1}$, el giro deberá ser de sólo $+90^\circ$. Nace así el eje imaginario "y" en el cual el segmento OB, por ejemplo, es igual al OA girado en 90° . En la Fig. 6.2 se muestra claramente lo expresado. Hasta aquí se han utilizado solamente los ejes real x e imaginario y. No obstante, una ecuación del tipo:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

tiene por solución:

$$x = -1 \pm j\sqrt{3} \quad (6.5)$$

que es un número formado por una parte real y otra imaginaria, de modo que no tiene cabida en ninguno de los ejes anteriores. Aparece entonces la necesidad de utilizar todo el plano para poder representar números como el mencionado, tal como se muestra en la Fig. (6.3). Los números que, como el (6.5), tienen una componente real y otra imaginaria, se llaman *números complejos* y el plano utilizado para representarlos, *plano complejo*. Es posible entonces concluir que los números

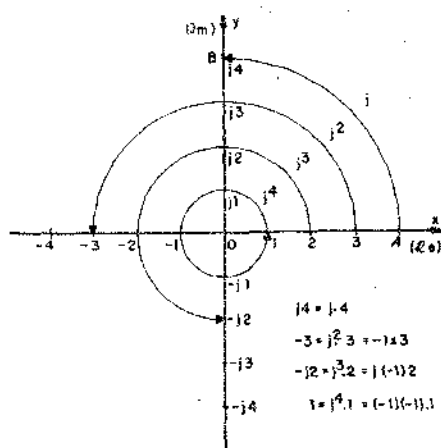


Fig. 6.2

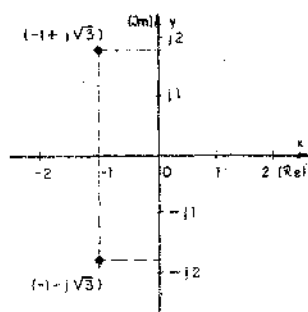


Fig. 6.3

complejos son pares ordenados de números reales, donde la componente imaginaria es identificada por estar precedida por la unidad imaginaria j .

En lo que sigue se representarán los números complejos por medio de una letra mayúscula con una barra en su parte superior. Un número complejo puede ser asociado con un punto o afijo $P(a; jb)$ del plano, tal como se muestra en la Fig. 6.4, o bien con un vector $\overline{OP}$ que recibe la denominación de *fasor*, según se representa en la Fig. 6.5.

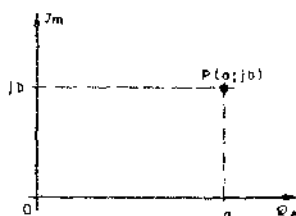


Fig. 6.4

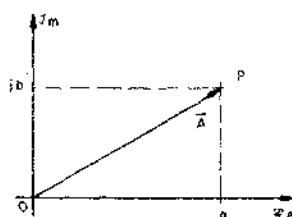


Fig. 6.5

Un número complejo puede ser expresado en la forma indicada en la Ec. 6.6.

$$\overline{A} = a + jb \quad (6.6)$$

llamada *forma binómica*, que tiene directa relación con las coordenadas cartesianas de la representación gráfica de la Fig. 6.5.

Siendo $a = \text{Re} [\overline{A}]$ la componente real del complejo y $b = \text{Im} [\overline{A}]$ la componente imaginaria.

También puede caracterizarse al número complejo $\overline{A}$ por sus coordenadas polares, según muestra la Fig. 6.6, donde,

$$A \equiv |\overline{A}| \Rightarrow \text{módulo del fasor.}$$

$\theta \Rightarrow$ argumento del fasor.

De la Fig. 6.6 se deduce que:

$$\begin{cases} a = A \cos \theta \\ b = A \sin \theta \end{cases} \quad (6.7)$$

Reemplazando las expresiones (6.7) en la (6.6), resulta:

$$\bar{A} = A \cos \theta + j A \sin \theta = A (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (6.8)$$

y teniendo en cuenta la fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (6.9)$$

queda,

$$\bar{A} = A e^{j\theta} \quad (6.10)$$

que se denomina *forma exponencial* de un número complejo y que, obviamente, se relaciona directamente con las coordenadas polares de la Fig. 6.6. A veces se ex-

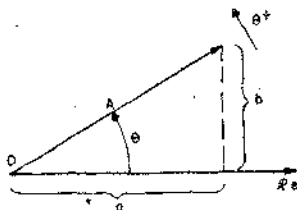


Fig. 6.6

presa la información de la Ec. (6.10) en la forma:

$$\bar{A} = A \angle \theta$$

Las Ec. (6.7) son las fórmulas de pasaje de la forma exponencial a la binómica. Las de pasaje inverso se deducen también de la Fig. 6.6:

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctg \frac{b}{a} \end{cases} \quad (6.11)$$

El *complejo conjugado* $\bar{A}^*$ de un número:

$$\bar{A} = a + jb = A e^{j\theta}$$

es el que tiene la misma componente real y la componente imaginaria de igual valor absoluto y signo opuesto. Esto es:

$$\bar{A}^* = a - jb = A e^{-j\theta}$$

Más adelante serán de utilidad las siguientes expresiones:

$$\bar{A} + \bar{A}^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a \quad (6.12)$$

$$\bar{A} - \bar{A}^* = (a + jb) - (a - jb) = j2b \quad (6.13)$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A}^* = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2 \quad (6.14)$$

Recordando la forma de efectuar las operaciones elementales con números complejos, se tiene:

ADICION y SUSTRACCION: Dos números complejos $\bar{A} = a + jb$ y $\bar{B} = c + jd$ se suman o se restan analíticamente, adicionando o sustrayendo las componentes de igual naturaleza:

$$\bar{C} = \bar{A} \pm \bar{B} = (a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

Gráficamente la operación se realiza mediante la regla del paralelogramo.

MULTIPLICACION: Dos fasores se multiplican de acuerdo a las leyes usuales del álgebra. En efecto, en forma binómica es:

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} = (a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

y en forma exponencial

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} = A e^{j\theta A} \cdot B e^{j\theta B} = A B e^{j(\theta A + \theta B)}$$

DIVISION: Dos números complejos se dividen, en la forma binómica, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, esto es, racionalizando:

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

y en la forma exponencial:

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A e^{j\theta A}}{B e^{j\theta B}} = \frac{A}{B} e^{j(\theta A - \theta B)}$$

POTENCIACION: de la regla del producto surge que:

$$\bar{A}^n = (A e^{j\theta})^n = A^n e^{jn\theta} = A^n (\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta)$$

que se conoce como *fórmula de Moivre*.

RADICACION: en este caso resulta;

$$\sqrt[n]{\bar{A}} = \sqrt[n]{A e^{j\theta}} = \sqrt[n]{A} e^{j\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

con $K = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

(Para $K = n$ se vuelve a obtener el valor correspondiente a $K = 0$)

6.3 Fasores armónicos

6.3.1) Definición

Habiendo aclarado los conceptos fundamentales sobre números complejos, se procederá a estudiar los fasores armónicos. Ya se ha visto que la expresión:

$$\bar{A}_m = A_m e^{j\theta} \quad (6.15)$$

puede ser representada por un vector plano de módulo A_m , que forma un ángulo θ con el eje real $\Re$, tal como se ve en la Fig. 6.7. Por extensión, la expresión:

$$\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} = A_m e^{j\theta} e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (6.16)$$

puede ser representada por un vector plano de módulo A_m , que forma un ángulo $(\omega t + \theta)$ con el eje real. Pero en este caso, el ángulo aumenta linealmente con el tiempo, de modo que el fasor gira con una velocidad angular constante de ω radianes por segundo, en sentido anti-horario. Por esta razón, se ha utilizado el símbolo $\dot{A}_m$ en lugar de $\bar{A}_m$, para indicar que se trata de un fasor giratorio. En realidad, el fasor $\bar{A}_m$ es la imagen para $t = 0$ de $\dot{A}_m$, tal como se muestra en la Fig. 6.8.

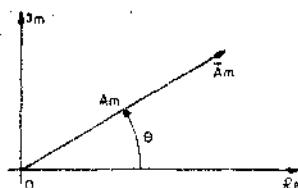


Fig. 6.7

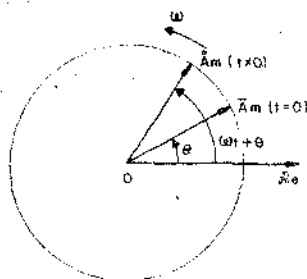


Fig. 6.8

La Ec. (6.16) puede interpretarse entonces diciendo que el operador unitario $e^{j\omega t}$ cumple la función de arrastrar el fasor A_m , haciéndolo girar con una velocidad angular ω .

6.3.2) Correspondencia entre los fasores giratorios y las funciones trigonométricas.

Para el tiempo T tal que $\omega T = 2\pi$, el fasor giratorio $\dot{A}_m$ vuelve a ocupar su función inicial. Así, el fasor giratorio resulta periódico, de período 2π , razón por la cual será denominado fasor armónico. Como se ve, los fasores armónicos cumplen una relación de periodicidad similar a la de las funciones trigonométricas. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} A_m e^{j(\omega t + \theta + 2k\pi)} &= A_m e^{j(\omega t + \theta)} \\ \cos(\omega t + \theta + 2K\pi) &= \cos(\omega t + \theta) \\ \text{sen}(\omega t + \theta + 2K\pi) &= \text{sen}(\omega t + \theta) \end{aligned} \right\} \text{ para } K = 0, 1, 2, \dots \text{etc.}$$

Esta semejanza entre la función exponencial de argumento imaginario y las funciones trigonométricas, no es accidental. En efecto, estas funciones están relacionadas por la fórmula de Euler (6.9), de la cual se deduce que:

$$\cos \omega t = \Re_e [e^{j\omega t}] \quad (6.17)$$

Donde el segundo miembro se lee "componente real de $e^{j\omega t}$ " y equivale a proyectar el fasor armónico unitario $e^{j\omega t}$ sobre el eje real. Análogamente:

$$\text{sen} \omega t = \Im_m [e^{j\omega t}] \quad (6.18)$$

cuyo segundo miembro se lee "parte imaginaria de $e^{j\omega t}$ " y equivale a proyectar el operador unitario $e^{j\omega t}$ sobre el eje imaginario. Es decir que, al proyectar un fasor armónico sobre el eje imaginario, se obtiene una senoide cuya amplitud coincide con el módulo del fasor, siendo su fase inicial la correspondiente al argumento del fasor giratorio para $t = 0$. Esto se muestra en la Fig. 6.9 donde puede verse que una función armónica $a(t) = A_m \text{sen}(\omega t + \theta)$ puede ser obtenida proyectando sobre el eje imaginario un fasor armónico.

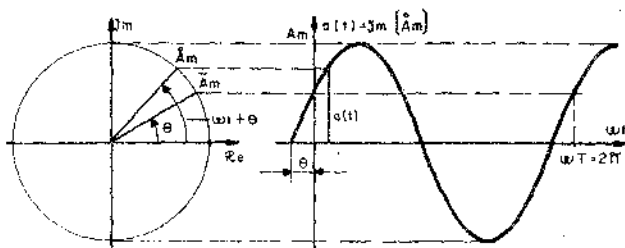


Fig. 6.9

$$\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

Donde $\bar{A}_m = A_m e^{j\theta}$ se denomina amplitud compleja y $e^{j\omega t}$ es un fasor giratorio de módulo unitario que arrastra a $\bar{A}_m$, haciéndolo girar con una velocidad angular ω , convirtiéndolo en el fasor armónico $\dot{A}_m$.

Ejemplo 1: Dado el fasor armónico $\dot{A}_m = 100 e^{j\pi/4} e^{j314t}$, hallar la función senoidal asociada:

$$a(t) = \Im_m [\dot{A}_m] = \Im_m [100 e^{j(314t + \pi/4)}]$$

$$a(t) = \Im_m \left[100 \cos(314t + \pi/4) + j 100 \text{sen}(314t + \pi/4) \right]$$

$$a(t) = 100 \operatorname{sen} \left(314 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ejemplo 2: Dada la función armónica $a(t) = 50 \operatorname{sen} \left(100 t - \frac{\pi}{3} \right)$ hallar el fasor giratorio asociado:

$$\bar{A}_m = A_m e^{j\theta} = 50 e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} = 50 e^{-j\pi/3} e^{j100 t}$$

6.3.3) Suma de fasores armónicos

Se trata de determinar si la correspondencia entre fasores armónicos y funciones senoidales, se mantiene a través de la suma.

Sean las funciones senoidales y fasores armónicos indicados:

$$a_1(t) = A_{1m} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_1) \Leftrightarrow \dot{A}_{1m}$$

$$\text{y } a_2(t) = A_{2m} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_2) \Leftrightarrow \dot{A}_{2m}$$

En la Fig. 6.10 se han representado los fasores armónicos $\dot{A}_{1m}$ y $\dot{A}_{2m}$ para un instante t genérico, así como el resultante de sumar ambos mediante la regla del paralelogramo.

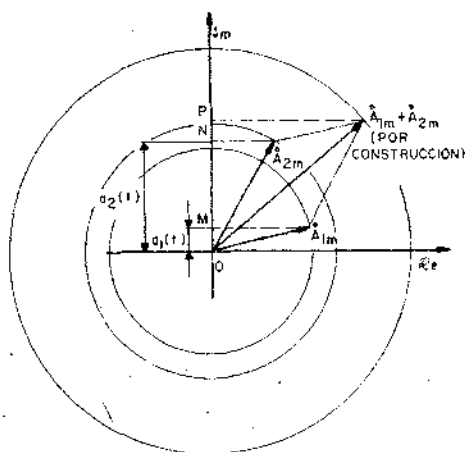


Fig. 6.10

Los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ resultantes de proyectar los fasores giratorios $\dot{A}_{1m}$ y $\dot{A}_{2m}$ sobre el eje imaginario, son los valores instantáneos de las funciones senoidales asociadas. Por el teorema de Chasles, los segmentos $\overline{OM}$ y $\overline{NP}$ deben ser iguales de modo que:

$$\overline{OP} = \overline{ON} + \overline{NP} = a_2(t) + a_1(t)$$

Pero,

$$\overline{OP} = J_m [\dot{A}_{1m} + \dot{A}_{2m}]$$

resultando finalmente que:

$$a_1(t) + a_2(t) = J_m [\dot{A}_{1m} + \dot{A}_{2m}] \quad (6.19)$$

En consecuencia, la correspondencia entre funciones senoidales y fasores armónicos, se mantiene a través de la adición.

6.3.4) Derivación de fasores armónicos

Considerando la señal senoidal:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \theta) \quad (6.20)$$

Sus derivadas sucesivas respecto del tiempo son:

$$\frac{d a(t)}{d t} = \omega A_m \cos(\omega t + \theta) = \omega A_m \sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 a(t)}{d t^2} = \omega^2 A_m \cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) = \omega^2 A_m \sin(\omega t + \theta + 2 \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^{(n)} a(t)}{d t^{(n)}} = \omega^n A_m \sin(\omega t + \theta + n \frac{\pi}{2}) \quad (6.21)$$

El fasor armónico asociado a la función (6.20) es:

$$\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\omega t} \quad (6.22)$$

cuyas derivadas sucesivas son:

$$\frac{d}{dt} \dot{A}_m = j\omega \bar{A}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{A}_m$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \dot{A}_m = (j\omega)^2 \bar{A}_m e^{j\omega t} = (j\omega)^2 \dot{A}_m$$

$$\frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \dot{A}_m = (j\omega)^n \dot{A}_m \quad (6.23)$$

La Ec. (6.21) muestra que derivar n veces una función senoidal, equivale a incrementar su módulo ω^n veces y aumentar n veces $\frac{\pi}{2}$ su argumento.

La Ec. (6.23) indica que derivar n veces un fasor armónico, equivale a aumentar su módulo ω^n veces y multiplicarlo n veces por j , esto es, girarlo n veces en $+\frac{\pi}{2}$.

En consecuencia:

$$\frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} a(t) = J_m \left[\frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \dot{A}_m \right] \quad (6.24)$$

es decir que la correspondencia entre funciones senoidales y fasores armónicos se mantiene a través de la derivación.

6.3.5) Integración de fasores armónicos

Calculando las sucesivas integrales de la función senoidal (6.20), se tiene:

$$\begin{aligned} \int a(t) dt &= A_m \int \sin(\omega t + \theta) dt = \frac{A_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \int^{(n)} a(t) dt &= \frac{A_m}{\omega^n} \sin\left(\omega t + \theta - n \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Integrando el fasor armónico (6.22) sucesivamente, resulta:

$$\begin{aligned} \int \dot{A}_m dt &= \int \bar{A}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\bar{A}_m}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{\dot{A}_m}{j\omega} \\ \int^{(n)} \dot{A}_m dt &= \frac{\dot{A}_m}{(j\omega)^n} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Comparando las Ecs. (6.25) y (6.26) resulta:

$$\int^{(n)} a(t) dt = J_m \left[\int^{(n)} \dot{A}_m dt \right] \quad (6.27)$$

Es decir que la correspondencia entre fasores armónicos y funciones senoidales, se mantiene a través de la integración.

6.3.6) Producto de fasores armónicos

Serán consideradas dos funciones senoidales:

$$a_1(t) = A_{1m} \sin(\omega t + \theta_1)$$

$$\text{y} \quad a_2(t) = A_{2m} \sin(\omega t + \theta_2)$$

cuyos fasores armónicos asociados son, respectivamente:

$$\dot{A}_{1m} = \bar{A}_{1m} e^{j\omega t}$$

$$\dot{A}_{2m} = \bar{A}_{2m} e^{j\omega t}$$

Multiplicando los fasores armónicos resulta:

$$\dot{A}_m' = \dot{A}_{1m} \dot{A}_{2m} = \bar{A}_{1m} e^{j\omega t} \bar{A}_{2m} e^{j\omega t} = \bar{A}_{1m} \bar{A}_{2m} e^{j2\omega t}$$

$$\bar{A}_m' = A_{1m} A_{2m} e^{j(2\omega t + \theta_1 + \theta_2)}$$

cuya función senoidal asociada es:

$$a'(t) = J_m [\dot{A}_m] = A_{1m} A_{2m} \sin(2\omega t + \theta_1 + \theta_2) \quad (6.28)$$

Si se efectúa ahora el producto de $a_1(t)$ por $a_2(t)$, se obtiene:

$$a''(t) = a_1(t) a_2(t) = A_{1m} A_{2m} \sin(\omega t + \theta_1) \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$\text{y como } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \text{ resulta}$$

$$a''(t) = \frac{A_{1m} A_{2m}}{2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(2\omega t + \theta_1 + \theta_2)] \quad (6.29)$$

Comparando las expresiones (6.28) y (6.29), se deduce que $a'(t) \neq a''(t)$ de modo que la correspondencia entre funciones senoidales y fasores armónicos NO se mantiene a través del producto.

6.4 Solución de ecuaciones integrodiferenciales lineales mediante fasores armónicos

En una ecuación integrodiferencial lineal, las únicas operaciones que afectan a la variable incógnita son sumas, derivaciones e integraciones, afectada por factores de escala (productos por constantes).

Por otra parte, si la excitación es de tipo senoidal, la respuesta forzada también debe serlo. Se trata entonces de una variable senoidal afectada por operaciones a través de las cuales se mantiene la correspondencia con los fasores armónicos. En consecuencia, es posible afirmar que toda ecuación integrodiferencial lineal de funciones armónicas, tiene una ecuación fasorial asociada.

En efecto, considerando la ecuación:

$$K_1 \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + K_2 \frac{d a(t)}{dt} + K_3 a(t) + K_4 \int a(t) dt = b(t) \quad (6.30)$$

Donde $b(t) = B_m \sin(\omega t + \theta_b)$.

La Ecuación fasorial armónica asociada es:

$$K_1 \frac{d^2}{dt^2} \dot{A}_m + K_2 \frac{d}{dt} \dot{A}_m + K_3 \dot{A}_m + K_4 \int \dot{A}_m dt = \dot{B}_m$$

$$K_1 (j\omega)^2 \dot{A}_m + K_2 (j\omega) \dot{A}_m + K_3 \dot{A}_m + \frac{K_4}{j\omega} \dot{A}_m = \dot{B}_m \quad (6.31)$$

Nótese que con este procedimiento, *válido sólo para hallar el régimen permanente y cuando la excitación es senoidal, se convierten las ecuaciones integrodiferenciales en algebraicas.*

De la Ec. (6.31), puede despejarse $\dot{A}_m$,

$$\dot{A}_m = \frac{\dot{B}_m}{(j\omega)^2 K_1 + j\omega K_2 + K_3 + \frac{K_4}{j\omega}} \quad (6.32)$$

y proyectando este fasor armónico sobre el eje imaginario, obtener finalmente la respuesta temporal buscada $a(t)$.

$$a(t) = J_m [\dot{A}_m]$$

El procedimiento queda resumido en el diagrama de la Fig. 6.11.

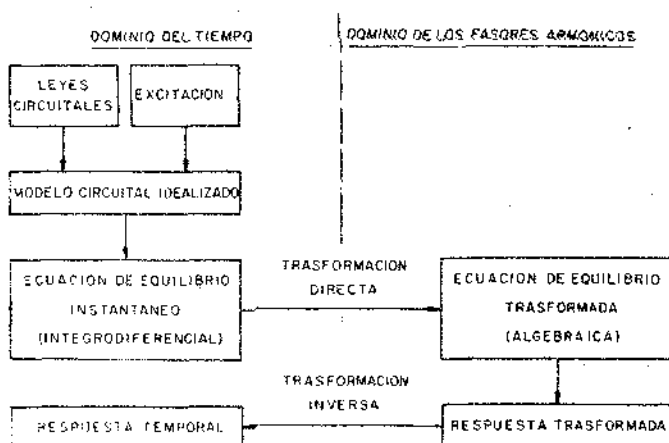


Fig. 6.11

Ejemplo: Hallar $i(t)$ para el circuito de la Fig. 6.12.

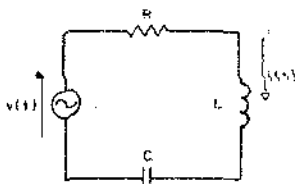


Fig. 6.12

La ecuación de equilibrio instantáneo, obtenida a partir de la segunda regla de Kirchhoff es:

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

La ecuación fasorial armónica asociada resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= R \dot{I}_m + j\omega L \dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m \\ \therefore \dot{I}_m &= \frac{\dot{V}_m}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \end{aligned}$$

o también:

$$\dot{I}_m = \frac{V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j \arctan \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}}$$

$$i(t) = \mathcal{I}m [\dot{I}_m] = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin \left[\omega t + \theta_v - \arctan \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R} \right]$$

6.5 Extensión de la solución a los fasores eficaces

Recordando que:

$$\begin{aligned} \dot{A}_m &= \bar{A}_m e^{j\omega t} \\ \text{y} \quad \dot{B}_m &= \bar{B}_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

la Ec. (6.31) puede escribirse:

$$(j\omega)^2 K_1 \bar{A}_m e^{j\omega t} + j\omega K_2 \bar{A}_m e^{j\omega t} + K_3 \bar{A}_m e^{j\omega t} + \frac{K_4}{j\omega} \bar{A}_m e^{j\omega t} = \bar{B}_m e^{j\omega t}$$

y dividiendo ambos miembros por $e^{j\omega t}$, resulta:

$$(j\omega)^2 K_1 \bar{A}_m + j\omega K_2 \bar{A}_m + K_3 \bar{A}_m + \frac{K_4}{j\omega} \bar{A}_m = \bar{B}_m \quad (6.33)$$

Ecuación que es independiente del tiempo, siendo ahora función de la variable $j\omega$ solamente. La Ec. (6.33) puede ser interpretada como la imagen de la Ec. (6.31) para $t = 0$. Nótese que la Ec. (6.33) está expresada en función de las amplitudes complejas. En la práctica, la mayoría de los instrumentos indican el valor eficaz para señales senoidales, por lo que resulta conveniente expresar la Ec. (6.33) en función de dichos valores. Para ello basta dividir ambos miembros por $\sqrt{2}$, ya que para una señal senoidal el valor eficaz es $\sqrt{2}$ veces más pequeño que el máximo.

En estas condiciones, la Ec. (6.33) se transforma en:

$$(j\omega)^2 K_1 \bar{A} + j\omega K_2 \bar{A} + K_3 \bar{A} + \frac{K_4}{j\omega} \bar{A} = \bar{B} \quad (6.34)$$

que es la ecuación fasorial eficaz asociada a la temporal de la Ec. (6.30).

Si se quiere hallar la respuesta temporal, basta con hallar sucesivamente $\bar{A}$, $\dot{A}_m$ y $a(t)$.

$$\bar{A} = \frac{\bar{B}}{(j\omega)^2 K_1 + j\omega K_2 + K_3 + \frac{K_4}{j\omega}}$$

$$\dot{A}_m = \sqrt{2} \bar{A} e^{j\omega t}$$

$$a(t) = J_m [\dot{A}_m]$$

No obstante esto no es necesario en general, ya que los fasores eficaces contienen toda la información requerida en la práctica.

La ec. (6.34) puede ser obtenida directamente, evitando todos los pasos intermedios efectuados, de la siguiente manera:

- 1) Se transcriben las constantes, los signos de adición o sustracción y el signo igual.
- 2) Se reemplazan las variables temporales por sus *fasores eficaces* asociados.
- 3) En los términos en los que aparece una derivada, se la reemplaza por $(j\omega)$ elevado al orden de la misma.
- 4) En los términos en los que aparece una integral, se la reemplaza por $(\frac{1}{j\omega})$ elevado al orden de la misma.

Ejemplo: hallar el valor complejo eficaz de la corriente, en régimen permanente, para el circuito de la Fig. 6.13.

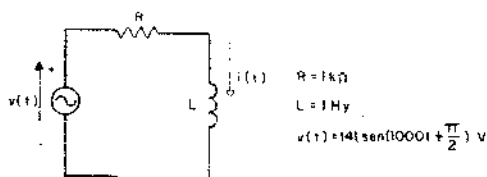


Fig. 6.13

La ecuación de equilibrio instantáneo es:

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

y la ecuación fasorial eficaz asociada (transformada):

$$\bar{V} = R \bar{I} + j\omega L \bar{I}$$

$$\therefore \bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L} \quad (6.35)$$

$$\text{pero } \bar{V} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} = 100 e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} R + j\omega L &= 10^3 + j 10^3 = \sqrt{10^6 + 10^6} e^{j \arctan \frac{10^3}{10^3}} = \\ &= \sqrt{2} 10^3 e^{j\frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Reemplazando (6.36) y (6.37) en (6.35) resulta:

$$\bar{I} = \frac{100 e^{j\pi/2}}{\sqrt{2} 10^3 e^{j\pi/4}} = 0,071 e^{j\pi/4} \text{ A} \quad (6.38)$$

Esta expresión indica que la corriente tiene un valor eficaz igual a 0,071 A. Este valor es el que indicaría un amperímetro intercalado en el circuito. Además comparando las Ecs. (6.36) y (6.38) se observa que la corriente atrasa en $\frac{\pi}{4}$ respecto de la tensión. Como se ve, no hace falta hallar la respuesta temporal para disponer de la información necesaria sobre la respuesta. En el capítulo siguiente en la Fig. 7.31 se resume el procedimiento seguido.

6.6 Problemas resueltos

6.6.1) Hallar los valores complejos eficaces de las siguientes señales:

a) $v(t) = 200 \sin(6280 t + \frac{\pi}{4})$ volt

b) $i(t) = 10 \cos(100 t + \frac{\pi}{2})$ A

c) $\dot{V}_m = 1000 e^{j(1000 + \pi/3)}$ volt

d) $\dot{I}_m = j 10 e^{j 500 t}$ A

Solución

a) Comparando:

$$v(t) = 200 \sin(6280 t + \frac{\pi}{4}) \text{ volt}$$

con la expresión general

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

resulta:

$$V_m = 200$$

$$\omega = 6280$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

El valor complejo eficaz resulta entonces:

$$\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} \text{ volt}$$

b) En este caso es:

$$i(t) = 10 \cos(100t + \pi/2) \text{ A} = 10 \sin(100t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 10 \sin(100t + \pi)$$

$$\therefore I_m = 10$$

$$\therefore \omega = 100$$

$$\theta_i = \pi$$

y en consecuencia:

$$\bar{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_i} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\pi} \text{ A}$$

c) Comparando,

$$\dot{V}_m = 1000 e^{j(1000t + \pi/3)}$$

con la expresión general.

$$\dot{V}_m = V_m e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

resulta:

$$V_m = 1000$$

$$\omega = 1000$$

$$\theta_v = \frac{\pi}{3}$$

y por lo tanto,

$$\bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_v} = \frac{1000}{\sqrt{2}} e^{j\pi/3} \text{ volt}$$

d) En este caso es:

$$\dot{I}_m = j 10 e^{j500t} \text{ A}$$

y como,

$$e^{j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

resulta:

$$\dot{I}_m = 10 e^{j\pi/2} e^{j500t} \text{ A}$$

$$\therefore I_m = 10$$

$$\omega = 500$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}$$

De donde,

$$\bar{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_i} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\pi/2} \text{ A}$$

6.6.2) Hallar los valores instantáneos asociados a los siguientes fasores armónicos y eficaces:

$$a) \dot{V}_m = 1000 e^{j(314 t + \pi/8)} \text{ volt}$$

$$b) \dot{I}_m = j 10 e^{j(1000 t + \pi/6)} \text{ A}$$

$$c) \bar{V} = 150 e^{j\pi/4} \text{ volt} ; \omega = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$d) \bar{I} = (5 + j 10) \text{ A} ; F = 50 \text{ Hz}$$

Solución:

a) El valor instantáneo se obtiene tomando la parte imaginaria del fasor armónico. Esto es:

$$v(t) = J_m \{ \dot{V}_m \} = J_m \{ 1000 e^{j(314 t + \pi/8)} \}$$

$$\therefore v(t) = J_m \{ 1000 \cos(314 t + \pi/8) + j 1000 \sin(314 t + \pi/8) \}$$

$$\therefore v(t) = 1000 \sin(314 t + \pi/8) \text{ volt}$$

$$b) \dot{I}_m = j 10 e^{j(1000 t + \pi/6)} \text{ A}$$

y como $j = e^{j\pi/2}$ resulta:

$$\dot{I}_m = 10 e^{j\pi/2} e^{j(1000 t + \pi/6)} = 10 e^{j(1000 t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})} \text{ A}$$

$$\therefore \dot{I}_m = 10 e^{j(1000 t + \frac{2}{3}\pi)} \text{ A}$$

$$\therefore i(t) = J_m \{ \dot{I}_m \} = J_m \{ 10 e^{j(1000 t + \frac{2}{3}\pi)} \} \text{ A}$$

$$\therefore i(t) = 10 \sin(1000 t + \frac{2}{3}\pi) \text{ A}$$

c) Primero se debe construir el fasor armónico:

$$\dot{V}_m = \sqrt{2} \bar{V} e^{j\omega t} = \sqrt{2} 150 e^{j\pi/4} e^{j2000 t} \text{ volt}$$

$$\therefore v(t) = J_m \{ \dot{V}_m \} = J_m \{ \sqrt{2} 150 e^{j(2000 t + \pi/4)} \} \text{ volt}$$

$$\therefore v(t) = 212 \sin(2000 t + \frac{\pi}{4}) \text{ volt}$$

d) En primer lugar debe escribirse el valor complejo eficaz en la forma exponencial:

$$\bar{I} = (5 + j 10) \text{ A}$$

$$\therefore I = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11,18 \text{ A}$$

$$\theta_i = \arctg \frac{10}{5} = 63,43^\circ = 1,11 \text{ rad}$$

El fasor armónico será:

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} \bar{I} e^{j\omega t} = \sqrt{2} 11,18 e^{j1,11} e^{j2\pi 50 t}$$

$$\therefore \dot{I}_m = 15,81 e^{j(314 t + 1,11)} \text{ A}$$

$$\therefore i(t) = J_m [\dot{I}_m] = J_m [15,81 e^{j(314 t + 1,11)}] \text{ A}$$

resultando finalmente,

$$i(t) = 15,81 \text{ sen}(314 t + 1,11) \text{ A}$$

6.6.3) Calcular los valores complejo eficaz e instantáneo de la corriente, para el circuito de la Fig. 6.14.

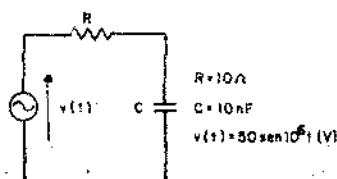


Fig. 6.14

Solución:

La ecuación de equilibrio instantáneo, obtenida a partir de la 2ª ley de Kirchhoff, resulta:

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

y la ecuación fasorial eficaz asociada:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= R \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} \\ \therefore \bar{I} &= \frac{\bar{V}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\bar{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j0} = 35,36 e^{j0} \text{ volt} \quad (6.40)$$

$$R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \frac{1}{\omega C} = 10 - j \frac{1}{10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = (10 - j 100) \Omega$$

y pasando a la forma exponencial:

$$R + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{10^2 + 100^2} e^{j \arctan(-\frac{100}{10})} = 100,5 e^{-j 84,29^\circ} \Omega \quad (6.41)$$

Reemplazando (6.40) y (6.41) en (6.39) resulta el siguiente valor complejo eficaz:

$$\bar{I} = \frac{35,36 e^{j0}}{100,5 e^{-j84,29^\circ}} = 0,352 e^{j84,29^\circ} \text{ A}$$

El valor instantáneo es:

$$i(t) = J_m [\hat{I}_m] = J_m [\sqrt{2} \cdot 0,352 e^{j84,29^\circ} e^{j10^6 t}] \text{ A}$$

$$\therefore i(t) = 0,498 \sin(10^6 t + 84,29^\circ) \text{ A}$$

6.7 Problemas propuestos

6.7.1) Hallar el valor complejo eficaz de la señal representada en la Fig. 6.15.

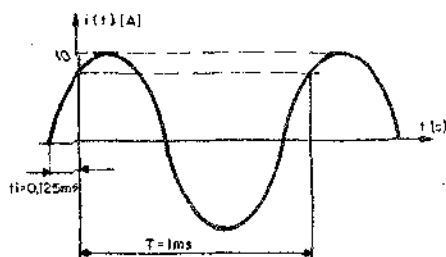


Fig. 6.15

Resultado:

$$\bar{I} = 7,07 e^{j45^\circ} \text{ A}$$

6.7.2) Hallar el valor instantáneo correspondiente al fasor armónico de la Fig. 6.16.

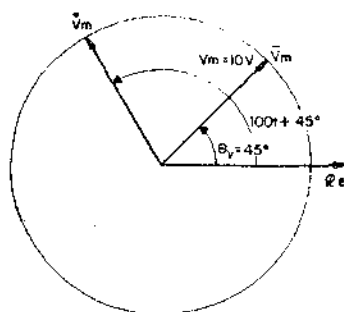


Fig. 6.16

Resultado:

$$v(t) = 10 \sin(100t + 45^\circ) \text{ volt}$$

6.7.3) Calcular el valor complejo eficaz de la tensión para el circuito de la Fig. 6.17.

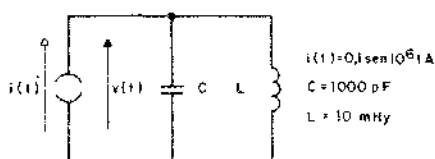


Fig. 6.17

Resultado:

$$\bar{V} = (0 - j11.28) \text{ volt}$$

Regimen permanente de circuitos excitados por señales senoidales

7.1. Introducción

En los cinco primeros capítulos se estudió la forma de analizar la respuesta de los circuitos simples en el dominio del tiempo. La metodología empleada es simple y general, pero el grado de dificultad de las soluciones crece muy rápidamente a medida que la geometría de los circuitos se hace más complicada.

Para salvar ese inconveniente se aplicarán en este capítulo los conceptos introducidos en el anterior. Se perderá generalidad, pues el método sólo es válido para *excitaciones senoidales* y se obtiene únicamente la *componente forzada* de la respuesta transitoria.

No obstante, los beneficios que se obtienen desde el punto de vista operativo son muy importantes y la cantidad de casos abarcados, suficientemente amplia para justificar plenamente la introducción del método.

Se comenzará por la solución de circuitos simples en el dominio de frecuencia, interpretando los resultados en el mismo, y sólo en estos casos se hará retornar la información al dominio del tiempo. Luego se definirán la impedancia y la admitancia complejas de excitación y, a partir de ellas, los circuitos equivalentes serie y paralelo. A continuación se darán algunas nociones elementales acerca de resonancia.

Sobre la base de los ejemplos desarrollados se verá la conveniencia de plantear y resolver los problemas en el dominio transformado, en lugar de resolverlos solamente en éste. Después se definirán y analizarán las potencias instantáneas, activa, reactiva y aparente y los conceptos energéticos asociados a cada una. A partir de las potencias se introducirán los factores de potencia, de mérito y de disipación.

7.2. Circuito resistivo puro

Se comenzará trabajando en el *dominio del tiempo*, en el cual se ha representado el circuito de la Fig. 7.1.

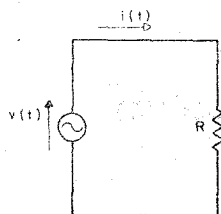


Fig. 7.1

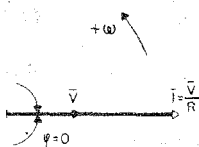


Fig. 7.2

Se supondrá que la excitación es de la forma:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \quad (7.1)$$

la ecuación de equilibrio instantáneo es

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t)$$

Se pasará ahora al *dominio de frecuencia*, escribiendo la ecuación fasorial asociada. Para ello bastará con reemplazar los valores instantáneos por los complejos eficaces, ya que al no existir derivadas ni integrales, no aparecerá el operador j .

Resulta, entonces, la ecuación transformada:

$$I = \frac{1}{R} \cdot \bar{V} \quad (7.2)$$

La Ec. (7.2) indica lo siguiente:

- El módulo de la corriente se obtiene dividiendo el módulo de la tensión por la resistencia.
- Dado que la relación entre tensión y corriente se establece a través de una constante real R , en un resistor, ambas están en fase.

Esto se refleja en el diagrama fasorial de la Fig. 7.2, que es la representación gráfica conjunta de los valores complejos eficaces de la tensión y la corriente, utilizando escalas adecuadas.

En un diagrama fasorial se respetan los desfases relativos entre las variables representadas, pero no necesariamente la fase inicial de cada una de ellas. Esto es, todo el diagrama puede ser girado hasta lograr que su interpretación sea más cómoda, siempre que no se lo deforme.

Para obtener la respuesta temporal, bastará con aplicar la transformación inversa, construyendo el fasor armónico máximo y proyectándolo sobre el eje imaginario, como se explicó en el Cap. 6.

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot \bar{I} \cdot e^{j\omega t}$$

teniendo en cuenta la Ec. (7.2), resulta:

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot \frac{V \cdot e^{j\theta_v}}{R} \cdot e^{j\omega t}$$

de donde:

$$i(t) = \text{Im}[\dot{I}_m] = \text{Im}\left[\sqrt{2} \cdot \frac{V}{R} \cdot e^{j(\omega t + \theta_v)}\right]$$

resultando finalmente:

$$i(t) = \frac{V_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \theta_v) \quad (7.3)$$

En la Fig. 7.3 se han representado la excitación (7.1) y la respuesta (7.3) en un mismo gráfico, en función del tiempo, suponiendo que la fase inicial θ_v es nula.

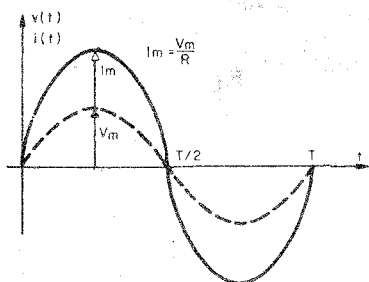


Fig. 7.3

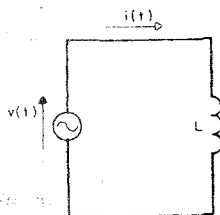


Fig. 7.4

7.3. Circuito inductivo puro

En la Fig. 7.4 se muestra el circuito que se estudiará, al que se supone excitado por una tensión de la forma dada por la Ec. (7.1).

La ecuación de equilibrio instantáneo en el dominio del tiempo resulta:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$$

Para pasar a la ecuación de equilibrio trasformada, dominio de frecuencia, debe tenerse en cuenta que, al estar afectada la variable $v(t)$ por una operación de integración, $\bar{V}$ debe ser dividida por $j\omega$. Resulta entonces:

$$\bar{I} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \bar{V} \quad (7.4)$$

De esta ecuación se deduce que:

- El módulo de la corriente se obtiene dividiendo el módulo de la tensión por ωL .
- La fase de $\bar{I}$ está atrasada en $\frac{\pi}{2}$ respecto de $\bar{V}$. En efecto, para pasar del fasor tensión al fasor corriente se divide por el operador j , lo que equivale a un giro en $(-\frac{\pi}{2})$.

En la Fig. 7.5, se muestra el diagrama fasorial correspondiente a la Ec. (7.4) tomando como fasor de referencia a la tensión.

La respuesta temporal se obtiene como en el párrafo anterior, mediante la trasformación inversa:

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot \bar{I} \cdot e^{j\omega t}$$

según la Ec. (7.4)

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} \cdot \frac{V \cdot e^{j\theta_v}}{j\omega L} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \cdot \frac{V e^{j\theta_v}}{\omega L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t}$$

resultando:

$$i(t) = \text{Im}[\dot{I}_m] = \text{Im}\left[\sqrt{2} \cdot \frac{V}{\omega \cdot L} \cdot e^{j(\omega t + \theta_v - \frac{\pi}{2})}\right]$$

que conduce a:

$$i(t) = \frac{V_m}{\omega \cdot L} \cdot \sin\left(\omega t + \theta_v - \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.5)$$

En la Fig. 7.6 se muestra la representación gráfica de la excitación (7.1) y la respuesta (7.5) en función del tiempo, suponiendo que $\theta_v = 0$. Nótese el defasaje de un cuarto de período entre la tensión y la corriente.

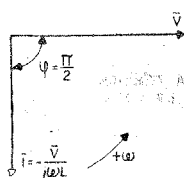


Fig. 7.5

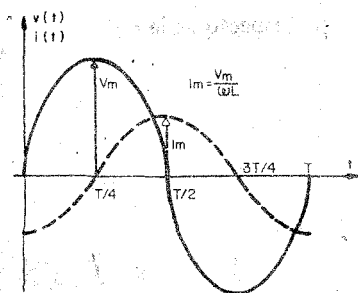


Fig. 7.6

7.4. Circuito capacitivo puro

Se supone excitado el circuito de la Fig. 7.7 por la tensión de la Ec. (7.1). En este caso, la ecuación de equilibrio instantánea resulta:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

y la ecuación transformada

$$\bar{I} = j\omega \cdot C \cdot \bar{V} \quad (7.6)$$

Donde se observa que:

- El módulo de la corriente se obtiene multiplicando por ωC al módulo de la tensión.
- La corriente está adelantada en $\frac{\pi}{2}$ respecto de la tensión, pues esta última se

encuentra multiplicada por el operador j en la Ec. (7.6).

En la Fig. 7.8 se muestra el diagrama fasorial asociado a la Ec. (7.6).

La respuesta temporal resulta en este caso:

$$i(t) = \text{Im} [\dot{I} m] = \omega \cdot C \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \theta_v + \frac{\pi}{2}) \quad (7.7)$$

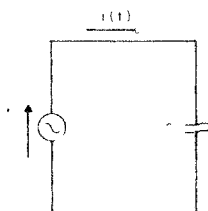


Fig. 7.7

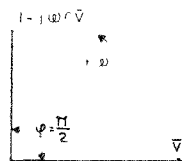


Fig. 7.8

En la Fig. 7.9, donde están representadas las Ecs. (7.1) y (7.7) en función del tiempo, para $\theta_v = 0$, puede apreciarse el adelanto de un cuarto de período de la corriente, respecto de la tensión.

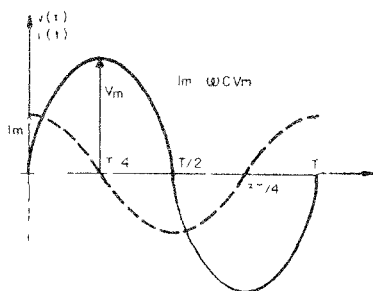


Fig. 7.9

LA TENSION ADELANTA RESPECTO
DE LA CORRIENTE EN EL INDUCTOR

CIVIL

EN EL CAPACITOR LA CORRIENTE
ADELANTA RESPECTO A LA TENSION

Fig. 7.10

Regla mnemotécnica; en la Fig. 7.10, se sugiere una regla para recordar los resultados hallados con respecto al desfase entre tensión y corriente en los circuitos inductivos y capacitivos.

7.5. Circuito R – L – C serie

Se analizará ahora el circuito de la Fig. 7.11, en el que la tensión $v(t)$ está dada por la Ec. (7.1).

Aplicando la 2da. ley de Kirchhoff y expresando las tensiones sobre los elementos pasivos en función de la corriente, resulta la siguiente ecuación de equilibrio instantáneo:

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Pasando al dominio de frecuencia, resulta:

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I} + j \omega L \cdot \bar{I} + \frac{1}{j \omega C} \cdot \bar{I} \quad (7.8)$$

de la que puede obtenerse la respuesta trasformada:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C})} \quad (7.9)$$

que puede desdoblarse en:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$\theta_i = \theta_v - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

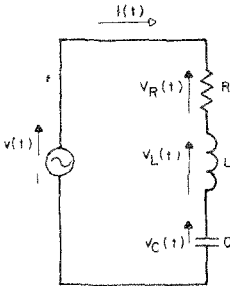


Fig. 7.11

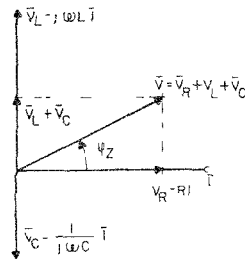


Fig. 7.12

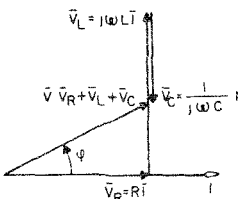


Fig. 7.13

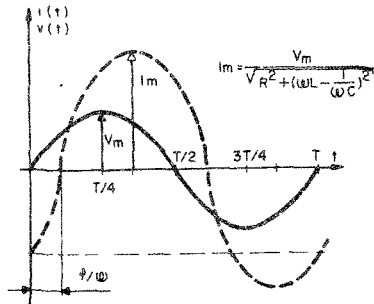


Fig. 7.14

Para construir el diagrama fasorial, puede procederse de alguna de las formas siguientes:

- Representar $\bar{V}_R$, $\bar{V}_L$ y $\bar{V}_C$ a partir de un punto común en una escala adecuada y luego componerlos aplicando la regla del paralelogramo, para obtener la tensión total. Este método se muestra en la Fig. 7.12.
- Representar $\bar{V}_R$, $\bar{V}_L$ y $\bar{V}_C$ uno a continuación del otro, respetando las fases relativas formando una poligonal, como se ve en la Fig. 7.13.

En ambos casos, por tratarse de un circuito con elementos asociados en serie, es conveniente tomar a la corriente como fasor de referencia por ser la variable común a todos los elementos. Nótese que la tensión total puede adelantar, atrasar o estar en fase con la corriente.

La respuesta temporal para el circuito estudiado sería:

$$i(t) = \text{Im} [\dot{I} m] = \frac{Vm}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot \sin(\omega t + \theta_v - \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C}}{R}) \quad (7.10)$$

cuya representación gráfica, junto con la excitación, se encuentra en la Fig. 7.14 para $\theta_v = 0$.

Comparando la Fig. 7.13 con la 7.14 y la Ec. (7.9) con la (7.10) se ve claramente que la información sobre el comportamiento del circuito puede ser interpretada mucho más rápida y fácilmente en el dominio de frecuencia, que en el de la variable t .

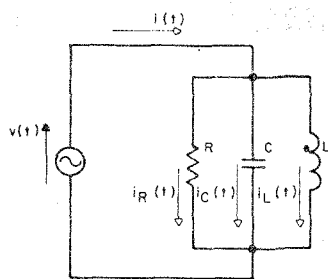


Fig. 7.15

7.6. Circuito R - L - C paralelo

Se verá ahora la configuración de la Fig. 7.15.

La ecuación de equilibrio instantáneo, obtenida a partir de la 1ª ley de Kirchhoff es:

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

que puede expresarse:

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t) + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt$$

pasando al dominio de frecuencia resulta:

$$\bar{I} = \frac{1}{R} \cdot \bar{V} + j\omega C \cdot \bar{V} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \bar{V} \quad (7.11)$$

de donde

$$\bar{I} = \left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \bar{V} \quad (7.12)$$

El diagrama fasorial mostrado en la Fig. 7.16 ha sido construido tomando como referencia al fasor tensión, por ser la variable común a todos los elementos, ya que se trata de una asociación en paralelo. Tal como en el caso del circuito R—L—C serie, la corriente total puede estar en fase, adelantada o atrasada con respecto a la tensión, según los valores particulares de ω , C y L .

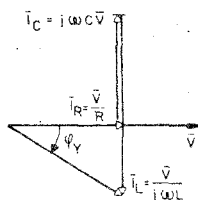


Fig. 7.16

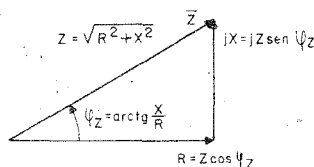


Fig. 7.17

7.7. Impedancia y admitancia complejas de excitación

Analizando las Ecs (7.9) y (7.12) se observa que en ambas la respuesta está relacionada con la excitación, a través de una función que denominaremos $H(j\omega)$, la cual depende de la geometría del circuito, los parámetros circuitales R—L—C y la pulsación ω . En forma genérica, puede escribirse entonces:

$$R(j\omega) = H(j\omega) \cdot Ex(j\omega) \quad (7.13)$$

donde $R(j\omega)$ es la respuesta transformada ($\bar{V}$ o $\bar{I}$, según corresponda) y $Ex(j\omega)$ es el valor complejo eficaz de la excitación ($\bar{I}$ o $\bar{V}$).

Para simplificar más aun la solución de los problemas que se están estudiando, se buscará algún procedimiento para construir la función $H(j\omega)$ en forma sistemática a partir de la geometría del circuito y los tipos de elementos incluidos; con ese fin se definirán la impedancia y la admitancia complejas de excitación, que son dos casos particulares de la función $H(j\omega) = \bar{H}$.

La impedancia compleja de excitación $\bar{Z}$ es el cociente entre los valores complejos eficaces de la tensión y la corriente en un mismo par de terminales.

$$\bar{H} = \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad (7.14)$$

La impedancia compleja puede ser expresada en forma binómica:

$$\bar{Z} = R + jX$$

donde $R = \text{Re}[\bar{Z}]$ es la componente real de la impedancia y se denomina resistencia; $X = \text{Im}[\bar{Z}]$ es la componente imaginaria de la impedancia y se denomina reactancia. O bien en forma exponencial: $\bar{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_Z}$. Donde $Z = |\bar{Z}|$ es el módulo de la impedancia y φ_Z el argumento de la misma.

Las fórmulas de pasaje directo e inverso de la forma binómica a la exponencial son las siguientes:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + X^2} & R &= Z \cdot \cos \varphi_Z \\ \varphi_Z &= \arctg \frac{X}{R} & X &= Z \cdot \sin \varphi_Z \end{aligned}$$

En la Fig. 7.17 se muestra la impedancia y sus componentes. Los ejemplos, para el circuito R-L-C serie, reemplazando la Ec. (7.9) en la (7.14), resulta:

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7.15)$$

$$\text{Re}[\bar{Z}] = R \quad \text{y}$$

$$\text{Im}[\bar{Z}] = X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C$$

donde:

$X_L = \omega L$ es la reactancia inductiva

y $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se denomina reactancia capacitiva.

Para el circuito R-L-C paralelo, resulta en cambio, según las Ecs. (7.12) y (7.14):

$$\bar{Z} = \frac{1}{R + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{R}{R^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} - j \frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{R^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad (7.16)$$

donde:

$$\text{Re}[\bar{Z}] = \frac{R}{R^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad \text{y}$$

$$\text{Im} [\bar{Z}] = \frac{-(\omega C - \frac{1}{\omega L})}{R^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

La resistencia es siempre positiva en los circuitos pasivos. En cambio, la reactancia puede ser igual, mayor o menor que cero. Para los circuitos en los que tiene preponderancia la reactancia inductiva, resultan X y φ_z positivos.

La *admitancia compleja de excitación* $\bar{Y}$ se define como el cociente entre los valores complejos eficaces de la corriente y la tensión en un mismo par de terminales:

$$\bar{H} = \bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \quad (7.17)$$

En forma binómica

$$\bar{Y} = G + jB = Y \cdot e^{j\varphi_Y}$$

donde

$G = \text{Re} [\bar{Y}]$ se denomina conductancia

$B = \text{Im} [\bar{Y}]$ se denomina susceptancia

$\bar{Y}$ = módulo de la admitancia

φ_Y = argumento de la admitancia

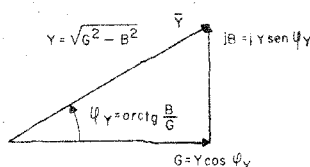


Fig. 7.18

En la Fig. 7.18 se representan la admitancia y sus componentes, para un circuito capacitivo ($B > 0$).

Las expresiones de la admitancia para los circuitos R-L-C serie y paralelo resultan, respectivamente:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} - j \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (7.18)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \quad (7.19)$$

De las Ecs. (7.14) y (7.17) surge que la admitancia compleja es la inversa de la impedancia compleja.

Esto es:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{Z} \\ \varphi_y = -\varphi_z \end{array} \right.$$

Es decir que, la información contenida en $\bar{Z}$ e $\bar{Y}$ es la misma, por lo que la definición de ambas podría parecer redundante. Sin embargo, comparando las Ecs. (7.15) (7.16), (7.18) y (7.19), se advierte que dicha información, si bien es la misma, está presentada de distinta manera. En efecto, la impedancia tiene una expresión simple para circuitos con elementos asociados en serie, mientras que es más complicada para asociaciones en paralelo. Con la admitancia ocurre lo contrario.

Cuando se deba hacer referencia genéricamente a la impedancia y la admitancia en forma conjunta, se usará alguna de las contracciones siguientes:

<u>impedancia</u>		<u>admitancia</u>
IMMITANCIA	o	ADPEDANCIA
<u>admitancia</u>		<u>impedancia</u>

La impedancia se mide en ohm (Ω) y la admitancia en siemens (S), aunque en el libro también se emplea el mho ($\mathcal{U}$).

7.8. Resonancia serie

Se retomará el análisis del circuito R-L-C serie de la Fig. 7.11. El valor complejo eficaz de la corriente está dado por:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad \text{que puede expresarse}$$

$$\bar{I} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot e^{j(\theta_v - \varphi_z)} \quad \text{siendo} \quad \varphi_z = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

El diagrama fasorial es el de la Fig. 7.13.

Se denomina *resonancia serie* al estado particular que se presenta en el circuito de la Fig. 7.11 cuando la reactancia total $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ se anula.

Es decir, cuando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (7.20)$$

La condición de resonancia (7.20) puede ser alcanzada variando f , L o C , dan-

do lugar a las expresiones siguientes:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} ; C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L} ; L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C}$$

Cuando se satisface la Ec. (7.20) en el circuito se cumplen las siguientes condiciones:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

La reactancia total se anula

$$\bar{Z}_0 = R$$

El circuito se comporta como resistivo puro y la impedancia toma su mínimo valor.

$$\varphi_{z_0} = 0$$

El defasaje entre la tensión y la corriente se anula.

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}}{R}$$

La corriente toma su máximo valor.

$$\bar{V}_{R_0} = R \cdot \bar{I}_0 = \bar{V}$$

Toda la tensión queda aplicada sobre el resistor.

$$\bar{V}_{L_0} + \bar{V}_{C_0} = 0$$

Las tensiones complejas eficaces sobre el inductor y el capacitor se cancelan entre sí.

$$V_{L_0} = V_{C_0} \cong V$$

Los módulos de las tensiones sobre el inductor y el capacitor son iguales entre sí, pudiendo resultar mayores, menores o iguales que

la tensión aplicada, según sea la relación entre R y $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Esto puede verse claramente en el diagrama fasorial de la Fig. 7.19.

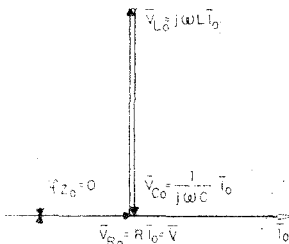


Fig. 7.19

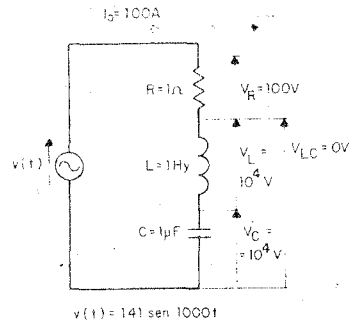


Fig. 7.20

El ejemplo numérico siguiente permite mostrar la posibilidad de que en la resonancia serie aparezcan sobretensiones, bajo determinadas condiciones.

Supóngase que en el circuito considerado sean:

$$\bar{V} = 100 \angle 0^\circ \text{ V} ; \omega = 1000 \text{ r/s}$$

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^6 \cdot 1} = 10^{-6} \text{ F}$$

En estas condiciones resulta:

$$\bar{I}_o = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_o} = \frac{100 \text{ V}}{10 \Omega} = 10 \text{ A}$$

$$\bar{V}_{Ro} = R \bar{I}_o = R \cdot \frac{\bar{V}}{R} = \bar{V} = 100 \text{ V}$$

$$\bar{V}_{Lo} = j\omega L \cdot \bar{I}_o = j \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10 = j \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$\bar{V}_{Co} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}_o = \frac{1}{j \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 10 = -j \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$\bar{V}_{LC} = \bar{V}_L + \bar{V}_C = 0 \text{ V}$$

De modo que al aplicar una tensión de 100 V al circuito, aparecen sobre el inductor y sobre el capacitor 10.000 V, como se muestra en la Fig. 7.20.

§ 7.9. Resonancia paralelo

Según se vió al analizar el circuito R-L-C paralelo, la corriente compleja eficaz está dada por:

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V} = \left[\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \bar{V}$$

que puede escribirse:

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot V \cdot e^{j(\theta_v - \varphi_y)} \quad \text{con} \quad \varphi_y = \arctg \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R} \right)$$

En este caso se denomina *resonancia paralelo* al estado particular que se presenta en el circuito de la Fig. 7.15 cuando se anula la susceptancia total $B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$.

Quando se satisface la condición de resonancia, el circuito se comporta como resistivo puro y la admitancia y la corriente toman sus mínimos valores.

El diagrama de la Fig. 7.16 se convierte en el de la Fig. 7.21, donde puede verse que las corrientes $\bar{I}_L$ e $\bar{I}_C$ pueden tomar valores superiores, iguales o inferiores a la corriente total $\bar{I}$.

El ejemplo numérico siguiente permite apreciar que las corrientes en las ramas reactivas pueden llegar a tomar valores elevados, aun cuando la corriente total sea muy pequeña. En efecto, suponiendo que:

$$\bar{V} = (100 + j0) \text{ V}; \omega = 10^3 \text{ r/s}; C = 1000 \mu\text{F}$$

$$R = 1 \text{ M}\Omega; L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = 10^{-3} \text{ H} = 1 \text{ mH}$$

Con estos valores resulta:

$$\bar{I}_{R0} = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{10^6 \Omega} = 100 \mu\text{A} = \bar{I}$$

$$\bar{I}_C = j\omega C \cdot \bar{V} = j \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = j100 \text{ A}$$

$$\bar{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \cdot \bar{V} = \frac{1}{j \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \cdot 100 = -j100 \text{ A}$$

$$\bar{I}_{LC} = \bar{I}_L + \bar{I}_C = 0$$

En la Fig. 7.22 se resumen los valores calculados.

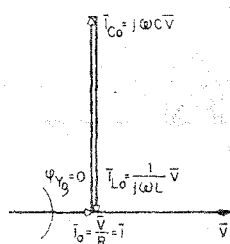


Fig. 7.21

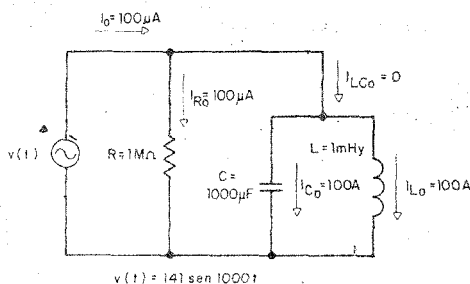


Fig. 7.22

7.10 Potencia instantánea

Si se considera el dipolo pasivo de la Fig. 7.23, en el cual, al aplicar una tensión

$$v(t) = V_m \text{ sen } \omega t$$

circula una corriente

$$i(t) = I_m \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi_z)$$

cuya fase difiere en φ_z radianes respecto de la tensión.

La potencia instantánea desarrollada en el circuito será:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m \cdot \text{sen } \omega t \cdot I_m \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi_z) \quad (7.21)$$

Recordando que $\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ la (7.21) puede escribirse

$$p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi_z - \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi_z)$$

y como $\frac{S_m}{\sqrt{2}} = S$, resulta:

$$p(t) = VI \cos \varphi_z - VI \cos(2\omega t - \varphi_z) \quad (7.22)$$

En consecuencia, la potencia instantánea tiene una componente constante y una senoidal de frecuencia doble que la de la excitación. El desfase φ_z entre la tensión y la corriente, puede variar entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$. Se analizarán los casos más importantes:

a) $\varphi_z = 0$ (Circuito Resistivo Puro)

La Ec. (7.22) se reduce a:

$$p(t) = VI - VI \cdot \cos 2\omega t$$

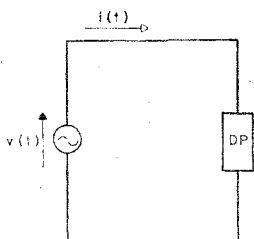


Fig. 7.23

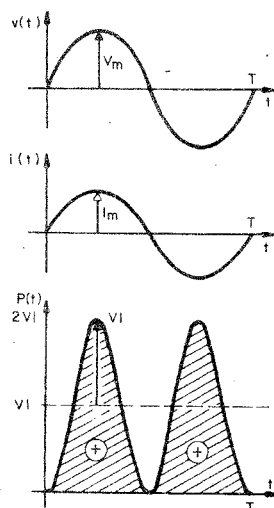


Fig. 7.24

En la Fig. 7.24 se representan gráficamente las curvas de la tensión, la corriente y la potencia instantánea.

El área encerrada entre la curva y el eje de los tiempos es la energía

$$w \Big|_0^t = \int_0^t p(t) \cdot dt$$

Nótese que en este caso el área es siempre positiva, lo que indica que la fuente es la que entrega permanentemente energía al circuito, sin que éste le devuelva

parte alguna de la misma. Esto es característico del intercambio de energía en forma irreversible. En efecto, toda la energía recibida por el circuito es cedida definitivamente al medio en forma de calor, trabajo mecánico, energía química y/o radiaciones luminosas.

b) $\varphi_z = +\frac{\pi}{2}$ (Circuito Inductivo Puro)

En este caso la Ec. (7.22) resulta:

$$p(t) = 0 - VI \cdot \cos(2\omega t - \pi/2) = -VI \sin 2\omega t$$

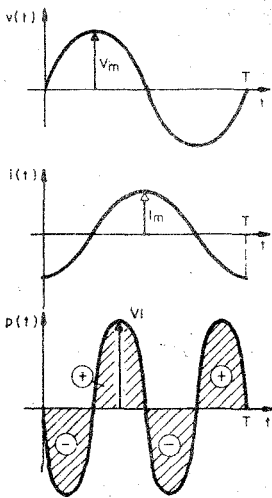


Fig. 7.25

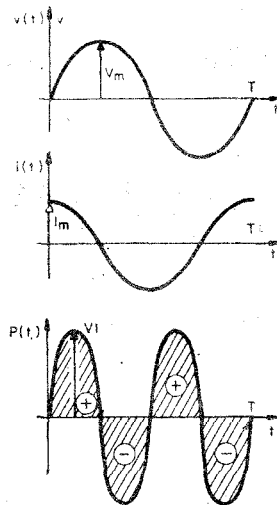


Fig. 7.26

En la Fig. 7.25 se muestran las curvas de $v(t)$, $i(t)$ y $p(t)$. En ella puede observarse que la energía neta intercambiada a lo largo de un período completo es nula. Toda la energía recibida por el circuito es íntegramente devuelta a la fuente dentro del mismo ciclo.

c) $\varphi_z = -\frac{\pi}{2}$ (Circuito Capacitivo Puro)

La Ec. (7.22) se reduce a:

$$p(t) = 0 - VI \cdot \cos(2\omega t + \pi/2) = VI \cdot \sin 2\omega t$$

En la Fig. 7.26 se representan los valores instantáneos de la tensión, la corriente y la potencia. Como en el caso anterior, toda la energía recibida es íntegramente devuelta a la fuente a lo largo del período, resultando un intercambio reversible.

d) $\varphi_z = +\pi/4$ (Circuito Inductivo Disipativo)

La Ec. (7.22) resulta en este caso:

$$p(t) = VI \cos \pi/4 - VI \cos (2\omega t - \pi/4)$$

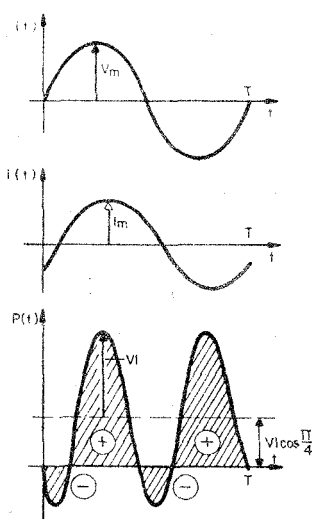


Fig. 7.27

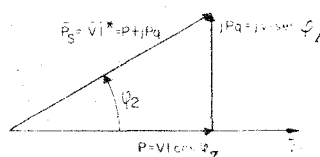


Fig. 7.28

La Fig. 7.27 muestra la representación gráfica de $v(t)$, $i(t)$ y $p(t)$. Nótese que en este caso la energía entregada por la fuente es mayor que la devuelta por el circuito. Es decir, que una parte de la energía es cedida definitivamente al medio y el resto intercambiado reversiblemente.

Es evidente que la energía neta entregada por el generador es función del defasaje φ_z , ya que la oscilación de amplitud VI se produce alrededor del valor $VI \cdot \cos \varphi_z$. Como casos límites, para $\varphi_z = 0$ se obtiene la Fig. 7.24, para $\varphi_z = +\frac{\pi}{2}$ la 7.25 y para $\varphi_z = -\frac{\pi}{2}$ la Fig. 7.26.

7.11 Potencias activa, reactiva y aparente

Considérese nuevamente la Ec. (7.22)

$$p(t) = VI \cos \varphi_z - VI \cos (2\omega t - \varphi_z) \quad (7.22)$$

El primer término del segundo miembro puede ser escrito también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} VI \cos \varphi_z &= VI \cos (\theta_v - \theta_i) = \operatorname{Re} [VI e^{j(\theta_v - \theta_i)}] = \operatorname{Re} [V e^{j\theta_v} \cdot I e^{-j\theta_i}] = \\ &= \operatorname{Re} [\bar{V} I^*] \end{aligned} \quad (7.23)$$

Donde $\bar{I}^*$ es el conjugado de la corriente compleja eficaz $\bar{I}$.

Reemplazando (7.23) en (7.22), resulta:

$$p(t) = \operatorname{Re} [VI^*] - VI \cos (2\omega t - \varphi_z) \quad (7.24)$$

Interesa introducir una potencia que caracterice la intensidad del proceso de intercambio de energía en forma irreversible. Teniendo en cuenta los resultados hallados en el párrafo anterior, se define entonces a la *potencia activa* (P) como el valor medio de la potencia instantánea para un período completo de la excitación. Es decir:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (7.25)$$

Reemplazando (7.24) en (7.25), resulta:

$$P = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \operatorname{Re} [\bar{V}\bar{I}^*] dt - \int_0^T VI \cos (2\omega t - \varphi_z) dt \right\}$$

$$\therefore P = \operatorname{Re} [\bar{V}\bar{I}^*] = VI \cos \varphi_z \quad (7.26)$$

Nótese que la potencia activa es tanto mayor cuanto menor sea φ_z (circuito menos reactivo).

Ahora bien, el producto $\bar{P}_s = \bar{V}\bar{I}^*$ es un fasor, cuya componente real es la potencia activa. Pero la componente imaginaria, también tiene dimensiones de una potencia. ¿Qué representará ella? Por lo pronto puede verse que:

$$Pq = \operatorname{Im} [\bar{V}\bar{I}^*] = VI \sin \varphi_z \quad (7.27)$$

es tanto mayor cuanto más reactivo es el circuito. Por lo tanto se la denomina *potencia reactiva* ya que caracteriza la intensidad del proceso de intercambio reversible de energía. Finalmente, al fasor $\bar{P}_s = \bar{V}\bar{I}^* = P + jPq$ (7.28) se lo denomina *potencia aparente compleja*. Esta potencia no tiene un significado propio, ya que es el mayor valor que pueden tomar la potencia activa o la reactiva. Se la puede interpretar como la potencia disponible para abastecer los procesos reversibles e irreversibles. Sin embargo, tiene un significado tecnológico más preciso. En efecto, en toda máquina eléctrica no puede superarse un cierto valor de corriente, por razones de disipación, y un dado valor de tensión, por razones de aislación. Por lo tanto el producto $P_s = VI$ es una cifra de mérito que permite caracterizar cuantitativamente la capacidad de manejo de energía de una máquina.

La potencia activa se mide en watts (W), la aparente en voltamperes (VA) y la reactiva en voltamperes reactivos (VAr). En la Fig. 7.28 se representan la potencia aparente compleja y sus componentes.

7.12 Factor de potencia

Teniendo en cuenta que el módulo de la potencia aparente es el producto de los valores eficaces de la tensión y la corriente, la Ec. (7.26) puede escribirse:

$$P = P_s \cos \varphi_z \quad (7.29)$$

que muestra que el $\cos \varphi_z$ define la fracción de la potencia aparente P_s que ha de convertirse en potencia activa P . Por tal causa, a:

$$\cos \varphi_z = \frac{P}{P_s} \quad (7.30)$$

se lo denomina *factor de potencia*.

Cuanto más elevado es el valor del factor de potencia, mayor resulta el aprovechamiento de las instalaciones eléctricas. En efecto, para alimentar una instalación que consume 1000 kW con un $\cos \varphi_z = 0,66$, la red de distribución de energía debe estar dimensionada para entregar una potencia aparente de 1515 kVA.

Por otra parte, los costos directos de explotación de una línea de transporte de energía eléctrica, son proporcionales a la relación entre las pérdidas de la misma y la potencia transportada. Para una potencia activa P , la corriente vale, según la Ec. (7.26):

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi_z}$$

y la pérdida de potencia en la línea, supuesto que su resistencia es R_L , resulta:

$$\Delta P_L = R_L I^2 = \frac{R_L P^2}{V^2 \cos^2 \varphi_z}$$

De modo que el cociente entre la potencia perdida en la línea y la transportada es:

$$\frac{\Delta P_L}{P} = \frac{R_L P}{V^2} \frac{1}{\cos^2 \varphi_z}$$

que varía en forma inversamente proporcional al cuadrado del factor de potencia. Por lo tanto, cuanto más bajo es el $\cos \varphi_z$, tanto más cara resulta la tarifa para el suministro de energía eléctrica. Por tal causa, las empresas de electricidad controlan el factor de potencia de las industrias que consumen mucha energía, obligando a mantenerlo por encima de 0,8. Para corregir el factor de potencia se agregan cargas capacitivas, tales como baterías de capacitores o motores sincrónicos, ya que el resto de las máquinas y artefactos conectados, tiene una componente reactiva inductiva.

7.13 Adición de las potencias activas y reactivas

Se considerará el circuito de la Fig. 7.29, constituido por n dipolos pasivos conectados en serie. Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff resulta:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n$$

y multiplicando ambos miembros por el conjugado de la corriente compleja eficaz:

$$\bar{V}\bar{I}^* = \bar{V}_1\bar{I}_1^* + \bar{V}_2\bar{I}_2^* + \dots + \bar{V}_n\bar{I}_n^*$$

El primer miembro es la potencia aparente compleja total, mientras que los términos del segundo miembro representan las potencias aparentes complejas de cada dipolo. Es decir:

$$\bar{P}_s = \bar{P}_{s_1} + \bar{P}_{s_2} + \dots + \bar{P}_{s_n} \quad (7.31)$$

Se analizará ahora el circuito de la Fig. 7.30, que corresponde a una asociación de dipolos en paralelo. Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff se obtiene:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n \quad \therefore$$

$$\bar{I}^* = \bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \dots + \bar{I}_n^*$$

multiplicando ambos miembros por la tensión compleja eficaz, resulta:

$$\bar{V}\bar{I}^* = \bar{V}\bar{I}_1^* + \bar{V}\bar{I}_2^* + \dots + \bar{V}\bar{I}_n^*$$

que conduce a la misma Ec. (7.31), que puede ser escrita:

$$\bar{P}_s = \sum_{k=1}^n \bar{P}_{s_k} = \sum_{k=1}^n (P_k + jP_{q_k}) = \sum_{k=1}^n P_k + j \sum_{k=1}^n P_{q_k}$$

de donde:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \quad (7.32)$$

$$P_q = \sum_{k=1}^n P_{q_k} \quad (7.33)$$

Como toda asociación mixta está constituida por combinaciones de conexiones en serie y en paralelo de elementos de circuito o dipolos, la Ec. (7.32) permite afirmar que: "La potencia activa total entregada a un circuito es igual a la suma de las potencias activas consumidas por cada uno de los elementos o dipolos que lo constituyen". Nótese que esta conclusión concuerda plenamente con lo postulado por la ley de conservación de la energía.

Análogamente, la Ec. (7.33) dice que: "La potencia reactiva total puesta en juego en un circuito es igual a la suma algebraica de las potencias reactivas intercambiadas por cada uno de los elementos o dipolos que lo constituyen". Aunque es obvio, no está de más resaltar que la potencia aparente total no puede obtenerse sumando los módulos de las potencias aparentes parciales, ya que el módulo de la suma no es igual a la suma de los módulos.

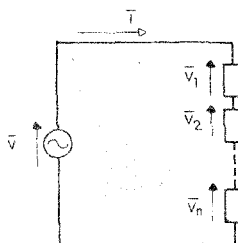


Fig. 7.29

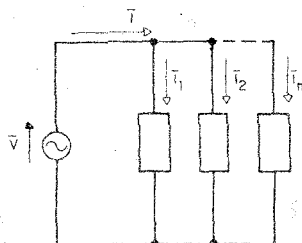


Fig. 7.30

7.14. Planteo y solución de problemas directamente en el dominio de frecuencia

7.14.1) **Introducción:** En la Fig. 7.31 se muestra esquemáticamente el procedimiento seguido para hallar el régimen permanente de circuitos excitados por señales senoidales. La aplicación de las leyes circuitales al modelo circuital idealizado, para la excitación dada, permite obtener la ecuación de equilibrio instantáneo en el dominio temporal. Al pasar al dominio frecuencial, dicha ecuación integro-diferencial se convierte en una algebraica, a partir de la cual puede obtenerse fácilmente la respuesta trasformada. El estudio de algunos circuitos simples realizado al principio del capítulo con el procedimiento descrito, mostró que los resultados podían ser fácilmente interpretados en el dominio $j\omega$, haciendo necesario el retorno al dominio temporal. La metodología puede ser perfeccionada aun más, si se transforman las leyes, el modelo circuital y la excitación. De este modo, se puede hallar la ecuación de equilibrio trasformada directamente en el dominio $j\omega$, como se esquematiza en la Fig. 7.32. Según se mencionó, el retorno al dominio temporal no es realizado en la mayoría de los casos. Finalmente, desarrollando métodos que permitan construir la impedancia o la admitancia de excitación por asociaciones de elementos, puede pasarse directamente de la excitación trasformada a la respuesta frecuencial.

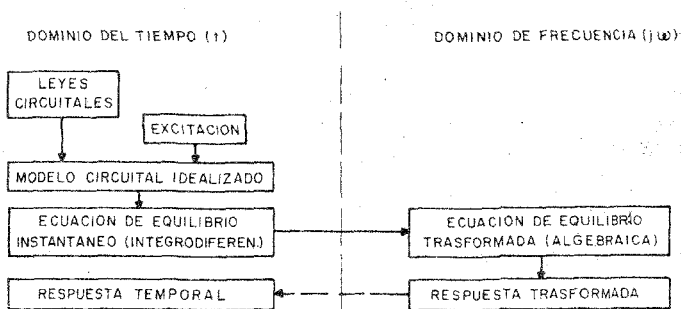


Fig. 7.31

Resulta evidente que para seguir la metodología propuesta, es necesario hallar previamente las leyes, las excitaciones y los modelos circuitales transformados y encontrar la manera de asociar dipolos en el dominio de frecuencia.

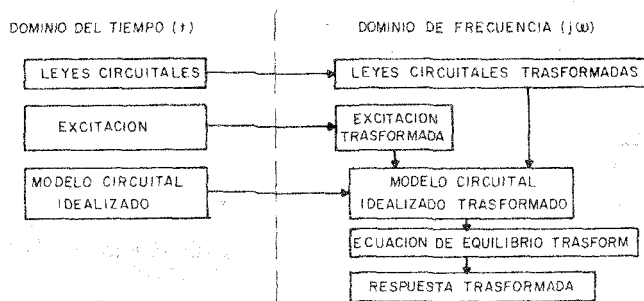


Fig. 7.32

7.14.2) **Trasformación de las leyes de Kirchhoff y las relaciones tensión-corriente de los elementos de circuitos idealizados:** Aplicando la correspondencia entre funciones senoidales y fasores eficaces, se obtienen las expresiones resumidas en el cuadro de la Fig. 7.33. Es muy importante insistir en que no pueden sumarse los módulos de las corrientes o las tensiones eficaces, ya que el módulo de la suma no es igual a la suma de módulos.

		DOMINIO TEMPORAL	DOMINIO FRECUENCIAL
1ª LEY DE KIRCHHOFF		$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$	$\sum_{k=1}^n \bar{I}_k = 0$
2ª LEY DE KIRCHHOFF		$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0$	$\sum_{k=1}^n \bar{V}_k = 0$
RELACIONES TENSION-CORRIENTE	RESISTOR	$v(t) = R \cdot i(t)$	$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$
	INDUCTOR	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$\bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I}$
	CAPACITOR	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}$

Fig. 7.33

7.14.3) **Trasformación de modelos circuitales:** Como se están estudiando circuitos que incluyen elementos disipativos en régimen permanente, la componente libre no tiene influencia alguna. En consecuencia, al no tener que considerar las energías acumuladas en los elementos reactivos en el instante inicial, bastará con tomar en cuenta la modificación de las relaciones tensión-corriente mostradas en el cuadro de la Fig. 7.33, para pasar del dominio t al $j\omega$. El análisis de las mismas muestra que no es necesario alterar la geometría del circuito. Basta con reemplazar las variables temporales por los fasores asociados, como se muestra en la Fig. 7.34.

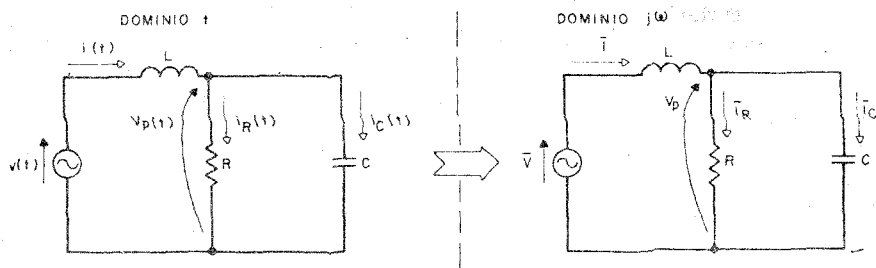


Fig. 7.34

7.14.4) **Trasformación de la excitación:** De acuerdo con lo analizado en el Cap. 6, para transformar una excitación de la forma $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$, basta con dividir la amplitud V_m por $\sqrt{2}$, para obtener el valor eficaz y multiplicarlo por $e^{j\theta_v}$ para asignarle la fase correspondiente:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \Rightarrow \bar{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_v}$$

Si fuera necesario retornar al dominio del tiempo, bastará con construir el fasor armónico y tomar su parte imaginaria.

$$Jm[\bar{V}_m] = Jm \left[\frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{2} e^{j\theta_v} e^{j\omega t} \right] = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

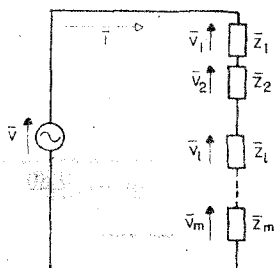


Fig. 7.35

7.14.5) **Asociación de dipolos en serie y en paralelo:** Considérese el circuito de la Fig. 7.35, en el que se encuentran asociados en serie varios dipolos pasivos, cada uno de los cuales está caracterizado por su impedancia compleja de excitación. Aplicando la 2a. ley de Kirchhoff, resulta:

$$\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_l + \dots + \bar{V}_m$$

y dividiendo ambos miembros por la corriente total $\bar{I}$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}} + \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}} + \dots + \frac{\bar{V}_l}{\bar{I}} + \dots + \frac{\bar{V}_m}{\bar{I}}$$

Teniendo en cuenta la Ec. 7.14, puede escribirse:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_l + \dots + \bar{Z}_m \quad (7.34)$$

donde $\bar{Z}_T = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ es la impedancia compleja de excitación de un único dipolo equivalente al conjunto de la Fig. 7.35.

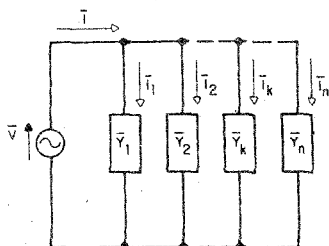
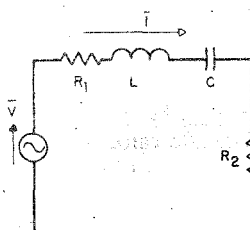


Fig. 7.36



$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \, \Omega & C &= 10 \, \mu\text{F} \\ R_2 &= 20 \, \Omega & \bar{V} &= 100 e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ V} \\ L &= 1 \text{ H} & \omega &= 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Fig. 7.37

Si se consideran ahora los dipolos asociados en paralelo de la Fig. 7.36, aplicando la 1.ª ley de Kirchhoff, resulta:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_k + \dots + \bar{I}_n$$

y de acuerdo con la Ec. (7.17), si se dividen ambos miembros por $\bar{V}$, queda:

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \dots + \bar{Y}_k + \dots + \bar{Y}_n \quad (7.35)$$

Resumiendo, las (7.34) y (7.35) pueden expresarse:

$$\text{Asociación en serie} \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_T = \sum_{l=1}^m \bar{Z}_l \quad (7.36)$$

$$\text{Asociación en paralelo} \Rightarrow \bar{Y}_T = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k \quad (7.37)$$

Estas ecuaciones corroboran la conveniencia de emplear la admitancia para las asociaciones en paralelo y la impedancia para las conexiones en serie de elementos o dipolos.

7.14.6) Ejemplos de Aplicación: a) Calcular el valor de la corriente compleja eficaz para el circuito de la Fig. 7.37.

Solución: Por tratarse de elementos asociados en serie, la impedancia total será la suma de las impedancias de cada elemento, calculados de acuerdo con la Tabla de la Fig. 7.33:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_{R_1} + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C + \bar{Z}_{R_2} = R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R_2$$

$$\therefore \bar{Z}_T = (R_1 + R_2) + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

y reemplazando valores:

$$\bar{Z}_T = 10 \, \Omega + 20 \, \Omega + j(10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1H - \frac{1}{10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}})$$

$$\therefore \bar{Z}_T = (30 + j 900) \, \Omega$$

que en forma exponencial vale:

$$\bar{Z}_T = 900,5 \, e^{j88^\circ} \, \Omega$$

de donde resulta finalmente una corriente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_T} = \frac{100 \, e^{j90^\circ} \, \text{V}}{900,5 \, e^{j88^\circ} \, \Omega} = 0,11 \, e^{j2^\circ} \, \text{A}$$

b) Calcular el valor complejo eficaz de la corriente $\bar{I}_3$ en el circuito de la Fig. 7.38.

Solución: Se comienza por el cálculo de $\bar{Y}_2$:

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{(20 + j20) \, \Omega} = \frac{20 - j20}{20^2 + 20^2} = (0,025 - j 0,025) \, \text{S}$$

La admitancia total de las dos ramas conectadas en paralelo es:

$$\bar{Y}_p = \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = (0,025 - j 0,025) \text{ S} + (0,05 + j 0,05) \text{ S}$$

$$\therefore \bar{Y}_p = (0,075 + j 0,025) \text{ S}$$

La impedancia del paralelo resulta:

$$\bar{Z}_p = \frac{1}{\bar{Y}_p} = \frac{1}{(0,075 + j 0,025) \text{ S}} = \frac{0,075 - j 0,025}{0,075^2 + 0,025^2} \Omega.$$

$$\therefore \bar{Z}_p = (12 - j 4) \Omega$$

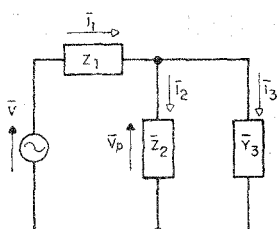
La tensión $\bar{V}_p$, calculada en función de la relación de división de tensión es:

$$\begin{aligned} \bar{V}_p &= \bar{V} \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_p} = 100 e^{j0^\circ} \text{ V} \frac{(12 - j 4)}{(10 + j 20) + (12 - j 4)} = \\ &= 46,47 e^{-j 54,45^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

y la corriente $\bar{I}_3$:

$$\bar{I}_3 = \bar{V}_p \bar{Y}_3 = 46,47 e^{-j 54,45^\circ} \cdot 0,0707 e^{+j 45^\circ} = 3,285 e^{-j 9,45^\circ} \text{ A}$$

c) Hallar la expresión de la admitancia compleja de excitación del circuito de la Fig. 7.39



$$\bar{V} = 100 e^{j0} \text{ V}$$

$$\bar{Z}_1 = (10 + j 20) \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = (20 - j 20) \Omega$$

$$\bar{Y}_3 = 0,05 + j 0,05 \text{ S}$$

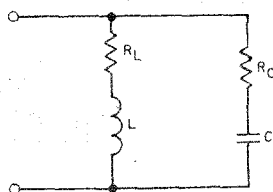


Fig. 7.39

Fig. 7.38

Solución: La impedancia de la rama inductiva es:

$$\bar{Z}_L = R + j\omega L$$

y su admitancia:

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{\bar{Z}_L} = \frac{1}{R_L + j\omega L} = \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} =$$

$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}$$

Análogamente, la impedancia de la rama capacitiva es:

$$\bar{Z}_c = R_c + \frac{1}{j\omega C} = R_c - j \frac{1}{\omega C}$$

y su admitancia:

$$\bar{Y}_c = \frac{1}{\bar{Z}_c} = \frac{1}{R_c - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{R_c + j \frac{1}{\omega C}}{R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{R_c}{R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Finalmente, la admitancia total resulta:

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_L + \bar{Y}_c = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_c}{R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) + j \left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_c^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

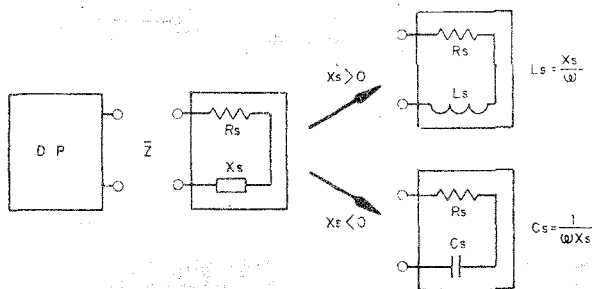


Fig. 7.40

7.15 Circuitos equivalentes serie y paralelo

Para que dos circuitos sean equivalentes deben ser iguales sus impedancias o sus admitancias complejas de excitación.

Se considerará un dipolo pasivo, como el de la Fig. 7.40. Suponiendo que su impedancia es $\bar{Z} = R_S + j X_S$. Teniendo en cuenta la Ec. (7.36), puede dibujarse el circuito equivalente de la Fig. 7.40, con una resistencia R_S en serie con una reactancia X_S . Si $X_S > 0$ el dipolo es inductivo y el circuito equivalente serie

puede ser dibujado con más detalle, como se muestra en la Fig. 7.40. Si $X_S < 0$ el dipolo es capacitivo y puede ser dibujado como en la Fig. precitada.

Análogamente, partiendo de la expresión de la impedancia del dipolo $\bar{Y} = G_p + jB_p$ y teniendo en cuenta la Ec. (7.37), se halla el circuito equivalente paralelo, como se muestra en la Fig. 7.41.

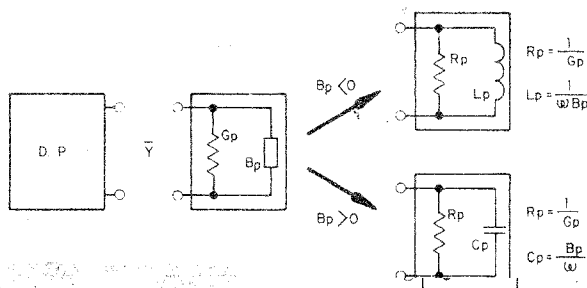


Fig. 7.41

La aplicación de estos conceptos permite, por extensión, hallar el circuito equivalente paralelo de una configuración serie, o viceversa.

Ejemplo: Dado el circuito serie de la Fig. 7.42, hallar los valores de L_p y R_p , para los cuales las dos configuraciones son equivalentes.

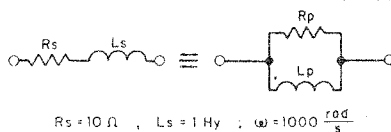


Fig. 7.42

Solución: Se comienza por el cálculo de la impedancia y la admitancia de la configuración serie.

$$\bar{Z}_s = R_s + j\omega L_s = (10 + j 1000) \Omega$$

$$\bar{Y}_s = \frac{1}{\bar{Z}_s} = \frac{1}{10 + j 10^3} = \frac{10 - j10^3}{10^2 + 10^6} \cong (10^{-5} - j 10^{-3}) \text{ v} \quad (7.38)$$

La admitancia de la configuración paralelo es:

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} \quad (7.39)$$

Para que los dos circuitos sean equivalentes, debe ser $\bar{Y}_s = \bar{Y}_p$. En consecuencia, igualando (7.38) y (7.39) resulta:

$$\frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p} = 10^{-5} - j 10^{-3} \therefore \begin{cases} R_p = 10^5 \Omega \\ L_p = \frac{1}{\omega 10^{-3}} = 1 H \end{cases}$$

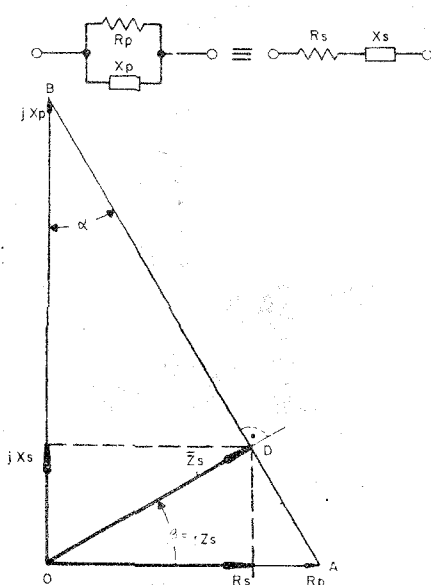


Fig. 7.43

La equivalencia entre una configuración serie y una paralelo también puede ser hallada gráficamente, como se muestra en la Fig. 7.43. En efecto, suponiendo que se han conectado en paralelo una resistencia R_p y una reactancia X_p y se desean hallar las componentes serie correspondientes. Se procede de la siguiente manera:

- 1°) Se llevan a partir de un origen O , las componentes conocidas R_p y jX_p , determinando los puntos A y B .
- 2°) Se unen los extremos A y B de los fasores trazados en 1°).
- 3°) Se traza por O una perpendicular al segmento AB , determinando el fasor OD , que representa a la impedancia Z_s de la configuración serie.
- 4°) Se hallan las componentes binómicas o polares de Z_s .

Obviamente, esta construcción puede hacerse a partir de R_s y X_s , para obtener R_p y X_p . La justificación del método es la siguiente: la impedancia buscada es:

$$\bar{Z}_s = \bar{Z}_p = \frac{R_p + jX_p}{R_p + jX_p}$$

cuyas componentes son:

$$Z_s = \frac{R_p \cdot X_p}{\sqrt{R_p^2 + X_p^2}} \quad (7.40)$$

$$\varphi_{zs} = \arctg \frac{X_s}{R_s} = \frac{R_p^2}{R_p} \frac{X_p}{X_p^2} = \frac{R_p}{X_p} \quad (7.41)$$

Comparando los triángulos ODB y ODA de la Fig. 7.43, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{DA}} \text{ donde } \overline{DA}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 \\ \therefore \overline{OB}^2 \cdot \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 \cdot \overline{OD}^2 &= \overline{OA}^2 \cdot \overline{OD}^2 \\ \therefore \overline{OD} &= \frac{\overline{OB}^2 \cdot \overline{OA}^2}{\sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}} \end{aligned} \quad (7.42)$$

y como $\overline{OB} = X_p$ y $\overline{OA} = R_p$, la Ec. (7.42) coincide con (7.40).

Por otra parte, $\beta = \alpha$, pues $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OA} \perp \overline{OB}$.

Siendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_p}{X_p}$ en la figura, resulta, de acuerdo a la (7.41), que $\beta = \varphi_{zs}$, con lo que se completa la demostración.

Finalmente, se expresarán las potencias activa y reactiva en función de las componentes de los circuitos equivalentes.

Para el circuito serie es:

$$\begin{aligned} \overline{P}_s &= \overline{V} \overline{I}^* = \overline{Z} \overline{I} \overline{I}^* = (R + jX) I^2 = R I^2 + j X I^2 = P + j P_q \\ \therefore \begin{cases} P &= R I^2 \\ P_q &= X I^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Para el circuito paralelo resulta:

$$\begin{aligned} \overline{P}_s &= \overline{V} \overline{I}^* = \overline{V} \overline{Y}^* \quad \overline{Y}^* = (G - jB) \cdot V^2 = G V^2 - j B V^2 = P + j P_q \\ \therefore \begin{cases} P &= G V^2 \\ P_q &= - B V^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.44)$$

7.16 Factores de mérito y de disipación de los elementos de circuitos reales

La propiedad característica de un inductor o un capacitor, es su efectividad para el almacenamiento de energía reactiva. Un inductor o un capacitor ideales, sólo almacenan energía de ese tipo.

Los elementos reales, en cambio, sólo almacenan una parte de la energía que re-

ciben en forma reversible, mientras que el resto lo convierten irreversiblemente en calor. Cuanto más grande es la relación entre la energía almacenada reversiblemente (reactiva) y la transformada irreversiblemente (activa), por unidad de tiempo, más se parece el elemento real al ideal. En consecuencia, el cociente:

$$Q = \frac{|P_q|}{P} \quad (7.45)$$

da una idea cuantitativa de cuánto se aproxima el elemento real al ideal. Q se denomina factor de mérito del inductor o el capacitor reales. Nótese que dicho factor tiene un valor infinito para un elemento de circuito reactivo ideal.

Es importante aclarar que si se desea definir un factor de calidad para los resistores reales, éste debe ser inverso al anterior, ya que la función del resistor es convertir la totalidad de la energía que recibe en otras formas energéticas. Al cociente:

$$D = \frac{P}{|P_q|} \quad (7.46)$$

se lo denomina factor de disipación, y debe ser lo más grande posible para los resistores y lo más pequeño que se pueda para los inductores y capacitores. Teniendo en cuenta las Ecs. (7.43 y 7.44), resulta evidente que las (7.45) y (7.46) pueden escribirse, respectivamente:

$$Q = \frac{|X|}{R} = \frac{|B|}{G} \quad (7.47)$$

$$D = \frac{R}{|X|} = \frac{G}{|B|} \quad (7.48)$$

Ejemplos de cálculo de Q y D



Fig. 7.44

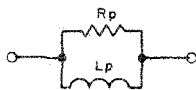


Fig. 7.45

Para el circuito de la Fig. 7.44 es:

$$Q = \frac{|X|}{R} = \frac{\omega L_s}{R_s} \quad ; \quad D = \frac{1}{Q} = \frac{R_s}{\omega L_s}$$

En el circuito de la Fig. 7.45 resulta:

$$Q = \frac{|B|}{G} = \frac{R_p}{\omega L_p} \quad ; \quad D = \frac{1}{Q} = \frac{\omega L_p}{R_p}$$

Para el circuito de la Fig. 7.46 surge:

$$Q = \frac{|B|}{G} = \frac{\left| \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right|}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{|\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L|}{R}$$

$$\therefore Q = \left| \frac{\omega L}{R} - \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \right| = \left| Q_{Ls} - \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R} \right|$$

En el circuito de la Fig. 7.47 se tiene:

$$Q = \frac{|B|}{G} = \omega C_p R_p \quad ; \quad D = \frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega C_p R_p}$$

Para el circuito de la Fig. 7.48 resulta:

$$Q = \frac{|X|}{R} = \frac{1}{\omega C_s R_s} \quad ; \quad D = \frac{1}{Q} = \omega C_s R_s$$

En el circuito de la Fig. 7.49 se obtiene:

$$Q = \frac{|X|}{R} = \frac{\left| \omega L_s - \frac{\omega C}{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2} \right|}{R_s + \frac{1/R_p}{\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2}} = \frac{\omega L_s R_p (\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2) - \omega C R_p}{R_s R_p (\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2) - 1}$$

$$\therefore Q = \frac{|Q_{cp} - \omega \cdot L_s R_p (\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2)|}{R_s R_p (\frac{1}{R_p^2} + \omega^2 C^2) - 1}$$

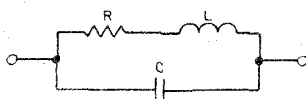


Fig. 7.46

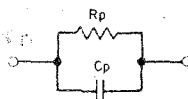


Fig. 7.47

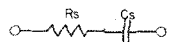


Fig. 7.48

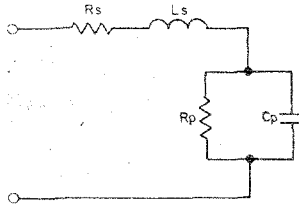


Fig. 7.49

7.17 Problemas resueltos

7.17.1) Para el circuito dado en la Fig. 7.50 se desea:

- Calcular el valor complejo eficaz de la diferencia de potencial en la asociación paralelo.
- Calcular los valores complejos eficaces de las corrientes en el capacitor C_2 ($\bar{I}_{C_2}$), en el inductor L_2 ($\bar{I}_{L_2}$) y el de la corriente total del circuito ($\bar{I}$). Justifíquese el valor particular que toma esta última.
- Determinar el valor complejo de la impedancia correspondiente a la asociación paralelo, justificando el resultado.
- Calcular el valor de la impedancia compleja de excitación.
- Hallar los valores de la capacitancia C_1 y de la resistencia R_1 .

Solución:

- a) Para la asociación paralelo, se tiene

$$\bar{V}_p = R_2 \quad \bar{I}_{R_2} = 100(100 - j10) \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{V}_p = (10 - j1) \text{ V}$$

b) $\bar{I}_{C_2} = j B_{C_2} \bar{V}_p = j \quad 0,1 (10 - j1)$

$$\bar{I}_{C_2} = (0,1 + j1) \text{ A}$$

$$\bar{I}_{L_2} = -j B_{L_2} \bar{V}_p = -j \quad 0,1 (10 - j1)$$

$$\bar{I}_{L_2} = (-0,1 - j1) \text{ A}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_{R_2} + \bar{I}_{C_2} + \bar{I}_{L_2} = (100 - j10) \cdot 10^{-3} + (0,1 + j1) + (-0,1 - j1)$$

$$\bar{I} = (0,1 - j0,01) \text{ A}$$

Se nota que $\bar{I} = \bar{I}_{R_2}$, dado que la asociación paralelo está en resonancia

c) $\bar{Z}_p = \frac{\bar{V}_p}{\bar{I}} = \frac{(10 - j1)}{(0,1 - j0,01)} = 100 \Omega$

$$\bar{Z}_p = R_2 = 100 \Omega, \text{ debido a la razón citada anteriormente}$$

$$d) \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{100 e^{j45^\circ}}{0,1 e^{-j5,7^\circ}} = 1000 e^{j50,7^\circ} \Omega$$

$$\bar{Z} = (633,38 + j 773,84) \Omega$$

e) Llamando $\bar{Z}_s$ a la impedancia de la asociación serie, se puede expresar

$$\bar{Z} = \bar{Z}_s + \bar{Z}_p \quad \bar{Z}_s = \bar{Z} - \bar{Z}_p$$

$$\bar{Z}_s = (633,38 + j 773,84) - 100 = (533,38 + j 773,84) \Omega$$

pero además $\bar{Z}_s = (R_s + j X_s)$

$$R_s = R_1 = 533,38 \Omega$$

por otra parte, $X_s = X_{L1} - X_{C1} = 773,84 \Omega$

$$X_{C1} = X_{L1} - X_s = 1000 - 773,84 = 226,16 \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = 226,16 \quad \therefore C_1 = \frac{1}{10^2 \cdot 226,16}$$

$$C_1 = 44,21 \mu F$$

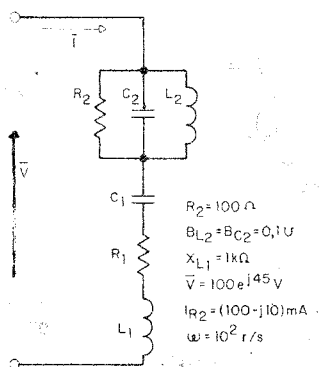


Fig. 7.50

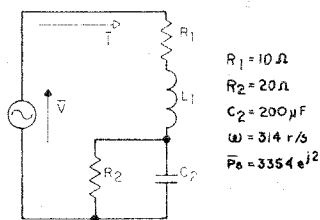


Fig. 7.51

7.17.2) Dado el circuito de la Fig. 7.51 se pide calcular:

- El valor complejo eficaz de la corriente total.
- El valor de la inductancia L_1 .
- El valor complejo eficaz de la tensión aplicada al circuito.

Solución:

a) Se comenzará calculando el valor de la admitancia y de la impedancia para la asociación paralelo:

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{R_2} + j \omega C_2 = (5 \cdot 10^{-2} + j 314 \cdot 200 \cdot 10^{-6})$$

$$\bar{Y}_p = (5 \cdot 10^{-2} + j 628 \cdot 10^{-4}) \text{ S}$$

$$\bar{Z}_p = \frac{1}{\bar{Y}_p} = (7,81 - j 9,81) \Omega$$

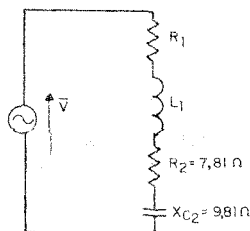


Fig. 7.52

Con estos datos se puede construir el circuito equivalente mostrado en la Fig. 7.52. En el mismo, por aplicación del Teorema de Adición de las Potencias Activas, se tiene que la potencia activa total, resulta:

$$P_T = P_{R_1} + P_{R'_2} = V_{R_1} I + V_{R'_2} I = R_1 I^2 + R'_2 I^2$$

$$P_T = I^2 (R_1 + R'_2) \therefore$$

$$I = \sqrt{\frac{P_T}{R_1 + R'_2}} \quad (1)$$

donde P_T es desconocida. Pero como la potencia aparente es dato, se tiene:

$$\bar{P}_s = 3354 e^{-j26,5^\circ} \text{ VA} = (3001,60 - j 1496,54) \text{ VA} \therefore$$

$P_T = 3001,60 \text{ W}$; reemplazando este valor en (1) se obtiene:

$$I = \sqrt{\frac{3001,60}{10 + 7,81}} = 12,98 \text{ A}$$

que tomándola como referencia se le asigna fase nula: $\bar{I} = 12,98 e^{j0} \text{ A}$

- b) El valor pedido surge de analizar la potencia reactiva total: $Pq_T = 1496,54$ VAR.

$$Pq_T = I^2 (X_L - X_{C2}) = I^2 (\omega L_1 - X_{C2}') \therefore$$

$$L_1 = \frac{Pq_T + I^2 X_{C2}}{\omega I^2} = \frac{1496,54 + 12,98^2 \cdot 9,81}{314 \cdot 12,98^2}$$

$$L_1 = 59,56 \text{ mH}$$

c) $\overline{P_s} = \overline{V} \overline{I}^* \therefore \overline{V} = \frac{\overline{P_s}}{\overline{I}^*} = \frac{3354 e^{-j 26,5^\circ}}{12,98 e^{j 0}}$

$$\therefore \overline{V} = 258,39 e^{-j 26,5^\circ} \text{ V}$$

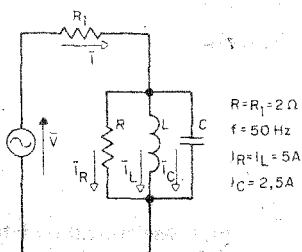


Fig. 7.53

7.17.3) Dado el circuito de la Fig. 7.53, se pide:

- Calcular el valor de la capacitancia C y de la inductancia L .
- Determinar el valor complejo eficaz de la tensión impuesta por el generador.
- Calcular los valores de las potencias aparente, activa y reactiva totales.
- Indicar el carácter reactivo que presenta el circuito, fundamentando la respuesta.
- Trazar en escala el diagrama fasorial de tensión-corriente.

Solución:

- a) Trabajando con los módulos, se tiene

$$V_R = R \cdot I_R = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V}$$

Dado que la tensión sobre R es la de la asociación paralelo, resulta que $V_R = V_C$

$$X_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{10}{2,5} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \pi 50 C}$$

$$C = \frac{2,5}{10 \cdot 2 \pi 50}$$

$$C = 795,77 \mu\text{F}$$

Respecto del inductor $V_R = V_L$, en consecuencia:

$$X_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{10}{5} = \omega L = 2 \pi 50 L \therefore$$

$$L = \frac{10}{5 \cdot 2 \pi 50}$$

$$L = 6,36 \text{ mH}$$

b) Asignando a la tensión entre los extremos de la asociación paralelo fase nula, se tiene:

$$\bar{V}_R = \bar{V}_L = \bar{V}_C = \bar{V}_P = 10 e^{j0} \text{ V}$$

por lo cual, imponiendo los desfases correspondientes, resulta:

$$\bar{I}_R = 5 e^{j0} = 5 \text{ A}$$

$$\bar{I}_L = 5 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j5 \text{ A}$$

$$\bar{I}_C = 2,5 e^{j\frac{\pi}{2}} = j2,5 \text{ A}$$

y la corriente total:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = (5 - j5 + j2,5) = (5 - j2,5) \text{ A}$$

$$\bar{I} = 5,59 e^{-j26,56^\circ} \text{ A}$$

y el valor de la tensión sobre R_1 :

$$\bar{V}_{R_1} = \bar{I} R_1 = (5 - j2,5) \cdot 2 = (10 - j5) \text{ V} = 11,18 e^{-j26,56^\circ} \text{ V}$$

y en consecuencia:

$$\bar{V} = \bar{V}_{R_1} + \bar{V}_P = (10 - j5) + 10 = (20 - j5) \text{ V}$$

$$\bar{V} = 20,61 e^{-j14,03^\circ} \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bar{P}_S &= \bar{V} \bar{I}^* = 20,61 e^{-j14,03} \cdot 5,59 e^{j26,56^\circ} \\ \bar{P}_S &= 115,21 e^{j12,53} = (112,46 + j24,99) \text{ VA} \therefore \\ P &= 112,46 \text{ W} \\ P_q &= 24,99 \text{ VAR} \end{aligned}$$

- d) El carácter reactivo del circuito, puede determinarse, por ejemplo, observando el valor hallado para la potencia aparente. De acuerdo con la forma de definir esta última al resultar la potencia reactiva positiva, nos dice que el circuito presenta características reactivas inductivas.
- e) Para construir el diagrama pedido resumimos los valores de las variables que utilizaremos, adoptando además las escalas necesarias.

$$\begin{aligned} \bar{V}_R &= 10 e^{j0} \text{ V} ; & \bar{V}_{R_1} &= 11,18 e^{-j26,56^\circ} \text{ V} \\ \bar{I}_R &= 5 e^{j0} \text{ A} ; \\ \bar{I}_L &= 5 e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{ A} ; \\ \bar{I}_C &= 2,5 e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ A} ; \end{aligned}$$

Se comienza el diagrama tomando $\bar{V}_R$ como referencia. Se ubican convenientemente $\bar{I}_R$, $\bar{I}_C$ e $\bar{I}_L$, obteniendo de esa manera $\bar{I}$, que coincide en módulo y fase con el valor calculado.

Llevando luego $\bar{V}_{R_1}$ en fase con $\bar{I}$ y sumando $\bar{V}_{R_1}$ y $\bar{V}_R$ se obtiene $\bar{V}$, coincidente en módulo y fase con el valor calculado, como se muestra en la Fig. 7.54.

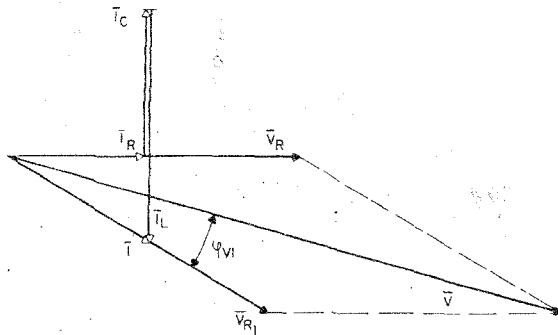


Fig. 7.54

7.18. Problemas propuestos

7.18.1) En el circuito de la Fig. 7.55 se desea calcular

- El valor complejo eficaz de la impedancia de excitación
- El valor complejo eficaz de la corriente
- Los valores de las potencias aparente, activa y reactiva totales.
- La expresión de la corriente instantánea.

Respuestas:

a) $\bar{Z} = (15 - j5) \Omega$

b) $\bar{I} = (9 + j3) \text{ A}$

c) $\bar{P}_s = (1350 - j450) \text{ VA}$

$P = 1350 \text{ W}$

$P_q = -450 \text{ VAR}$

d) $i(t) = 13,41 \sin(100t + 18,5^\circ) \text{ A}$

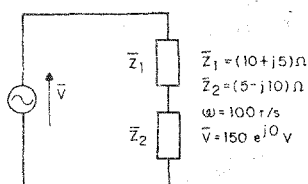


Fig. 7.55

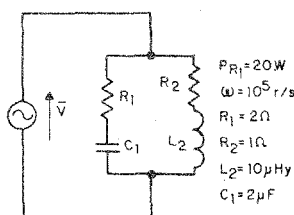


Fig. 7.56

7.18.2) Para el circuito de la Fig. 7.56 se pide:

- Calcular los valores de las potencias aparente, activa y reactiva totales.
- Calcular la indicación de un amperímetro conectado en la rama capacitiva y la de un voltímetro conectado entre extremos de la asociación paralelo.

Resultados:

a) $\bar{P}_s = 189 e^{j30^\circ} \text{ VA}$

$P = 163,71 \text{ W}$

$P_q = 94,5 \text{ VAR}$

b) $I = 3,16 \text{ A}$

$V = 17 \text{ V}$

7.18.3) Para el dipolo de la Fig. 7.57 se pide calcular

- Los valores de la impedancia y admitancia compleja de excitación
- Los valores de la resistencia y la reactancia que corresponden al circuito equivalente serie, y los valores de conductancia y susceptancia que corresponden al circuito equivalente paralelo del di-

polo dado.

- c) Los valores de las potencias aparente, activa y reactiva totales.

Resultados:

a) $\bar{Z} = 10 e^{-j60} \Omega$

$\bar{Y} = 0,1 e^{j60} \text{ U}$

- b) Equivalente serie:

$R_s = 5 \Omega; X_s = -8,66 \Omega$

Equivalente paralelo:

$G_p = 50 \text{ mU}, B_p = 86,6 \text{ mU}$

- c) $\bar{P}_s = 500 e^{-j60} \text{ VA}$

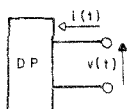
$P = 250 \text{ W}$

$P_q = -433,11 \text{ VAR}$

7.18.4) Suponiendo que el circuito ilustrado en la Fig. 7.58 sea el modelo circuital idealizado de un capacitor real, se pide calcular su factor de mérito

Resultado:

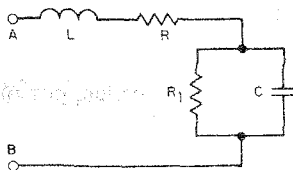
$$Q = \frac{|X_{AB}|}{R_{AB}} \cong \frac{1000}{2} = 500$$



$v(t) = 100 \sin(314t - 15^\circ) \text{ V}$

$i(t) = 10 \sin(314t + 45^\circ) \text{ V}$

Fig. 7.57



$C = 1 \text{ nF}$
 $R_1 = 100 \text{ M}\Omega$
 $L = 1 \text{ nH}$
 $R = 2 \Omega$
 $\omega = 10^6 \text{ r/s}$

Fig. 7.58

Lugares geométricos de las funciones de impedancia y admitancia complejas

8.1 Introducción

En los capítulos 6 y 7 se estudió el régimen senoidal premanente, y se encontraron las relaciones existentes entre las variables complejas. Dichas relaciones se establecieron por medio de ecuaciones: pero es de hacer notar que las relaciones mencionadas se interpretarán más rápidamente en un gráfico que a través del análisis de las ecuaciones. Debido a ello, es que en este capítulo se desarrollarán *métodos gráficos* para describir el comportamiento de circuitos en *régimen senoidal permanente*.

Para dicho régimen se encontraron expresiones caracterizantes para un estado dado de un circuito eléctrico, por ejemplo la impedancia,

$$\bar{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi_z}$$

naturalmente, esta expresión será válida para un dado circuito cuyos elementos constitutivos son constantes y para una frecuencia dada.

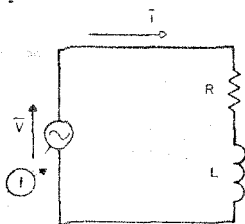


Fig. 8.1

Pero, que sucede con el valor de la impedancia si se modifica el valor de algunos de los elementos pasivos incluidos o bien la frecuencia. Será considerado por ejemplo el circuito en la Fig. 8.1 en el que se varía la frecuencia. La expresión de la impedancia resulta:

$$\bar{Z} = R + j \omega L \quad (8.1)$$

al ser la Ec. (8.1) un número complejo podrá desdoblarse en módulo y fase,

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (8.2)$$

$$\varphi_z = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad (8.3)$$

obscrévase en la Ec. (8.2) que si,

$$\omega = 0 ; \quad Z = R$$

$$\omega \rightarrow \infty ; \quad Z \rightarrow \omega L$$

que se grafica en la Fig. 8.2.a).

Por otra parte, en la Ec. (8.3) si,

$$\omega = 0 ; \quad \varphi_z = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty ; \quad \varphi_z \rightarrow \pi/2$$

que se grafica en la Fig. 8.2.b).

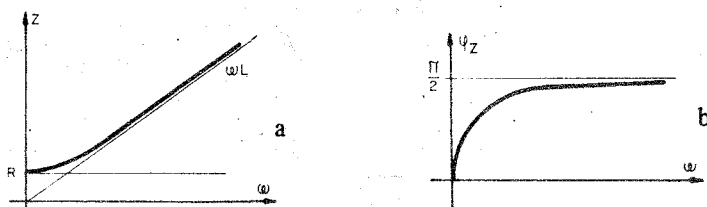


Fig. 8.2

De una sola mirada, se concluye que los gráficos de la Fig. 8.2 ofrecen más clara y rápidamente la información que la Ec. (8.1) o sus equivalentes, a saber Ecs. (8.2) y (8.3).

Pero el método de representación empleado presenta ciertos inconvenientes. Los gráficos son *cualitativos*, puesto que, para ser *cuantitativos* deberían ser contruídos punto a punto, lo cual sería impráctico. Por otra parte, al ser las funciones de variable compleja, se necesitarán *dos gráficos* para representar una función. Finalmente, es de hacer notar que para casos complicados, dichos gráficos son *difíciles* de construir.

A la luz de los inconvenientes mencionados, es evidente que deberá encontrarse un método que los elimine.

Nótese que se ha tomado como ejemplo a la impedancia, como puede tomarse, según sea el caso, a la tensión, corriente o potencia, todas funciones de variable compleja en régimen senoidal permanente.

8.2 Definición de los diagramas de immitancia

Los inconvenientes del método indicado en la introducción pueden solucionar-

se paulatinamente adoptando otro criterio para la representación gráfica. Es posible partir de un gráfico como el mostrado en la Fig. 8.3, en el que se lleva en el eje de abscisas la parte real de la función a representar y en el eje de ordenadas la parte imaginaria de la misma, al variar algunos de los parámetros circuitales.

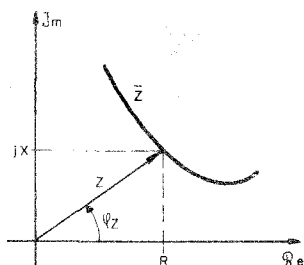


Fig. 8.3

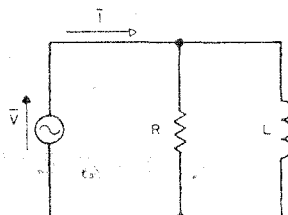


Fig. 8.4

Pero es de importancia resaltar que, *en general*, tanto la componente resistiva de un circuito, como la reactiva, pueden depender de todos los parámetros del circuito, como puede deducirse por ejemplo del circuito ilustrado en la Fig. 8.4. Para el mismo resulta:

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{R \cdot j\omega L} \quad \therefore$$

$$Z = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L (R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \therefore$$

$$\bar{Z} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega L R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

por lo que en general puede decirse que,

$$Z = f(R; L; C; \omega)$$

$$\varphi_z = f(R; L; C; \omega)$$

$$\text{Re} [\bar{Z}] = f(R; L; C; \omega)$$

$$\text{Im} [\bar{Z}] = f(R; L; C; \omega)$$

Es decir que, al situarse nuevamente en el diagrama ilustrado en la Fig. 8.3, el punto que determina el extremo del fasor impedancia corresponde a un determinado valor de resistencia, inductancia, capacitancia y pulsación de un circuito dado. Si para el mismo circuito se varían algunos de los parámetros indicados, el extremo del fasor se desplazará describiendo, por ejemplo, la curva indicada.

En consecuencia, será llamado *diagrama de impedancia* al lugar geométrico descrito por las sucesivas posiciones que adopta el extremo del fasor impedancia en el plano complejo al modificarse el valor de la variable independiente, que puede ser indistintamente ω, R, L o C .

Pensando ahora en términos de admitancia, al ser esta última la inversa de la im-

pedancia, es evidente que la *transformación inversión* adquiere importancia. Es decir que, hallado uno de los diagramas, por la transformación inversa será posible hallar el otro, dado que:

$$\bar{Z} = Z e^{j\varphi_Z} \quad (8.4)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi_Z} \quad (8.5)$$

que pueden interpretarse en el plano complejo como se muestra en la Fig. 8.5. Al variar alguno de los parámetros circuitales los extremos de ambos fasores describirán un *diagrama*. De esta manera, la curva inversa de la impedancia es el lugar geométrico de los extremos del fador admitancia, y se denomina *diagrama de admitancia*. Nótese que el diagrama de impedancia está en el plano $R; jX$ mientras que el de admitancia lo está en el $G; jB$. Además, dado que siempre $R > 0$ y $G > 0$, estos diagramas estarán confinados en el primero y cuarto cuadrante.

Vislumbrada entonces la importancia de la transformación inversión, se verá ahora la manera de invertir un punto en forma gráfica.

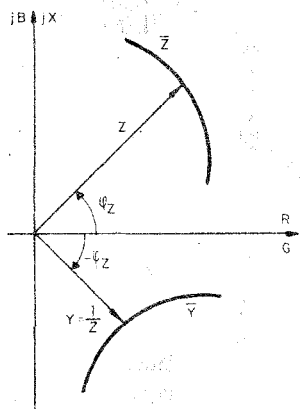


Fig. 8.5

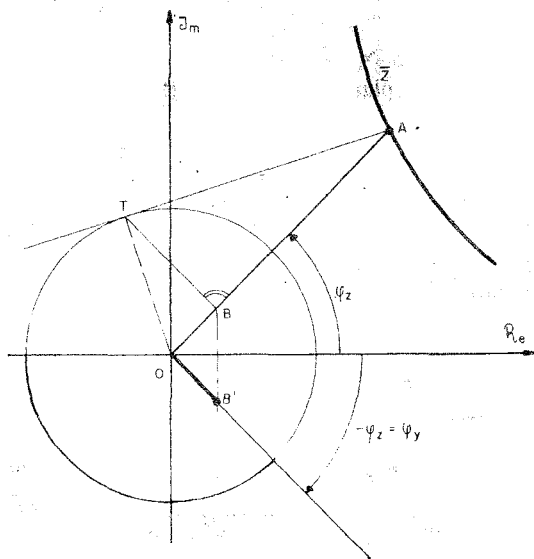


Fig. 8.6

8.3 Inversión en forma gráfica

Se estudiará como se puede invertir, punto a punto una curva. Dado un diagrama de impedancia, tal como el que se muestra en la Fig. 8.6, y en particular deseando invertir el punto A de la misma, el procedimiento a seguir es el siguiente:

- a) se une el punto A que se desea invertir con el origen de coordenadas.
- b) se traza una circunferencia con centro en el origen y radio unitario.
- c) se traza por el punto A una tangente a la circunferencia mencionada, obte-

niéndose un punto de tangencia T.

d) por el punto T se traza una perpendicular al segmento $\overline{OA}$. El segmento $\overline{OB}$ así determinado representa el módulo de la admitancia que corresponde al de la impedancia del punto invertido, interpretado en la escala de admitancia correspondiente.

e) debido a que $\varphi_Y = -\varphi_Z$ se traza por el origen una semirrecta que forma un ángulo $-\varphi_Z$ con el eje real y se trasporta el segmento $\overline{OB}$ sobre dicha semirrecta.

El punto B' así determinado es el inverso del A; y el segmento $\overline{OB}$ es el representativo de la admitancia compleja correspondiente al de la impedancia compleja OA.

Según se deriva de las Ecs. (8.4) y (8.5),

$$Y = \frac{1}{Z} \text{ y } \varphi_Y = -\varphi_Z$$

y como por construcción $\varphi_Y = -\varphi_Z$, para dar veracidad a este método se deberá demostrar que $\overline{OB} = Y$. Esto puede deducirse de la siguiente semejanza de triángulos:

$$\triangle OAT \sim \triangle OBT$$

que permite plantear la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OT}} \quad (8.6)$$

por construcción $\overline{OT} = 1$ y $\overline{OA} = Z$ por lo cual la Ec. (8.6) se reduce a:

$$\frac{1}{Z} = \overline{OB} \quad \therefore$$

$$\overline{OB} = Y$$

que es lo que se quería demostrar.

Es evidente que el método descrito permitirá invertir puntos, y en consecuencia curvas, pero *no resulta práctico*. Será necesario buscar un método general de inversión; pero previamente se deberá conocer qué tipos de figuras geométricas son los que se presentan al estudiar el comportamiento de los circuitos eléctricos.

8.4 Lugares geométricos de las variables asociadas a los circuitos eléctricos

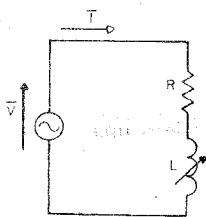


Fig. 8.7

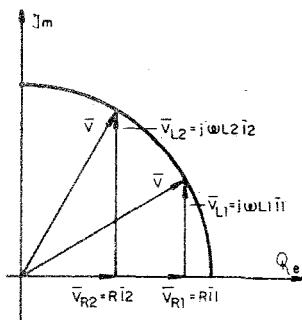


Fig. 8.8

Considerando, por ejemplo, el circuito mostrado en la Fig. 8.7, excitado por un generador ideal de tensión. Para un dado valor de inductancia L_1 , se establecerá una corriente $\bar{I}_1$, cumpliéndose que:

$$\bar{V}_{R_1} + \bar{V}_{L_1} = \bar{V}$$

como se ilustra en la Fig. 8.8.

Para otro valor de inductancia L_2 , tal que $L_2 > L_1$ resultará:

$$\bar{V}_{R_2} + \bar{V}_{L_2} = \bar{V}$$

Se observa a través de este ejemplo que la composición fasorial de las tensiones en cada elemento y para cada valor de inductancia resulta un fasor $\bar{V}$ de módulo constante. Es decir que al variar la inductancia, se modificará la diferencia de fase entre tensión y corriente, de tal manera que el extremo del fasor tensión total describe un arco de circunferencia. Tomando ahora, por ejemplo, el mismo circuito pero excitado por un generador ideal de corriente, como se muestra en la Fig. 8.9.

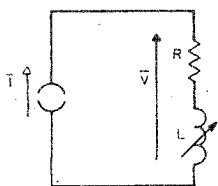


Fig. 8.9

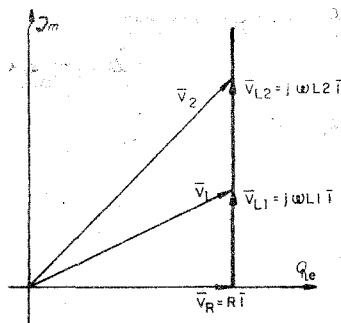


Fig. 8.10

En la Fig. 8.10 para un valor L_1 se cumplirá:

$$\bar{V}_R + \bar{V}_{L_1} = \bar{V}_1$$

para un valor L_2

$$\bar{V}_R + \bar{V}_{L_2} = \bar{V}_2$$

es decir que al variar la inductancia, variará $\bar{V}_L$, pero al ser la corriente constante, también lo será $\bar{V}_R$, de tal manera que el extremo del fasor tensión total describe la semirrecta indicada. Nótese por otra parte que si en este ejemplo, se dividen los módulos de todos los fasores por el de la corriente, se obtiene un diagrama de impedancia.

Si se continúa analizando una gran cantidad de circuitos se encuentra que los lugares geométricos de las variables asociadas serán en general *rectas*, que se pueden determinar con dos puntos; o bien *circunferencias*, que se pueden determinar con tres puntos o dos puntos y una condición de tangencia.

Lo anteriormente mencionado marca la conveniencia de analizar la inversión de los lugares geométricos indicados.

8.5 Propiedades de la inversión de rectas y circunferencias

Mediante un estudio analítico se encontrará la manera de ver en que se transforman, mediante inversión, las rectas y circunferencias.

Recordando que la ecuación general de la circunferencia en coordenadas cartesianas está dada por la Ec. (8.7)

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (8.7)$$

Para encontrar el equivalente de la Ec. (8.7) en el plano complejo de impedancia se realizarán los siguientes cambios:

$$\bar{Z} = x + jy$$

$$\bar{Z}^* = x - jy$$

por lo cual, según se vio en el Cap. 6,

$$\bar{Z} \bar{Z}^* = x^2 + y^2 \quad (8.8)$$

$$\bar{Z} + \bar{Z}^* = 2x \quad \therefore \quad x = \frac{\bar{Z} + \bar{Z}^*}{2} \quad (8.9)$$

$$\bar{Z} - \bar{Z}^* = 2jy \quad \therefore \quad y = \frac{\bar{Z} - \bar{Z}^*}{2j} \quad (8.10)$$

reemplazando las Ecs.(8.8), (8.9) y (8.10) en la Ec. (8.7) resulta:

$$a \bar{Z} \bar{Z}^* + b \frac{\bar{Z} + \bar{Z}^*}{2} + c \frac{\bar{Z} - \bar{Z}^*}{2j} + d = 0 \quad (8.11)$$

donde la Ec. (8.11) representa la ecuación general de la circunferencia en el plano complejo de impedancia. Para pasar la Ec. (8.11) al plano de admitancia bastará reemplazar en la misma las relaciones conocidas,

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} \quad y \quad \bar{Z}^* = \frac{1}{\bar{Y}^*}$$

surgiendo:

$$a \frac{1}{\bar{Y}\bar{Y}^*} + \frac{b}{2} \left(\frac{1}{\bar{Y}} + \frac{1}{\bar{Y}^*} \right) + \frac{c}{2j} \left(\frac{1}{\bar{Y}} - \frac{1}{\bar{Y}^*} \right) + d = 0 \quad (8.12)$$

operando en la Ec. (8.12):

$$a \frac{1}{\bar{Y}\bar{Y}^*} + \frac{b}{2} \frac{\bar{Y}^* + \bar{Y}}{\bar{Y}\bar{Y}^*} + \frac{c}{2j} \frac{\bar{Y}^* - \bar{Y}}{\bar{Y}\bar{Y}^*} + d = 0 \quad (8.13)$$

multiplicando la Ec. (8.13) por $\bar{Y}\bar{Y}^*$ y ordenando la misma:

$$d \bar{Y} \bar{Y}^* + b \frac{\bar{Y} + \bar{Y}^*}{2} - c \frac{\bar{Y} - \bar{Y}^*}{2j} + a = 0 \quad (8.14)$$

donde la Ec. (8.14) representa la ecuación general de la circunferencia en el plano complejo de admitancia.

De la comparación las expresiones dadas por las Ecs. (8.11) y (8.14) se desprenden las siguientes propiedades.

Primera propiedad: al aplicar la transformación inversión a una circunferencia, o como caso particular a una recta en el plano de impedancia, se obtiene una circunferencia o como caso particular una recta en el plano de admitancia. Las distintas posibilidades se detallan en el cuadro de la Fig. 8.11.

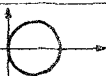
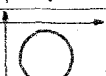
Plano Coef	PLANO $\bar{Z}$	PLANO $\bar{Y}$
$a=0$ $d=0$	Recta que pasa por el origen. 	Recta que pasa por el origen. 
$a=0$ $d \neq 0$	Recta que no pasa por el origen. 	Circunferencia que pasa por el origen. 
$a \neq 0$ $d=0$	Circunferencia que pasa por el origen. 	Recta que no pasa por el origen. 
$a \neq 0$ $d \neq 0$	Circunferencia que no pasa por el origen. 	Circunferencia que no pasa por el origen. 

Fig. 8.11

Segunda propiedad: a través de la inversión no cambia el signo de la parte real. Esto se desprende de la comparación de signos de los segundos términos del primer miembro de las Ecs. (8.11) y (8.14). Se establece que si en el plano de impedancia la componente real está en el semiplano positivo, en el plano de admitancia la componente real correspondiente al punto inverso también está en el semiplano positivo y viceversa.

Tercera propiedad: a través de la inversión cambia el signo de la componente imaginaria. Esto se deduce de la comparación de signos de los terceros términos del primer miembro de las Ecs. (8.11) y (8.14). Estableciéndose que si en el plano de impedancia la componente imaginaria es positiva, en el plano de admitancia resultará negativa y viceversa.

Cuarta propiedad: a través de la inversión se mantiene el valor absoluto del argumento pero cambia su signo. Esta propiedad se desprende de la conjunción de la segunda y tercera.

Las propiedades enunciadas serán de utilidad para la construcción de los diagramas.

8.6 Escalas en los diagramas de immitancias

Para estos tipos de representación no podrán adoptarse escalas arbitrarias pues debe cumplirse la relación:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$$

de la que se deriva que el producto de los módulos de la impedancia y admitancia debe ser la unidad, por lo cual:

$$Z Y = 1 \quad (8.15)$$

si por otra parte se adoptan las siguientes escalas:

$$\text{Esc. } Z = \alpha \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right]$$

$$\text{Esc. } Y = \beta \left[\frac{\mathcal{U}}{\text{cm}} \right]$$

Los valores de Z e Y estarán representados por segmentos de recta que medirán a [cm] y b [cm] respectivamente. En virtud de ello, los mencionados módulos de las immitancias pueden expresarse como:

$$Z = a [\text{cm}] \alpha \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right] \quad (8.16)$$

$$Y = b [\text{cm}] \beta \left[\frac{\mathcal{U}}{\text{cm}} \right] \quad (8.17)$$

reemplazando las Ecs. (8.16) y (8.17) en la Ec. (8.15):

$$a [\text{cm}] \alpha \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right] b [\text{cm}] \beta \left[\frac{\mathcal{U}}{\text{cm}} \right] = 1$$

por lo cual deberá cumplirse que:

$$a \alpha b \beta = 1 \quad (8.18)$$

Nótese que si para una dada representación se eligen por ejemplo α y β , y se conoce el valor de Z , o bien el de a , quedará determinado el valor de b que corresponda. Si se encara la representación fijando los valores de a y b y algunas de las dos escalas, la restante quedará condicionada a los valores ya fijados. En otras palabras, la Ec. (8.18) dice que elegidas tres magnitudes, la cuarta quedará fijada por dicha relación.

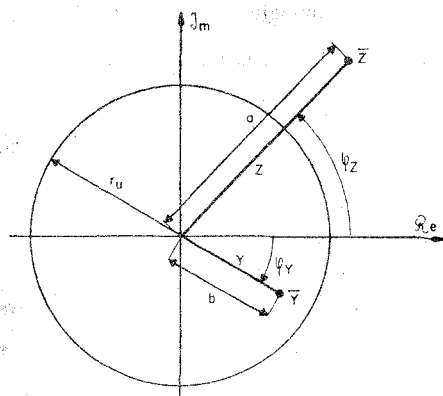


Fig. 8.12

8.7 Cálculo del radio de la circunferencia unitaria en base a las escalas de impedancia.

En el parágrafo 8.3 se estudió la inversión de un punto en forma gráfica, tal como se reitera en la Fig. 8.12 apareciendo en el procedimiento el trazado de una circunferencia de radio unitario, denominada r_u . Dicho radio unitario dependerá de las escalas que se adopten, y con el objeto de encontrar la manera de calcularlo se simplificará el problema presentado en la Fig. 8.12, suponiendo tratar con una impedancia que sea resistiva pura. En ese caso $\varphi_Z = \varphi_Y = 0$ y en el plano de impedancia se tendrá un punto sobre el eje real, como se ilustra en la Fig. 8.13. Naturalmente, su punto inverso en el plano de admitancia estará también sobre el mismo eje.

Pero por definición, la circunferencia unitaria deberá tener un radio tal que la representación de un punto sobre la misma, en el plano de impedancia o admitancia, y la inversión de dicho punto en el plano que corresponda, deberán encontrarse sobre la mencionada circunferencia. En consecuencia si en la Fig. 8.13 son situados los puntos correspondientes a $\bar{Z}$ e $\bar{Y}$ sobre la circunferencia de radio unitario, se encontrará en el estado descrito en la Fig. 8.14, para el cual:

$$a \equiv b \equiv r_u \quad (8.19)$$

reemplazando la Ec. (8.19) en la Ec. (8.18) resulta:

$$r_u \propto r_u \beta = 1 \quad \therefore \quad r_u [\text{cm}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right] \beta \left[\frac{\mathcal{U}}{\text{cm}} \right]}} \quad (8.20)$$

La Ec. (8.20) da la forma de cálculo del radio de la circunferencia unitaria en función de las escalas de impedancia y admitancia.

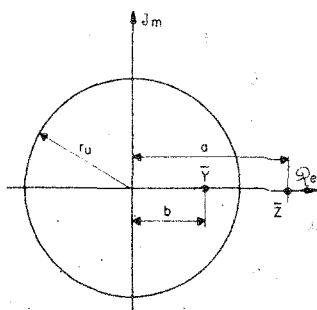


Fig. 8.13

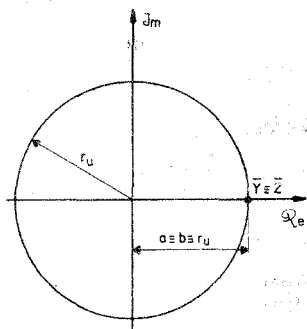
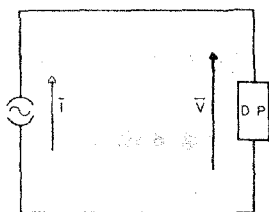


Fig. 8.14

8.8 Diagramas de tensión, corriente y potencia

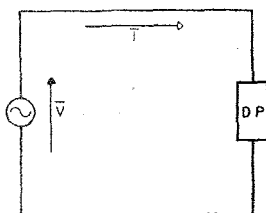
Se supondrá por ejemplo, el dipolo pasivo ilustrado en la Fig. 8.15, del cual se conoce su diagrama de impedancia, excitado por un generador de corriente. En estas condiciones toda variación en la impedancia se traducirá en una variación de

la tensión sobre la misma, dado que la corriente no se modificará pues la impone el generador. En consecuencia, el diagrama de impedancia disponible, podrá transformarse en un diagrama de tensiones, si se lo interpreta en la siguiente escala:



$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$$

Fig. 8.15



$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V}$$

Fig. 8.16

$$\text{Esc. } V = I \text{ Esc. } Z \quad (8.21)$$

y como la potencia aparente es:

$$\bar{P}_s = \bar{V} \bar{I}^* = \bar{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \bar{Z} I^2$$

el mencionado diagrama de impedancia se transforma en uno de potencia, si se lo interpreta en la siguiente escala:

$$\text{Esc. } P_s = I^2 \text{ Esc. } Z \quad (8.22)$$

Por otra parte, considerando el modelo que muestra la Fig. 8.16, suponiendo conocido el diagrama de admitancia del dipolo pasivo. En este caso cualquier variación en la admitancia se traducirá en una variación de corriente, dado que la tensión es impuesta por el generador. Por lo tanto, el diagrama de admitancia disponible podrá transformarse en un diagrama de corriente, si se lo interpreta en la siguiente escala:

$$\text{Esc. } I = V \text{ Esc. } Y \quad (8.23)$$

y por razones similares al caso anterior el mencionado diagrama de admitancia se transforma en uno de potencia, si se los interpreta en la siguiente escala:

$$\text{Esc. } P_s = V^2 \text{ Esc. } Y \quad (8.24)$$

$$\text{En efecto: } \bar{P}_s = \bar{V} \bar{I}^* = \bar{V} \bar{V}^* \bar{Y}^* = \bar{Y}^* V^2$$

8.9 Problemas resueltos

8.9.1) Dibujar los diagramas de impedancia y admitancia para los distintos circuitos que se muestran en la Fig. 8.17.

Solución:

En este primer ejemplo se trazarán los diagramas pedidos en forma cualitativa y se desarrollarán en detalle a efectos de complementar la explicación teórica. En los próximos problemas se dará un resumen del procedimiento y la solución gráfica.

a) Dado que este caso es una configuración serie se comenzará la graficación en el plano de impedancia llevando R en el eje real y X en el imaginario, como se muestra en la Fig. 8.18,

$$\bar{Z} = R + j \omega L$$

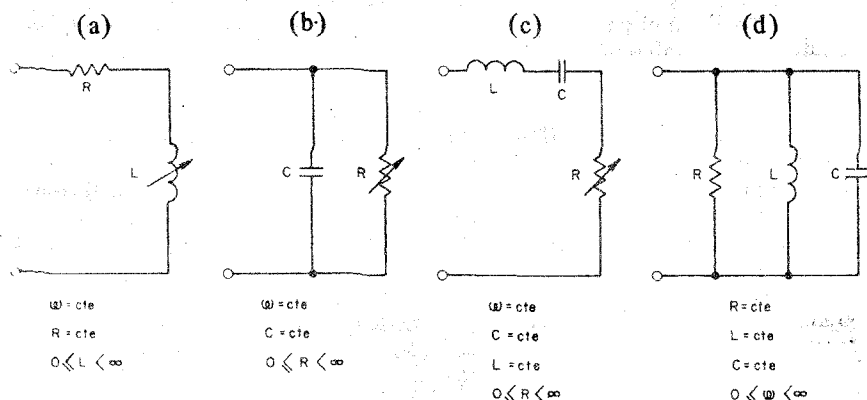


Fig. 8.17

para $L = 0$; $\bar{Z} = R$ y se lleva este valor sobre el eje real obteniéndose el punto A. Para un dado L_1 , se tendrá $j\omega L_1 = jX_{L_1}$ que se lleva sobre el eje imaginario, y que sumada fasorialmente a R determina un punto B del diagrama. Es evidente que al ser R constante, y al componer este valor con las variables de $j\omega L = jX_L$ se obtendrán puntos ubicados sobre una semirrecta perpendicular al eje real y que pasa por R . Además, si $L \rightarrow \infty$; $\bar{Z} \rightarrow \infty$ y como la reactancia de este circuito es siempre positiva, la semirrecta estará definida solamente para valores positivos de reactancia. Dicha semirrecta representa el diagrama de impedancia y es el lugar geométrico que describe el extremo del fasor impedancia al variar la inductancia.

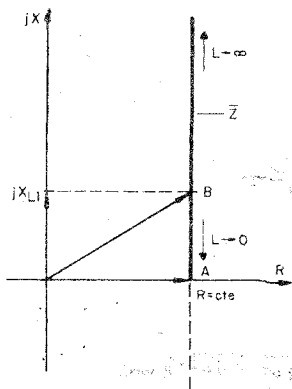


Fig. 8.18

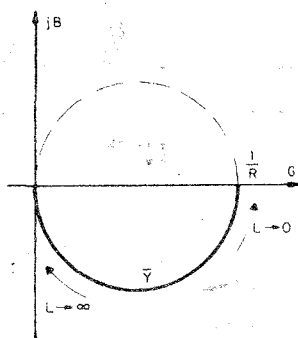


Fig. 8.19

Realizando ahora la inversión del diagrama de impedancia para obtener el de admitancia, por lo cual se trabaja en el plano de admitancia G ; jB mostrado en la Fig. 8.19. Se pensará en invertir la semirrecta mostrada en la Fig. 8.18 y su prolongación matemática, mostrada en línea de trazo, lo cual facilitará el proceso. Se-

gún se estudió en el párrafo 8.5 a una recta que no pasa por el origen le corresponde una circunferencia que pasa por el origen. Como la componente real no puede cambiar de signo a través de la inversión, siendo $\text{Re}[\bar{Z}] > 0$, debe $\text{Re}[\bar{Y}] > 0$ para todo el diagrama. Por lo tanto la circunferencia deberá ser tangente al eje imaginario en el origen. Otro punto puede obtenerse como el inverso en que el diagrama de $\bar{Z}$ corta al eje real, es decir $1/R$.

Se dispone ya de la condición de tangencia al eje imaginario en el origen, y dos puntos, el origen y $1/R$ por lo cual puede trazarse la circunferencia en el plano de admitancia tal como se muestra en la Fig. 8.19. Como a través de la inversión cambia el signo de la parte imaginaria, si en el plano $\bar{Z}$ la componente imaginaria es íntegramente positiva, en el plano $\bar{Y}$ será totalmente negativa, por lo cual el diagrama de admitancia corresponderá a la parte de ordenadas negativas de la circunferencia. Esto último también puede determinarse en base a la cuarta propiedad estudiada en el párrafo 8.5, pues si:

$$0 \leq \varphi_Z \leq \pi/2$$

deberá ser:

$$-\pi/2 \leq \varphi_Y \leq 0$$

La utilización de este último criterio suele ser más conveniente a medida que los diagramas se van complicando. Es de hacer notar, que ambos diagramas generalmente se construyen en un mismo gráfico, debiéndose interpretar el plano de impedancia y el de admittancia en las escalas que correspondan, cuando se trabaje con valores determinados para los parámetros circuitales. Dicha situación se muestra en el gráfico de la Fig. 8.20.

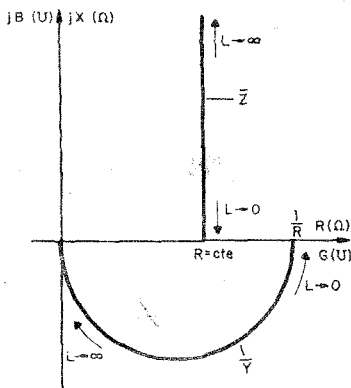


Fig. 8.20

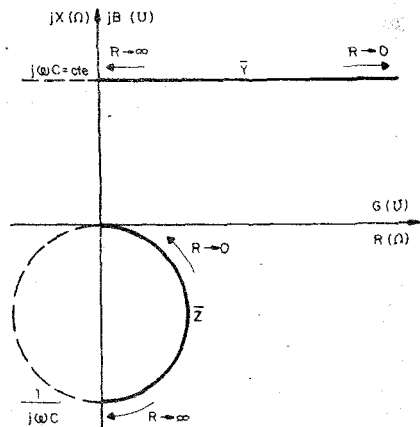


Fig. 8.21

b) Dado que es un circuito paralelo, se comenzará a graficar en el plano de admittancia.

Asignando un valor determinado para la susceptancia capacitiva, y observando que para el circuito,

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

puede trazarse el diagrama de admitancia que se muestra en la Fig. 8.21.

Invirtiendo dicho diagrama se pasa al plano de impedancia, aplicando las propiedades vistas en el parágrafo 8.5, se obtiene la circunferencia indicada, cuya porción válida es la indicada en trazo grueso.

c) Se comienza la construcción en el plano de impedancia pues es un circuito serie. Dado que para el mismo:

$$\bar{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

se elige para X un valor arbitrario, por ejemplo positivo, como se indica en la Fig. 8.22, y se traza el diagrama de impedancia. Pasando ahora al plano de admitancia invirtiendo el diagrama de $\bar{Z}$, hallándose el correspondiente al de $\bar{Y}$ por aplicación de las propiedades vistas en el parágrafo 8.5, cuya porción válida es la indicada en trazo grueso.

d) Como es un circuito paralelo se comienza la construcción en el plano de admitancia. Dado que para este circuito,

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = \frac{1}{R} + jB$$

se fija $\frac{1}{R}$ y se traza el diagrama de $\bar{Y}$ mostrado en la Fig. 8.23, puesto que la susceptancia será variable de $-\infty$ a $+\infty$.

Invirtiendo dicha recta se pasa al plano de impedancia obteniendo el correspondiente diagrama de $\bar{Z}$.

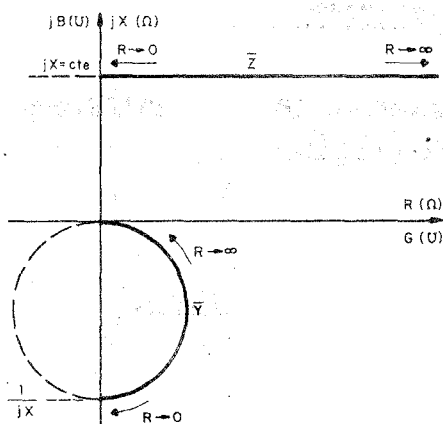


Fig. 8.22

Nótese que ambos diagramas cortan al eje real en puntos que corresponden a un determinado valor de pulsación y que se indica como ω_0 . Para dicha frecuencia el circuito es resistivo puro, hallándose en resonancia de factor en potencia unitario.

8.9.2) Para el circuito dado en la Fig. 8.24 se pide:

a) Dibujar el diagrama de impedancia correspondiente a los puntos A-B del

circuito.

- b) Identificar en el diagrama los puntos correspondientes a resonancia de factor de potencia unitario y al mínimo de $\bar{Z}_{AB}$.

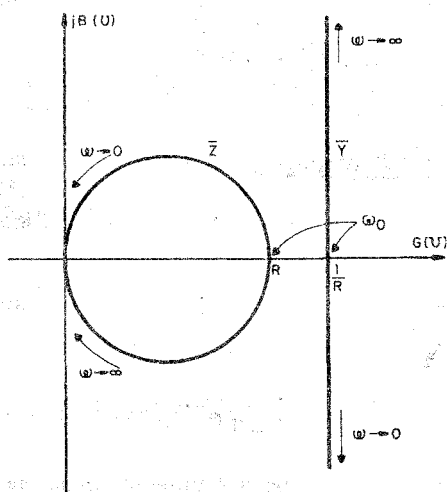


Fig. 8.23

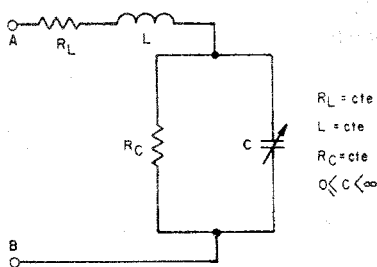


Fig. 8.24

Solución:

- a) Se comienza en el plano de admitancia graficando,

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{R_c} + j\omega C$$

resultando la semirrecta indicada en la Fig. 8.25. Invirtiendo el diagrama de $\bar{Y}_p$ se halla el correspondiente a $\bar{Z}_p$. El diagrama de impedancia visto desde los puntos A-B resultará:

$$\bar{Z}_{AB} = R_L + j\omega L + \bar{Z}_p = \bar{Z}_s + \bar{Z}_p$$

y a efectos de no desplazar el arco de circunferencia, se realizará un cambio en el origen de coordenadas, desplazando la parte real en un valor $-R_L$ y la imaginaria en un valor $-j\omega L$, obteniéndose un nuevo origen O' . Desde este nuevo origen se miden sobre el diagrama de $\bar{Z}_p$ los valores correspondientes a $\bar{Z}_{AB}$.

b) Para el presente diagrama, el punto B es el correspondiente a resonancia de factor de potencia unitario, que se da para un valor de C intermedio entre cero e infinito. Para el mismo el circuito se comporta como resistivo puro o sea que $\varphi Z_{AB} = 0$. Nótese que en el ejemplo se adoptó un valor muy especial para la reactancia inductiva, así fue que el nuevo eje real interceptó al diagrama de impedancia en un solo punto. Si se toma un valor de reactancia inductiva menor que el anterior, se tendrán dos puntos de intercepción con el eje real, es decir dos puntos de resonancia de factor de potencia unitario, que se darán para dos valores de C distintos. Si

en cambio se adopta un valor de reactancia inductiva tan grande que el diagrama de impedancia no corte al eje real, no existirá ningún valor de C que lleva al circuito a resonancia de factor de potencia unitario.

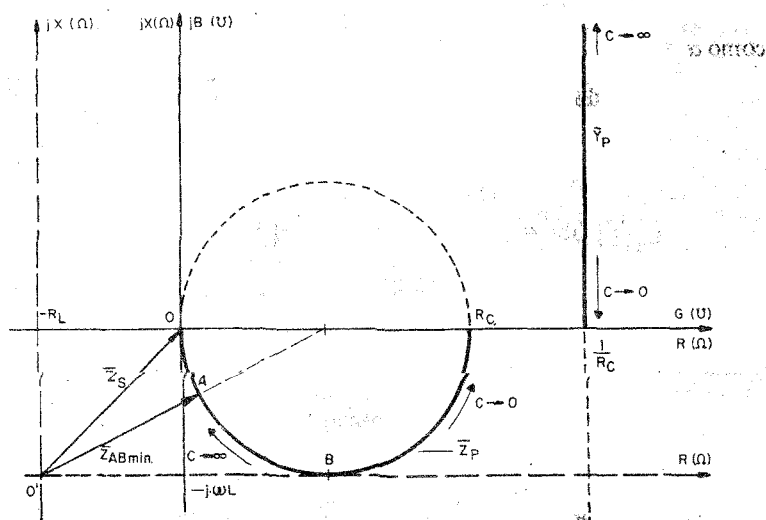


Fig. 8.25

El punto A es el correspondiente a mínima impedancia, y se halla trazando en el diagrama de impedancia el menor fasor que une el origen de coordenadas O' con el mismo.

Obsérvese que en estos tipos de circuitos, a diferencia de los circuitos resonantes serie o paralelo vistos en el Cap. 7, no se da simultáneamente la condición de resistivo puro y de mínima impedancia o admitancia. Es por eso que podrán definirse dos tipos de resonancia, la de factor de potencia unitario y la de immitancia mínima.

8.9.3) Dado el diagrama de impedancia mostrado en la Fig. 8.26 se pide:

- Hallar el de admitancia correspondiente sabiendo que $\text{Esc. } Z = 5 \Omega/\text{cm}$.
- Suponiendo que el circuito a que corresponde el diagrama de admitancia encontrado es alimentado por un generador de tensión, de valor eficaz 100 V, calcular las escalas que deberán utilizarse para convertirlo en uno de corriente y en uno de potencia.

Solución:

a) Se construirá el diagrama de admitancia sobre la misma Fig. 8.26. Se invierte la semirrecta AC, le corresponderá en el plano de admitancia una circunferencia que pasa por el origen. Al arco de circunferencia ABC le corresponderá un arco inscripto sobre una circunferencia que no pasa por el origen. En consecuencia bastará invertir tres puntos del diagrama de Z , por ejemplo el A, B y C que son los más convenientes.

Se utiliza el método visto en el parágrafo 8.3. El radio unitario se calcula con la Ec. (8.20).

$$r_u \text{ (cm)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right] \beta \left[\frac{\mathcal{U}}{\text{cm}} \right]}}$$

como $\alpha = \text{Esc. } Z = 5 \frac{\Omega}{\text{cm}}$ es dato, se puede fijar el radio unitario en 5 cm de donde la escala de admitancia resultará:

$$\beta = \text{Esc. } Y = \frac{1}{r_u^2 \alpha} = \frac{1}{25 \cdot 5} = 8 \cdot 10^{-3} \mathcal{U}/\text{cm}$$

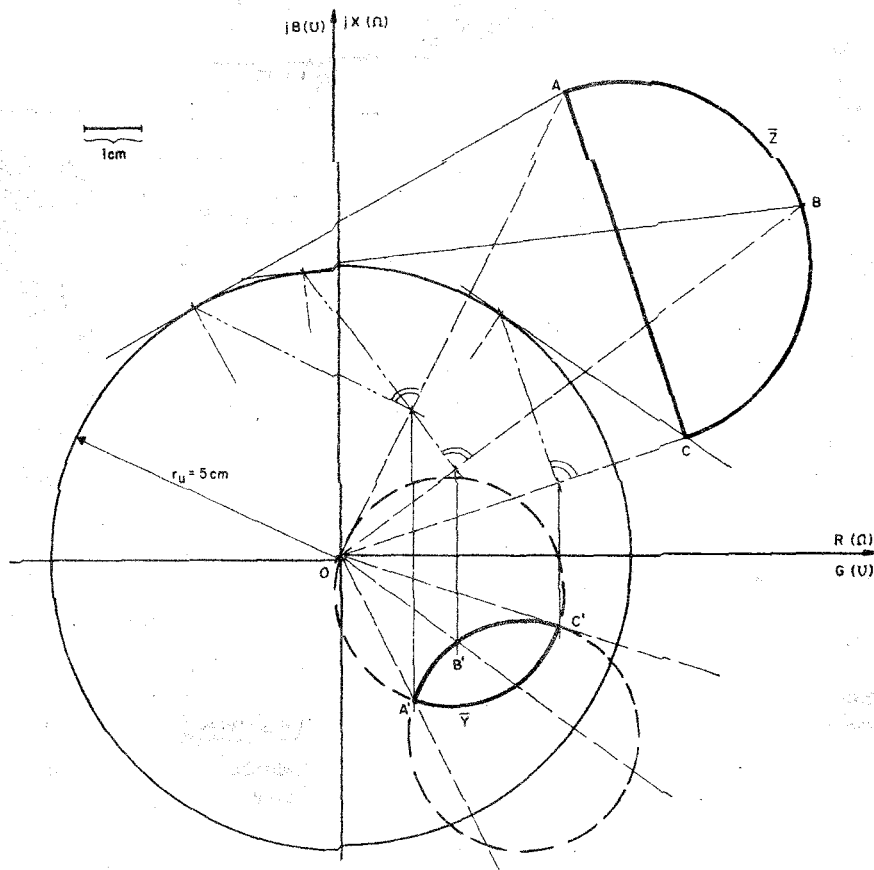


Fig. 8.26

Con estos datos se invierten los puntos mencionados obteniéndose los puntos A', B' y C'. La inversión de la semirrecta AC corresponderá a un arco de circunferencia que pase por A'; C' y el origen. Al arco ABC le corresponderá en el plano de

admitancia un arco de circunferencia que pase por los puntos A' , B' y C' . De esta manera se dibuja el diagrama de Y .

b) Según la Esc. (8.23)

$$\text{Esc. } I = V \text{ Esc. } Y \therefore \quad (8.23)$$

$$\text{Esc. } I = 100 [V] \cdot 8 \cdot 10^{-3} \left[\frac{V}{\Omega} \right] = 0,8 \left[\frac{A}{\Omega} \right]$$

y por la Ec. (8.24):

$$\text{Esc. } P_s = V^2 \text{ Esc. } Y \therefore$$

$$\text{Esc. } P_s = 100^2 [V]^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \left[\frac{V}{\Omega} \right] = 80 \left[\frac{VA}{\Omega} \right]$$

8.9.4.) Para el circuito ilustrado en la Fig. 8.27 se pide:

- Dibujar el diagrama de admitancia, identificando en todos los diagramas intermedios los puntos correspondientes a $\omega = 0$; 500; 1000 e infinito.
- ¿A qué se reduce el diagrama de admitancia total? ¿Qué significa el resultado obtenido, desde el punto de vista del comportamiento del circuito?

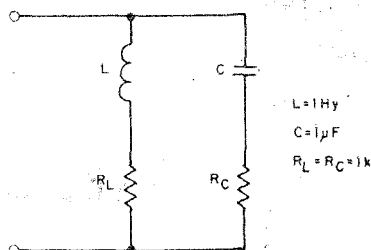


Fig. 8.27

Solución:

Dado que $R_C = R_L = 1 \text{ k}\Omega$, para un diagrama de dimensiones cómodas es conveniente adoptar una escala de impedancia

$$\text{Esc. } Z = 100 \frac{\Omega}{\Omega}$$

Comenzando la construcción en el plano de impedancia se empieza con la rama inductiva y para la cual:

$$\overline{Z}_L = R_L + j\omega L$$

de acuerdo a lo estudiado y a la escala adoptada, resulta el diagrama para $\overline{Z}_L$ mostrado en la Fig. 8.28.

Además,

$$\begin{aligned}\bar{Z}_L|_{\omega=0} &= R_L = 1000 \, \Omega \\ \bar{Z}_L|_{\omega=500} &= (1000 + j 500) \, \Omega \\ \bar{Z}_L|_{\omega=1000} &= (1000 + j 1000) \, \Omega \\ \bar{Z}_L|_{\omega \rightarrow \infty} &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

valores que interpretados en la escala de impedancia permiten identificar en el diagrama de $\bar{Z}_L$, los puntos que se desean.

Pasando a la rama capacitiva, se tiene:

$$\bar{Z}_C = R_C - j \frac{1}{\omega C}$$

y resulta el diagrama de $\bar{Z}_C$ mostrado en la Fig. 8.28. Además,

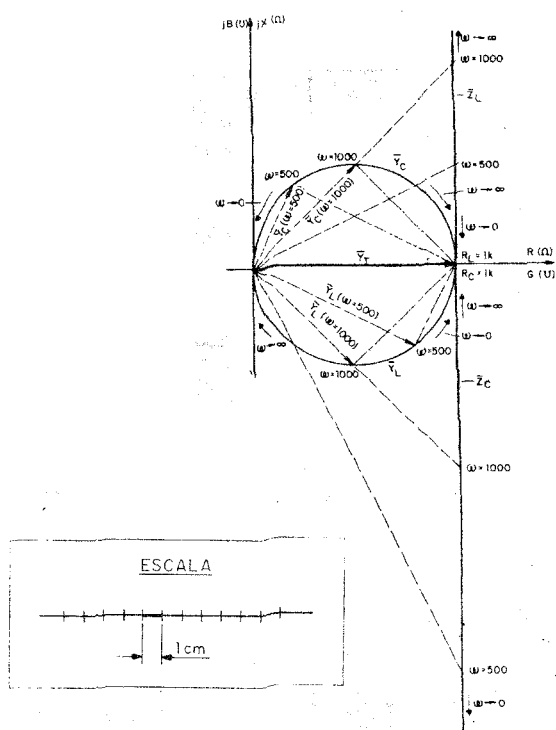


Fig. 8.28

$$\bar{Z}_C|_{\omega=0} \rightarrow \infty$$

$$\bar{Z}_C|_{\omega=500} = (1000 - j 2000) \Omega$$

$$\bar{Z}_C|_{\omega=1000} = (1000 - j 1000) \Omega$$

$$\bar{Z}_C|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

valores que interpretados en la escala de impedancia permiten identificar en el diagrama de $\bar{Z}_C$ los puntos que se desean.

Se deberán invertir ahora los lugares geométricos de $\bar{Z}_L$ y $\bar{Z}_C$, para hallar los correspondientes de $\bar{Y}_L$ e $\bar{Y}_C$ y luego sumarlos para hallar la admitancia total. Previo a la inversión con el objeto de pasar al plano de admitancia, se debe adoptar la escala. Si por ejemplo se desea que el punto inverso correspondiente a la intersección de las semirrectas con el eje real, coincida con dicho punto, es posible adoptar:

$$\text{Esc. } Y = 10^{-4} \frac{\mathcal{U}}{\text{cm}}$$

Con estos datos, y utilizando las propiedades estudiadas en el párrafo 8.5 se encuentran los lugares geométricos correspondientes a $\bar{Y}_L$ e $\bar{Y}_C$. Para identificar en los mismos puntos marcados en los diagramas de impedancias, se unen dichos puntos con el origen, y de allí se trazan semirrectas de forma que en cada una de ellas se cumpla lo siguiente:

$$\varphi_{Y_L} = -\varphi_{Z_L}$$

$$\varphi_{Y_C} = -\varphi_{Z_C}$$

y donde dichas semirrectas cortan a los diagramas de admitancia pueden ubicarse los puntos correspondientes a las pulsaciones indicadas.

Finalmente,

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_L + \bar{Y}_C$$

b) El diagrama de admitancia total se reduce a un punto sobre el eje real para

$$\frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_C} = 10^{-3} \mathcal{U}$$

Nótese que en la Fig. 8.28 a modo de ejemplo se han sumado parcialmente,

$$\bar{Y}_L + \bar{Y}_C \text{ para } \omega = 500$$

$$\bar{Y}_L + \bar{Y}_C \text{ para } \omega = 1000$$

resultando en ambos casos $\bar{Y}_T = 10^{-3} \mathcal{U}$

Es decir que el circuito se comporta como resistivo puro para todas las frecuen-

cias, dicho en otras palabras, el circuito paralelo de dos ramas indicado en la Fig. 8.27 para los valores dados resuena a todas las frecuencias.

En el Cap. 12 se estudiará este circuito en detalle.

8.9.5.) Dado el circuito ilustrado en la Fig. 8.29 se pide:

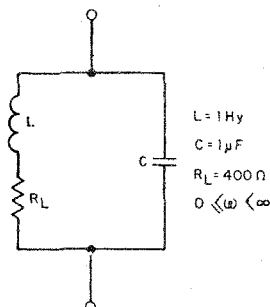


Fig. 8.29

- Dibujar el diagrama de admitancia y marcar los puntos de los diagramas que corresponde a $\omega = 0; 400; 800; 1200; 1600; 2000$ e ∞ .
- Indicar los puntos correspondientes a resonancia, condición de factor de potencia unitario y de admitancia mínima, hallando las frecuencias que le corresponden por interpolación.

Solución:

a) Comenzando la construcción en el plano de impedancia, representando el lugar geométrico de la impedancia de la rama inductiva,

$$\bar{Z}_L = R_L + j\omega L$$

adoptando una escala para impedancia:

$$\text{Esc. } Z = 200 \frac{\Omega}{\text{cm}}$$

resultando la semirrecta indicada como $\bar{Z}_L$ en la Fig. 8.30. Sobre la misma pueden indicarse los puntos correspondientes a las pulsaciones pedidas, calculando el valor de las reactancias a esas frecuencias e interpretándolas en la escala de impedancia.

Invirtiendo el diagrama de $\bar{Z}_L$ se halla el de $\bar{Y}_L$ en el plano de admitancia, adoptando una Esc. $Y = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ S/cm}$. Sobre dicho diagrama, trazando semirrectas que forman un ángulo $\varphi_{Y_L} = -\varphi_{Z_L}$, se determinan los puntos correspondientes a las pulsaciones indicadas.

Teniendo trazado el arco de circunferencia que es el lugar geométrico correspondiente a $\bar{Y}_L$, se traza el que corresponde a $\bar{Y}_C$, resultando:

$$\bar{Y}_C = j\omega C$$

que para distintos valores a ω resulta una semirrecta coincidente con el eje imaginario. Se calculan luego sus valores para los valores asignados a ω , se interpretan en la escala de admitancias y se indican sobre dicho diagrama. Finalmente, el diagrama

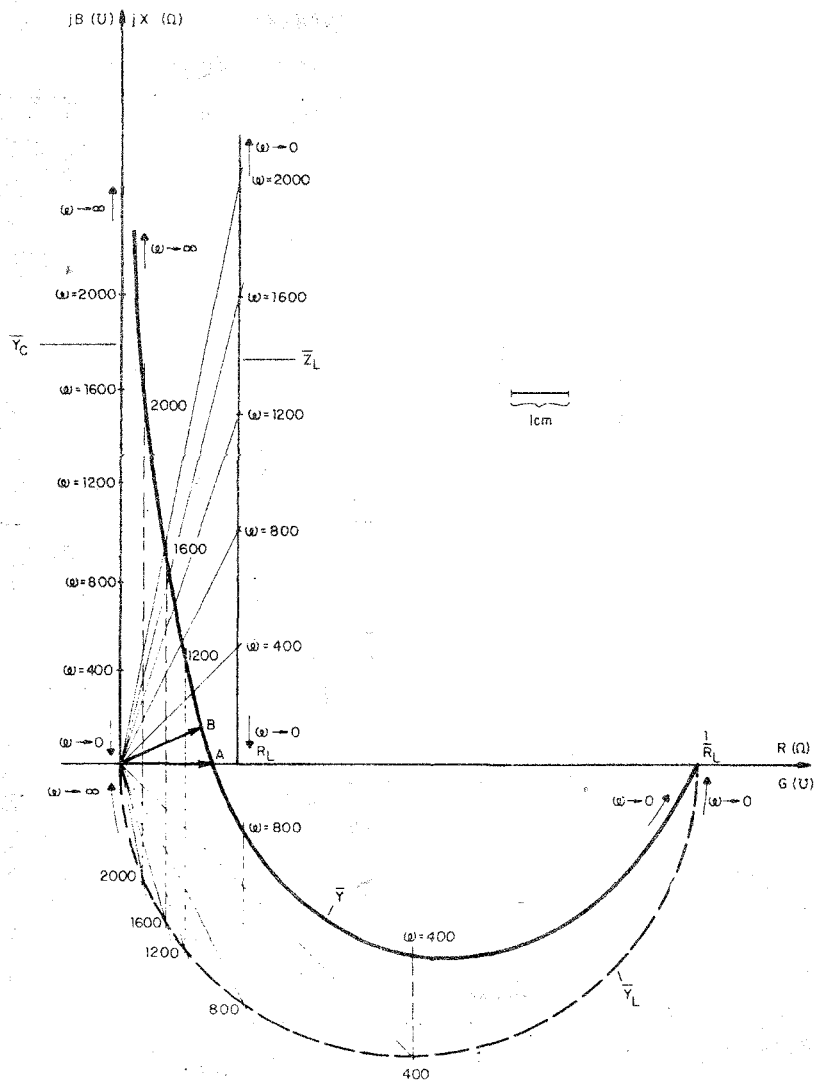


Fig. 8.30

ma total se representa como:

$$\bar{Y} = \bar{Y}_L + \bar{Y}_C$$

que en este gráfico se halla sumando parcialmente los valores de $\bar{Y}_L$ e $\bar{Y}_C$ para las pulsaciones indicadas.

b) En el diagrama de la Fig. 8.30, el punto A corresponde a resonancia de con-

dición de factor de potencia unitario, que resulta en una pulsación $\omega \cong 920 \frac{1}{s}$

El punto B, determinado por el menor fasor trazado del eje de coordenadas al diagrama, corresponde a resonancia de admitancia mínima, que se da para un valor de pulsación $\omega \cong 1030 \frac{1}{s}$

8.10 Problemas propuestos

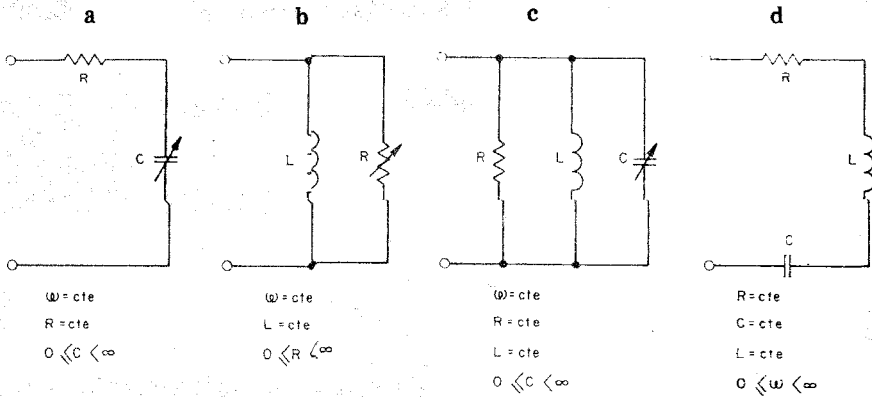


Fig. 8.31

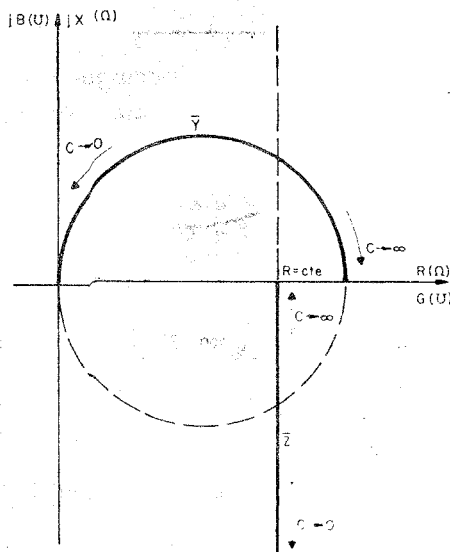


Fig. 8.32

8.10.1) Dibujar los diagramas de impedancia y admitancia que se ilustran en la Fig. 8.31.

Resultados:

a) Ver Fig. 8.32.

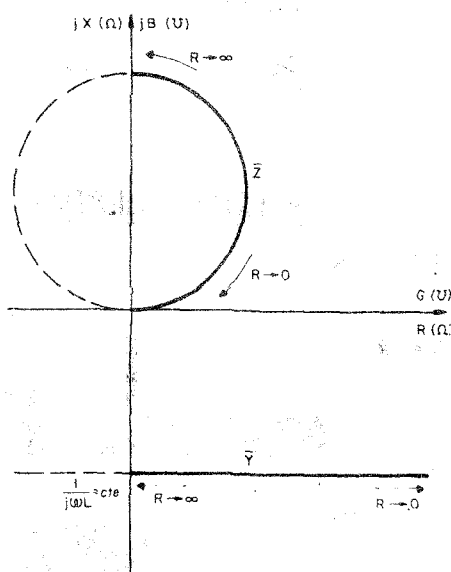


Fig. 8.33

b) Ver Fig. 8.33.

c) Ver Fig. 8.34.

d) Ver Fig. 8.35.

8.10.2) Construir el diagrama de impedancia para el circuito mostrado en la Fig. 8.36.

Resultado

Ver Fig. 8.37.

Nótese que en el mismo $\bar{Z}_C = R_C + \frac{1}{j\omega C}$; $\bar{Y}_C = \frac{1}{\bar{Z}_C}$; $\bar{Y}_p = \bar{Y}_C + \bar{Y}_L$; $\bar{Z}_p = \frac{1}{\bar{Y}_p}$;

$$\bar{Z}_{AB} = R_1 + \bar{Z}_p.$$

Es decir que el lugar geométrico de $\bar{Z}_p$ se convierte en el de $\bar{Z}_{AB}$ si se mide desde el nuevo eje de coordenadas O' .

8.10.3) Dado el diagrama de impedancia mostrado en la Fig. 8.38, se pide:

a) Dibujar el diagrama de admitancia correspondiente, identificando en el dia-

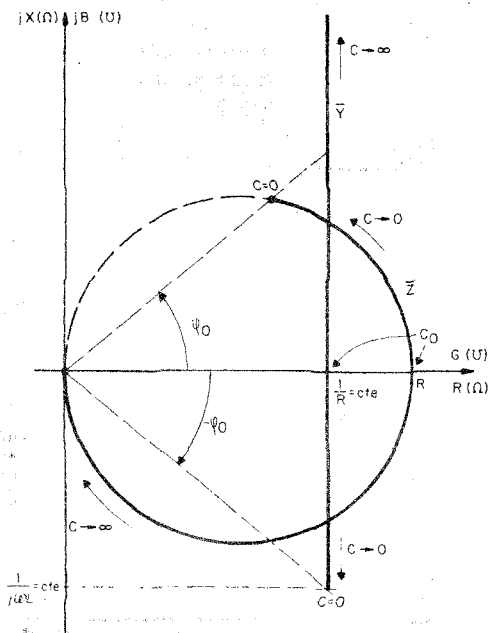


Fig. 8.34

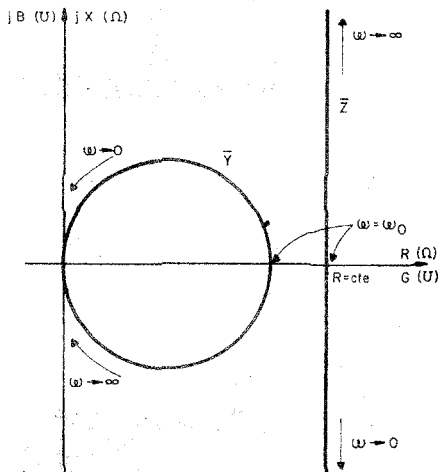


Fig. 8.35

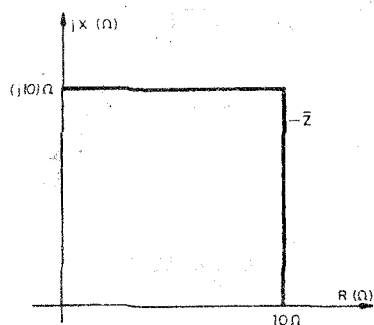


Fig. 8.38

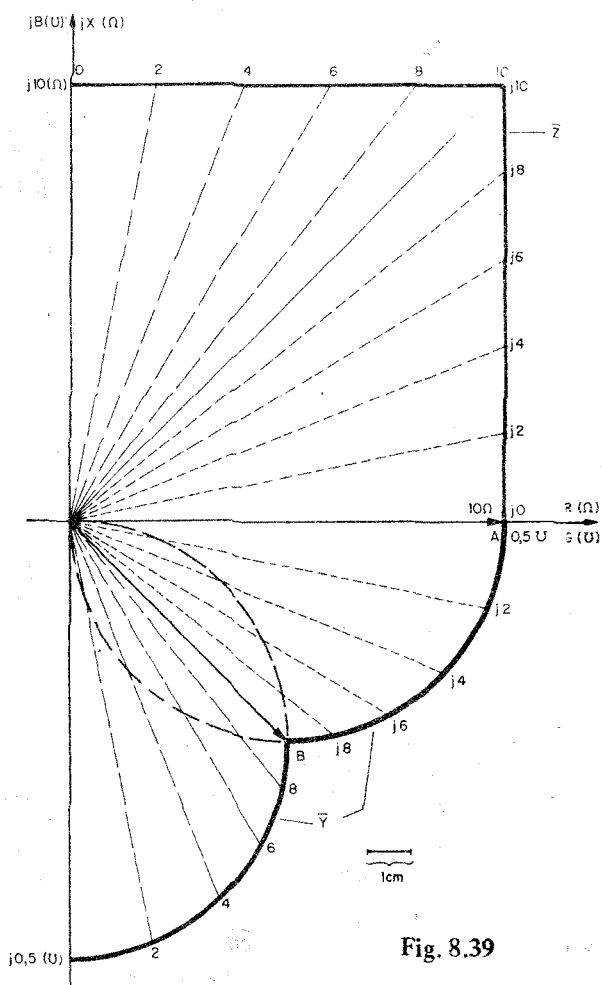


Fig. 8.39

$$\text{Esc. } Y = 0,05 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

b) El punto A indica el correspondiente a resonancia de factor de potencia unitario, y el B el de admitancia mínima.

8.10.4) Para el circuito ilustrado en la Fig. 8.40 se desea:

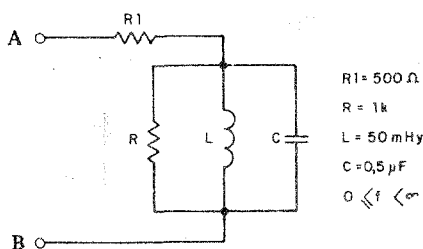


Fig. 8.40

- Construir el diagrama de impedancia.
- Determinar gráficamente los valores de $\bar{Z}_p$ y $\bar{Z}_{AB}$ correspondientes a $\omega = 10^4 \frac{1}{s}$.

Resultados:

- a) Ver Fig. 8.41. Se utilizaron: Esc. $Z = 200 \frac{\Omega}{\text{cm}}$; Esc. $Y = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{cm}}$

Nótese que en el mismo,

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\bar{Z}_p = \frac{1}{\bar{Y}_p}$$

$$\bar{Z}_{AB} = R_1 + \bar{Z}_p$$

por lo tanto, el lugar geométrico de $\bar{Z}_p$ se convierte en el de $\bar{Z}_{AB}$ si se mide desde el nuevo eje de coordenadas O' .

- b) Identificado $\bar{Y}_p \Big|_{\omega = 10^4}$ se determinan los fasores $\bar{Z}_p \Big|_{\omega = 10^4}$ y

$\bar{Z}_{AB} \Big|_{\omega = 10^4}$ del gráfico, resulta:

$$\text{Re} [\bar{Z}_p] = 0,5 \text{ cm} \Rightarrow 100 \Omega$$

$$\text{Im} [\bar{Z}_p] = 1,5 \text{ cm} \Rightarrow 300 \Omega$$

$$\bar{Z}_p \Big|_{\omega = 10^4} = (100 - j 280) \Omega$$

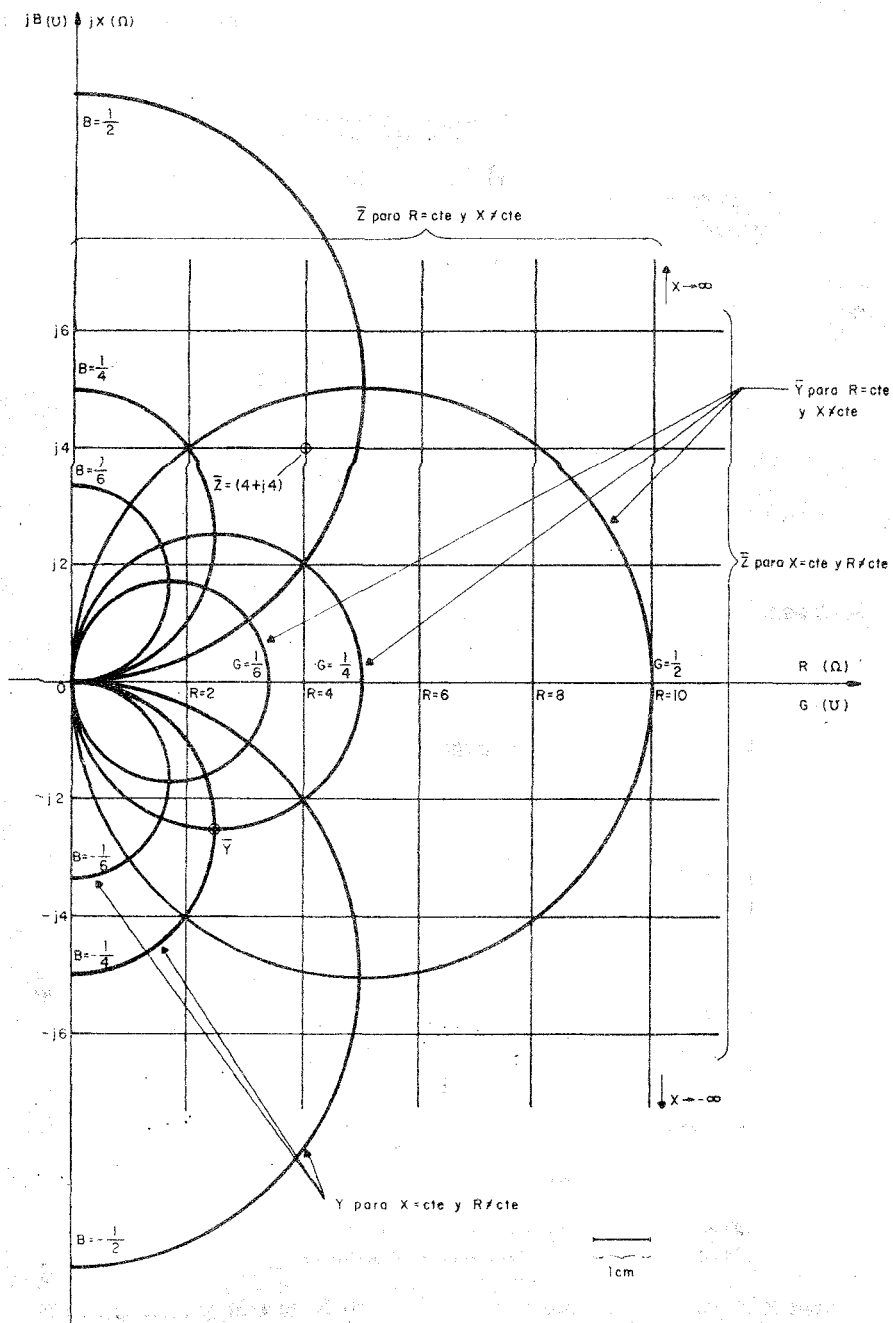


Fig. 8.43

b) Dibujar los diagramas de admitancias correspondientes a los lugares geométricos del punto a).

c) Hallar gráficamente los valores de las componentes G y B que correspondan a la impedancia $\bar{Z} = (4 + j4) \Omega$.

Resultados:

a) Adoptando Esc. $Z = 1 \frac{\Omega}{\text{cm}}$; el diagrama de impedancia está compuesto por las rectas verticales y semirrectas horizontales mostradas en la Fig. 8.43.

b) Por inversión del diagrama anterior se llega al de admitancia, compuesto por las circunferencias y semicircunferencias indicadas. Se adoptó Esc. $Y = 0,05 \frac{\Omega}{\text{cm}}$

c) Se ubica en el plano de impedancia el punto $\bar{Z} = (4 + j4) \Omega$, por ese punto pasan la recta correspondiente a $R = 4 \Omega$ y $X \mp \text{cte}$; y $X = 4 \Omega$ y $R \mp \text{cte}$; donde se interceptan sus inversas en el plano $\bar{Y}$ resulta el valor de $\bar{Y}$ correspondiente.

$$\text{Re}[\bar{Y}] = G = 2,4 \text{ cm} \Rightarrow 0,12 \Omega$$

$$\text{Im}[\bar{Y}] = B = 2,4 \text{ cm} \Rightarrow 0,12 \Omega$$

Regimen permanente de circuitos excitados por señales poliarmónicas

9.1 Introducción

En el Cap. 7 se estudió la respuesta de circuitos excitados por señales senoidales, en régimen permanente, y las potencias que se desarrollan en las mismas.

Pero es de hacer notar, que existen muchos casos en los cuales, la forma de señal de excitación difiere considerablemente de la senoidal. Por otra parte, para dar un ejemplo elemental, se mencionarán dispositivos tales como los rectificadores, en los cuales a pesar de que la excitación es senoidal, la forma de señal de respuesta no lo es.

Afortunadamente, existe una gran cantidad de señales periódicas, como las mencionadas, que pueden descomponerse en componentes armónicas. Estas señales, llamadas *poliarmónicas*, fueron desarrolladas en el Cap. 2, además de calcularse sus valores característicos.

Es por ello que, en este capítulo, se desarrollará un método para resolver circuitos excitados por señales poliarmónicas en régimen permanente. Dado que cada componente es senoidal, además de la posibilidad de existencia de una continua, se hará referencia a algunos conceptos y métodos de resolución estudiados en el Cap. 7 para cada componente en particular.

Se dará comienzo con una revisión de los conceptos de dominio de tiempo y frecuencia. Luego se verá la forma de aplicar el *principio de superposición* con el objeto de encontrar un método para la obtención del *régimen permanente de un circuito recorrido por una señal poliarmónica*. Finalmente se estudiarán las potencias existentes en estos tipos de circuitos.

9.2 Descripción de una señal en el dominio del tiempo y en el de frecuencia

Tendrá lugar una revisión de los conceptos dados en el Cap. 2; parágrafo 2.3.5), sobre algunos aspectos del desarrollo de señales periódicas no senoidales en *Serie de Fourier*.

Recordando que una señal senoidal se define por medio de su valor máximo

S_m ; su pulsación ω , o período T y su fase inicial θ , y puede expresarse como

$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \theta) \quad (9.1)$$

y la información suministrada por la Ec. (9.1) se presenta en el dominio del tiempo según se ilustra en la Fig. 9.1.

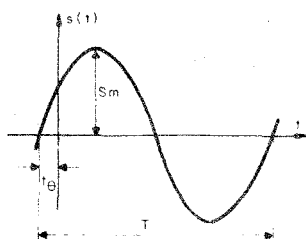


Fig. 9.1

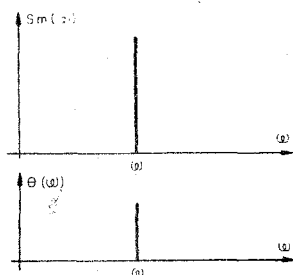


Fig. 9.2

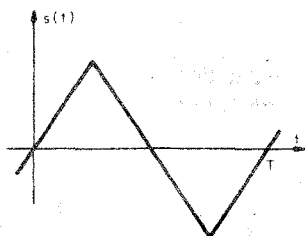


Fig. 9.3

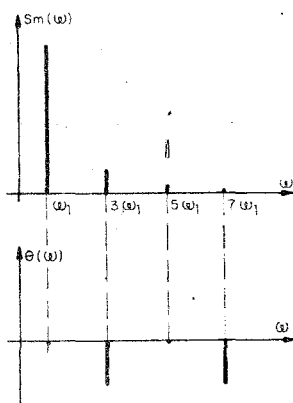


Fig. 9.4

Según se estudió, la mencionada información también puede representarse en el *dominio de frecuencia* dando lugar a los *espectros de frecuencia de amplitud y fase* mostrados en la Fig. 9.2. De dicha figura se desprende, que para la señal senoidal existirá una sola componente de amplitud y una de fase en el dominio de frecuencia. Si en lugar de la señal senoidal, se dispone, por ejemplo, de una señal periódica como la mostrada en la Fig. 9.3 en el dominio del tiempo, por intermedio de la Serie de Fourier podrá descomponerse en sus componentes en el *dominio de frecuencia* como lo indica la Ec. (9.2),

$$s(\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_m n \sin(n\omega t + \theta_n) \quad (9.2)$$

y representarse según se ilustra en la Fig. 9.4. En la misma se recuerda que ω_1 es la pulsación de la componente senoidal de menor frecuencia, llamada *fundamental*

o primera armónica, que resulta 2π veces la inversa del período de la señal poliarmónica. Esto es: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$. Los demás valores de pulsación que se muestran en

los espectros discontinuos de la Fig. 9.4, son múltiplos enteros de ω_1 . En consecuencia, si una gran cantidad de señales, llamadas poliarmónicas, pueden descomponerse en varias componentes senoidales de distinta amplitud y frecuencia, sería conveniente extender los conceptos vistos en el Cap. 7 para la solución individual de cada una de las componentes. Esto es oportuno, dado que la solución para este tipo de señal en régimen permanente resulta en general sencilla para cualquier tipo de circuito.

Por otra parte, si la señal en análisis posee un período grande, los intervalos entre armónicas que se ilustran en la Fig. 9.4, serán pequeños, y en el límite, si el período es infinito, o sea que la señal es aperiódica se tendrá un espectro continuo, que se analiza por medio de la Integral de Fourier. Esta última se reemplaza en este libro por la Transformada de Laplace.

9.3 Aplicación del principio de superposición para la obtención de la respuesta permanente de un circuito excitado por una señal poliarmónica descompuesta en serie de Fourier.

Si un modelo circuital, lineal como los estudiados en este libro, es excitado por un generador que provee una señal poliarmónica, podrá resolverse empleando el método de cálculo que se indica a continuación. En primer lugar debe descomponerse la señal poliarmónica de excitación en las componentes que indique la Serie de Fourier. Luego se halla la respuesta temporal del modelo a cada una de las excitaciones componentes. Finalmente, en base al principio de superposición se halla la respuesta del circuito a la señal poliarmónica como la suma algebraica de las respuestas del modelo a cada una de las excitaciones componentes.

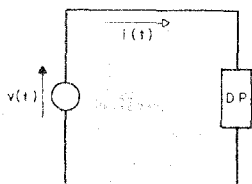


Fig. 9.5

Los tres pasos enunciados pueden explicitarse de la siguiente manera. Suponiendo, por ejemplo el dipolo pasivo que se muestra en la Fig. 9.5 excitado por un generador de tensión poliarmónica, que en base a la Serie de Fourier puede expresarse como:

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Vm_n \sin(n\omega t + \theta_{v_n})$$

lo que es lo mismo:

$$v(t) = V_0 + Vm_1 \sin(\omega t + \theta_{v_1}) + Vm_2 \sin(2\omega t + \theta_{v_2}) + \dots +$$

$$+ Vm_n \operatorname{sen}(n\omega t + \theta_{v_n})$$

y sintetizando,

$$v(t) = V_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) \quad (9.3)$$

es decir que la forma de señal que provee el generador de tensión periódica no sinusoidal, está representada por la suma de una tensión continua y de otras senoidales de distinta amplitud y frecuencia. En consecuencia el generador de tensión poliarmónica mostrado en la Fig. 9.5 puede ser reemplazado por una conexión en serie de un generador de tensión continua y de generadores de tensión senoidales, tal como se ilustra en la Fig. 9.6. Debido a la *linealidad* del dipolo, puede aplicarse el *principio de superposición*, resolviendo el dipolo para cada una de las excitaciones componentes, para finalmente hallar la respuesta a la excitación poliarmónica como suma de las respuestas individuales a cada uno de los generadores componentes.

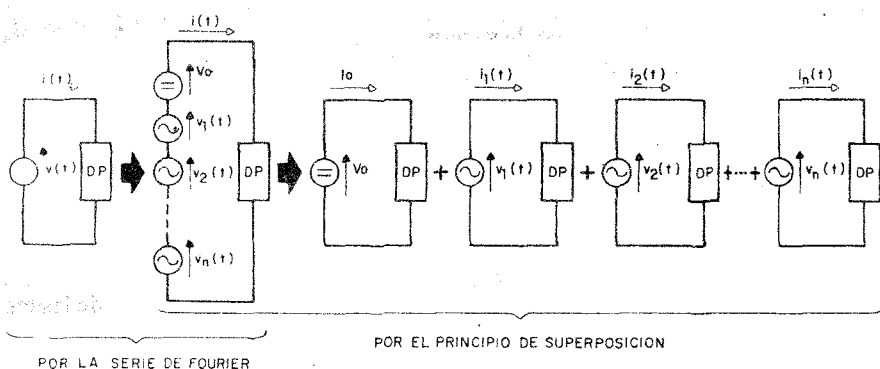


Fig. 9.6

Nótese que en la descomposición realizada en la Fig. 9.6, el primero de los generadores es de valor constante en función del tiempo. Este implica prácticamente resolver el circuito excitado por un generador de tensión continua. Los restantes son generadores de tensión senoidal, del tipo:

$$v_n(t) = Vm_n \operatorname{sen}(n\omega t + \theta_{v_n})$$

y cada uno de los circuitos componentes deberán resolverse según la metodología expuesta en el Cap. 7. Es decir, que para cada frecuencia deberá calcularse el valor de la impedancia $\bar{Z}_n$; y realizando el cociente entre el valor complejo eficaz de la tensión y la impedancia se obtiene el valor complejo eficaz de la corriente, a saber:

$$\bar{I}_n = \frac{\bar{V}_n}{\bar{Z}_n}$$

donde la respuesta temporal asociada a la componente en cuestión será:

$$i_n(t) = \text{Im} [\dot{I} n_m]$$

y la respuesta temporal que corresponde a la excitación poliarmónica indicada por la Ec. (9.3) resulta:

$$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) \quad (9.4)$$

Nótese, según indica la Ec. (9.4), que la suma de las respuestas individuales se efectúa en el dominio del tiempo, ya que en el dominio transformado $j\omega$ no podrán sumarse los fasores armónicos correspondientes a distinta frecuencia pues giran con velocidad angular desigual.

Por otra parte, es obvio que el método será eficiente sólo en aquellos casos en que la Serie de Fourier sea lo suficientemente convergente como para representar con suficiente exactitud a la señal poliarmónica empleando un reducido número de generadores elementales.

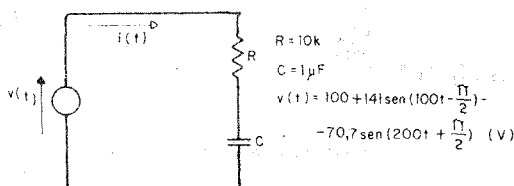


Fig. 9.7

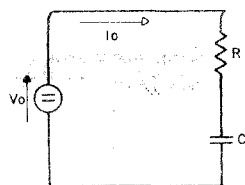


Fig. 9.8

Ejemplo de aplicación

Para el circuito dado en la Fig. 9.7 se pide calcular $i(t)$.

Solución

De acuerdo a lo expuesto en el Cap. 2, parágrafo 2.3.5) previo a resolver el problema, se transfiere el signo negativo del tercer término de la señal al ángulo de fase, resultando:

$$v(t) = 100 + 141 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) + 70,7 \sin\left(200t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Calculando las respuestas individuales para cada componente,

$$\omega = 0$$

Para esta pulsación será analizado el circuito mostrado en la Fig. 9.8. Como se trata de un problema de continua, es evidente que en el estado permanente el capacitor se comportará como circuito abierto y en consecuencia será nula la corriente. Esto puede verificarse realizando los cálculos, a saber:

$$\bar{Z}_0 = R - j \frac{1}{\omega_0 C} = 10^4 - j \frac{1}{0 \cdot 10^{-6}} \rightarrow \infty \therefore$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\infty} \rightarrow 0 \quad (9.5)$$

$$\omega = 100 \frac{1}{s}$$

Para el circuito ilustrado en la Fig. 9.9 resulta:

$$\bar{Z}_1 = R - j \frac{1}{\omega_1 C} = 10^4 - j \frac{1}{10^2 \cdot 10^{-6}} = (10^4 - j 10^4) \Omega$$

$$\bar{Z}_1 = 14.142 e^{-j 45^\circ} \Omega$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{100 e^{-j 90^\circ}}{14.142 e^{-j 45^\circ}} = 7.07 \cdot 10^{-3} e^{-j 45^\circ} \text{ A}$$

$$i_1(t) = \text{Im} [\bar{I}_{1m}] = \text{Im} [7.07 \sqrt{2} \cdot 10^{-3} e^{j(100t - 45^\circ)}]$$

$$i_1(t) = 9.99 \cdot 10^{-3} \sin(100t - 45^\circ) \text{ A} \quad (9.6)$$

$$\omega = 200 \frac{1}{s}$$

Donde para el circuito mostrado en la Fig. 9.10 resulta:

$$\bar{Z}_2 = R - j \frac{1}{\omega_2 C} = 10^4 - j \frac{1}{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} = (10^4 - j 0.5 \cdot 10^4) \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 11.180 e^{-j 26.5^\circ} \Omega$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{50.14 e^{-j 90^\circ}}{11.180 e^{-j 26.5^\circ}} = 4.48 \cdot 10^{-3} e^{-j 63.5^\circ} \text{ A}$$

$$i_2(t) = \text{Im} [\bar{I}_{2m}] = \text{Im} [4.48 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-3} e^{j(200t - 63.5^\circ)}] \text{ A}$$

$$i_2(t) = 6.32 \cdot 10^{-3} \sin(200t - 63.5^\circ) \text{ A} \quad (9.7)$$

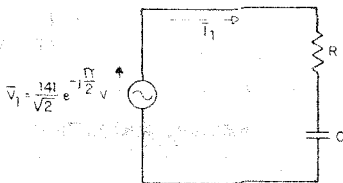


Fig. 9.9

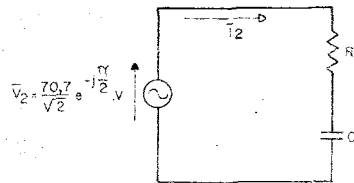


Fig. 9.10

Nótese que para los componentes senoidales se puede trabajar con el valor máximo de la tensión, y hallar el valor máximo de la corriente, y luego tomar la parte imaginaria del fasor armónico máximo. De esta manera se evitaría el dividir

y multiplicar por $\sqrt{2}$ en el proceso.

Finalmente, la corriente circulante como respuesta a la tensión poliarmónica excitadora resulta de la suma de los resultados que dan las Ecs.(9.5); (9.6) y (9.7), por lo cual:

$$i(t) = 9,99 \cdot 10^{-3} \text{ sen } (100 t - 45^\circ) + 6,32 \cdot 10^{-3} \text{ sen } (200 t - 63,5^\circ) \text{ A}$$

9.4 Potencias en circuitos recorridos por señales poliarmónicas

Según lo anteriormente expuesto, los circuitos recorridos por señales poliarmónicas pueden analizarse en función de los componentes que indique la Serie de Fourier. En consecuencia, coexisten señales senoidales de distinta amplitud y frecuencia, lo que interpretado en el dominio transformado de frecuencia imaginaria, da lugar a la coexistencia de fasores de distinta pulsación, es decir que giran con velocidad angular distinta. Esto hace pensar que el procedimiento de cálculo para las potencias en *régimen poliarmónico permanente* diferirá del expuesto en *régimen senoidal permanente*.

De acuerdo a lo analizado en el Cap. 2, parágrafo 2.3.5), una dada tensión poliarmónica aplicada a un circuito y la corriente poliarmónica que circula por el mismo pueden expresarse según lo indican las Ecs. (9.8) y (9.9),

$$v(\omega t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Vm_n \text{ sen } (n\omega t + \theta_{v_n}) \quad (9.8)$$

$$i(\omega t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Im_n \text{ sen } (n\omega t + \theta_{i_n}) \quad (9.9)$$

y sus correspondientes *valores eficaces* pueden calcularse según lo indica la Ec. (2.51), que dice que el valor eficaz de una señal poliarmónica es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de los componentes de distinta frecuencia. En consecuencia, a las señales dadas por las Ecs. (9.8) y (9.9) les corresponden los siguientes valores eficaces:

$$V = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V^2_n} \quad (9.10)$$

$$I = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I^2_n} \quad (9.11)$$

y por definición el producto escalar de las Ecs. (9.10) y (9.11) se llama *potencia aparente*.

$$P_s = V I \quad (9.12)$$

Es decir que la Ec. (9.12) da la forma de cálculo de la *potencia aparente en régimen poliarmónico permanente*, como el producto de los valores eficaces de tensión y corriente de la señal poliarmónica. Si bien se define de manera análoga que en el régimen senoidal permanente, nótese que ahora, según lo indica la Ec. (9.12) resulta un número real. Su significado y unidad son los mismos que en régimen senoidal permanente. Nótese que la potencia desarrollada por las señales poliarmónicas *no es igual* a la suma de las potencias aparentes para cada uno de los componentes.

Por otra parte, se recuerda que *potencia activa* es el valor medio de la potencia

instantánea para un período completo de excitación, según se expresó en el Cap. 7, Ec. (7.25) que se reproduce:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (7.25)$$

que puede expresarse como:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) i(\omega t) d\omega t \quad (9.13)$$

reemplazando en la Ec. (9.13) las expresiones de tensión y corriente poliarmónicas dadas por las Ecs. (9.8) y (9.9) resulta:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Vm_n \sin(n\omega t + \theta_{v_n}) \right] \\ &\quad \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Im_n \sin(n\omega t + \theta_{i_n}) \right] d\omega t \\ P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0 I_0 d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0 \sum_{n=1}^{\infty} Im_n \sin(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} Vm_n \sin(n\omega t + \theta_{v_n}) d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Vm_n \sin(n\omega t + \theta_{v_n}) \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} Im_n \sin(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t \end{aligned} \quad (9.14)$$

En el segundo miembro de la Ec. (9.14), las integrales del segundo y tercer término son nulas según la Ec. (2.31). Las integrales del cuarto término, según la Ec. (2.33), son nulas para armónicas de distinto orden, por lo cual sólo tendrá sentido resolver las integrales que correspondan al producto de armónicas de tensión y corriente del mismo orden. En virtud de lo antedicho, operando en la Ec. (9.14) resulta:

$$\begin{aligned} P &= V_0 I_0 + \frac{1}{2\pi} Vm_1 Im_1 \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \theta_{v_1}) \sin(\omega t + \theta_{i_1}) d\omega t + \\ &+ \frac{1}{2\pi} Vm_2 Im_2 \int_0^{2\pi} \sin(2\omega t + \theta_{v_2}) \sin(2\omega t + \theta_{i_2}) d\omega t + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + \frac{1}{2\pi} Vm_n Im_n \int_0^{2\pi} \sin(n\omega t + \theta_{v_n}) \sin(n\omega t + \theta_{i_n}) d\omega t \quad (9.15)$$

Las integrales planteadas en el segundo miembro de la Ec. (9.15), resultan el producto de dos funciones senoidales y pueden simplificarse recordando que:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

que aplicada a la Ec. (9.15),

$$\begin{aligned} P = & V_0 I_0 + \frac{Vm_1 Im_1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_1} - \theta_{i_1}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + \theta_{v_1} + \theta_{i_1}) d\omega t \right] \\ & + \frac{Vm_2 Im_2}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_2} - \theta_{i_2}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + \theta_{v_2} + \theta_{i_2}) d\omega t \right] + \\ & + \dots \frac{Vm_n Im_n}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) d\omega t - \int_0^{2\pi} \cos(2n\omega t + \theta_{v_n} + \theta_{i_n}) d\omega t \right] \quad (9.16) \end{aligned}$$

dado que la integral de la función cosenoidal es nula, según la Ec. (2.30), resolviendo la Ec. (9.16) resulta:

$$\begin{aligned} P = & V_0 I_0 + \frac{Vm_1 Im_1}{2} \cos(\theta_{v_1} - \theta_{i_1}) + \frac{Vm_2 Im_2}{2} \cos(\theta_{v_2} - \theta_{i_2}) + \dots \\ & \dots + \frac{Vm_n Im_n}{2} \cos(\theta_{v_n} - \theta_{i_n}) \quad (9.17) \end{aligned}$$

$$\text{si } \theta_{v_n} - \theta_{i_n} = \varphi_n ; \quad \frac{Vm_n Im_n}{2} = \frac{Vm_n}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Im_n}{\sqrt{2}} = V_n I_n$$

puesto que estas componentes son senoidales, la Ec. (9.17) queda:

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + V_n I_n \cos \varphi_n$$

o lo que es lo mismo,

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \quad (9.18)$$

con $\varphi_0 = 0$ por ser un problema de continua.

La Ec. (9.18) da la forma de cálculo de la *potencia activa en régimen poliarmónico permanente*, y dice que la potencia activa disipada en un circuito excitado

por una señal poliarmónica es la suma de las potencias activas disipadas en el mencionado circuito por cada una de las componentes del desarrollo en Serie de Fourier de la excitación. Su significado y unidad son los mismos que en régimen senoidal permanente.

En forma análoga, se define la *potencia reactiva* como:

$$P_q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{qn} \quad (9.19)$$

donde naturalmente, la sumatoria debe partir del término 1, dado que no puede existir potencia reactiva para la componente de continua.

La Ec. (9.19) da la forma de cálculo para la *potencia reactiva en régimen poliarmónico permanente*, cuyo significado y unidad son los mismos que en régimen senoidal permanente.

Obsérvese que para el cálculo de la potencia activa como la reactiva debe existir un solo término para cada frecuencia. Si en los desarrollos de tensión o corriente eso no sucede, debe procederse a su suma previa tal como se explicó en el Cap. 2, párrafo 2.3.5.g).

Al presente, se han definido las potencias aparente, activa y reactiva, que eran las únicas existentes en el Cap. 7, y se pregunta si en realidad las mismas son todas las existentes en el régimen poliarmónico permanente. Esto puede averiguarse partiendo de las expresiones de los valores eficaces de la tensión y la corriente dadas por las Ecs. (9.10) y (9.11) que pueden escribirse:

$$V^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \quad (9.20)$$

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \quad (9.21)$$

dado que $\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n = 1$ la Ec. (9.21) puede escribirse también como:

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n \quad (9.22)$$

donde φ_n es el desfase entre las armónicas de tensión y corriente de orden n , siendo $\varphi_0 = 0$ por tratarse de continua.

Multiplicando las Ecs. (9.20) y (9.22) se obtendrá el cuadrado de la potencia aparente como se desprende de la Ec. (9.12), resultando:

$$P_s^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n \right] \quad (9.23)$$

Operando de la Ec. (9.23), la misma puede expresarse como:

$$P_s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 \sin^2 \varphi_n + \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 \quad (9.24)$$

$$\text{pero como } \sum_{n=0}^{\infty} X_n^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_n \right]^2 - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} X_j X_k$$

La Ec. (9.24) puede escribirse como:

$$P_s^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \varphi_n \right]^2 + \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 \\ - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \cos \varphi_j \cos \varphi_k - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \sin \varphi_j \sin \varphi_k]$$

La expresión anterior se modifica recordando que

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\text{y} \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

Por lo tanto

$$P_s^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \varphi_n \right]^2 + \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j^2 I_k^2 \\ - \sum_{\substack{j=0 \\ k=0 \\ j \neq k}}^{\infty} V_j I_j V_k I_k \cos (\varphi_j - \varphi_k)] \quad (9.25)$$

Nótese que si,

$$\varphi_n = 0, \text{ circuito resistivo; } \varphi_j = \varphi_k \quad \therefore \cos (\varphi_j - \varphi_k) = 1$$

$$\text{y} \quad \frac{V_n}{I_n} = \text{cte.}, \text{ circuito lineal; } \frac{V_j}{I_j} = \frac{V_k}{I_k} \quad \therefore V_j I_k = V_k I_j$$

En consecuencia, $V_j I_j V_k I_k = V_j^2 I_k^2$ y el tercer y cuarto término del segundo miembro de la Ec. (9.25) se anulan mutuamente.

En la Ec. (9.25), el primer término del segundo miembro corresponde al cuadrado de la potencia activa, y el segundo término al cuadrado de la potencia reactiva. Los términos restantes, obviamente corresponden al cuadrado de una nueva potencia que aparece en régimen poliarmónico y que no aparecía en el régimen senoidal. Se tratará de interpretar esto.

En *régimen senoidal permanente*, excitando por ejemplo a un dipolo pasivo con una tensión senoidal, la forma de señal de respuesta resultaba una corriente también senoidal, tal como se muestra en la Fig. 9.11. Los espectros de amplitud y fase que corresponden a excitación y respuesta se muestran en la misma figura, y resultan formalmente iguales.

En cambio, en *régimen poliarmónico permanente* se encuentra la situación expuesta en la Fig. 9.12. En la misma se observa, y es regla general, que las formas de señal de excitación y respuesta difieren, al igual que los espectros de amplitud y fase. Ensayando una serie de circuitos se encuentra cada vez que

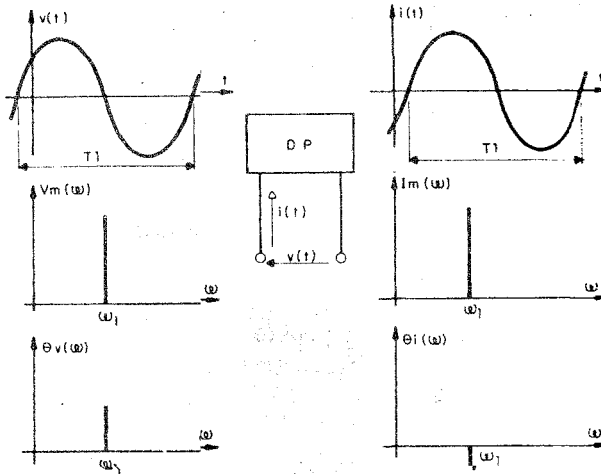


Fig. 9.11

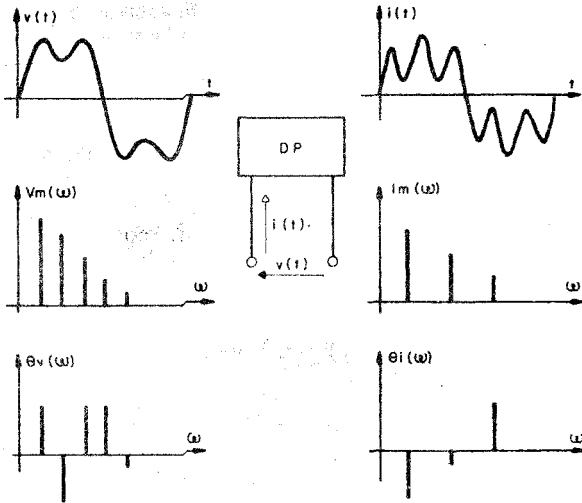


Fig. 9.12

los espectros de tensión y corriente coinciden, o lo que es lo mismo, que las formas de señal de $v(t)$ e $i(t)$ son iguales, la potencia que corresponde a los términos no identificados en la Ec. (9.25) se anula. En cambio, cuanto más difieren dichos espectros, la mencionada potencia aumenta. Esto ocurre a medida que el circuito en ensayo se comporta más reactivamente. Todo esto induce a asignarle el nombre de *potencia de deformación*, P_d . Por lo tanto podría interpretarse como *aquella potencia puesta en juego para alterar la forma de señal de res-*

puesta respecto de la excitación. En consecuencia, la Ec. (9.25) puede expresarse como:

$$P_s^2 = P^2 + P_q^2 + P_d^2 \quad (9.26)$$

Debido a la sencillez de cálculo para las potencias aparente, activa y reactiva, la potencia de deformación puede calcularse a partir de la Ec. (9.26) como:

$$P_d = \sqrt{P_s^2 - P^2 - P_q^2} \quad (9.27)$$

y su unidad es el volt-ampere de deformación, simbolizada VAd.

La aparición de esta nueva potencia, no existente en el régimen senoidal permanente, hace que el diagrama de potencias se altere respecto al conocido para dicho régimen. De la Ec. (9.26) surge que el diagrama de potencias en régimen poliarmónico permanente es el ilustrado en la Fig. 9.13.

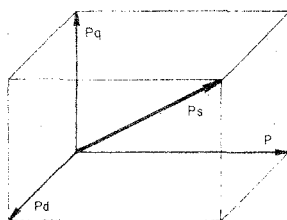


Fig. 9.13

En virtud de lo anteriormente expresado, es evidente que para que la potencia de deformación sea nula debe cumplirse que las formas de señal de excitación y respuesta no difieran entre sí, o dicho de otra manera los espectros de amplitud y fase correspondientes a cada señal sean formalmente iguales, exceptuando unidad y factor de escala. Desde el punto de vista circuital esto implica que el circuito se comporte como resistivo puro para todas las frecuencias del espectro de la excitación, o sea $P_q = 0$, y que obviamente dicho circuito sea lineal e invariante en el tiempo.

Finalmente, es posible mencionar que por analogía al régimen senoidal se define un factor de potencia en régimen poliarmónico permanente, como el cociente entre la potencia disipada o potencia activa, y la potencia total disponible o potencia aparente, resultando:

$$\cos \theta = \frac{P}{P_s} \quad (9.28)$$

En este caso, para dar una interpretación geométrica al ángulo θ es útil recurrir a la noción de senoides equivalentes de tensión y corriente. Se definen como se-

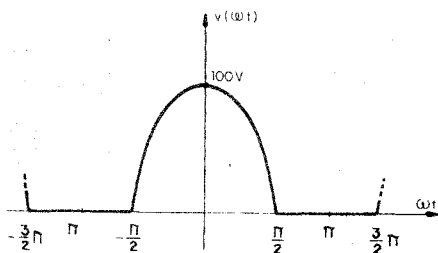
noides equivalentes de tensión y corriente a aquéllas que poseen el mismo valor eficaz que la tensión y corriente poliarmónica, y la frecuencia de la fundamental de la misma. De esta manera, θ podría interpretarse como el desfase que debe existir entre dichas senoides equivalentes para que la potencia disipada en el circuito sea igual a la disipada debido a las señales poliarmónicas.

Nótese que, en un caso general de circuitos eléctricos, no estableciendo la restricción de linealidad, el mismo puede ser resistivo pero alineal y en ese caso la potencia de deformación no es nula, por lo que P y P_s no serán iguales a pesar de ser $P_q = 0$.

9.5 Problemas resueltos

9.5.1) Un generador de tensión poliarmónico suministra una señal que se muestra en la Fig. 9.14, de pulsación $\omega_1 = 100 \frac{1}{s}$. Se pide:

- Hallar la expresión del desarrollo en Serie de Fourier de $v(t)$.
- Dibujar los espectros de frecuencia.
- Dibujar las tres primeras componentes de $v(t)$ y hallar la resultante de su suma.



Solución

- a) La tensión considerada puede expresarse como:

$$v_{(\omega t)} = \begin{cases} 0 & -\pi \leq \omega t \leq -\pi/2 \\ 100 \cos 100 t & -\pi/2 \leq \omega t \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \omega t \leq \pi \end{cases}$$

Empleando la Ec. (2.36), adecuada al presente caso resulta:

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{(\omega t)} d\omega t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 100 \cos 100 t d 100t = \frac{100}{2\pi} [\sin 100t]_{\pi/2}^{\pi/2}$$

$$V_0 = \frac{100}{\pi} = 31,83 \text{ V}$$

Los coeficientes $Bm_n = 0$ dado que la señal presenta simetría par.

Los Cm_n pueden calcularse empleando la Ec. (2.39) que adaptada al presente caso resulta:

$$C_{m_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cos n \omega t \, d \omega t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 100 \cos \omega t \cos n \omega t \, d \omega t \quad (9.29)$$

y para la componente fundamental $n = 1$ es:

$$C_{m_1} = \frac{100}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \omega t \, d \omega t \quad (9.30)$$

dado que $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$ la Ec. (9.30) resulta:

$$C_{m_1} = \frac{100}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d \omega t + \frac{100}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2 \omega t \frac{d 2 \omega t}{2}$$

$$C_{m_1} = \frac{100}{2\pi} [\omega t]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0 \quad \therefore$$

$$C_{m_1} = 50 \text{ V}$$

Para los demás términos correspondientes a $n \neq 1$ la integral planteada en la Ec. (9.29) es del tipo:

$$\int \cos x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (n+1)x}{n+1} + \frac{\sin (n-1)x}{n-1} \right]$$

y adaptando la solución al presente caso resulta:

$$C_{m_n} = \frac{100}{2\pi} \left[\frac{\sin (n+1) \omega t}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \omega t}{n-1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (9.31)$$

Reemplazando de la Ec. (9.31) valores enteros para $n > 1$ se tiene:

$$C_{m_2} = \frac{200}{3\pi} = 21,22 \text{ V}$$

$$C_{m_3} = 0$$

$$C_{m_4} = \frac{-200}{15\pi} = -4,24 \text{ V}$$

$$C_{m_5} = 0$$

$$C_{m_6} = \frac{200}{35\pi} = 1,82 \text{ V}$$

Adecuando la Ec. (2.45) resulta:

$$Vm_n = \sqrt{B^2_{m_n} + C^2_{m_n}} = |C_{m_n}| \text{ pues los } B_{m_n} = 0$$

además, empleando la Ec. (2.46),

$$\theta_n = \arctg \frac{C_{m_n}}{B_{m_n}} \text{ por lo cual, considerando que } B_{m_n} = 0 \text{ resulta:}$$

$$\theta_1 = \pi/2$$

$$\theta_2 = \pi/2$$

$$\theta_4 = -\pi/2$$

$$\theta_6 = \pi/2$$

Aplicando la Ec. (2.40) surge que la expresión del desarrollo en serie de Fourier para la tensión dada es:

$$\begin{aligned} v(t) = & 31,83 + 50 \operatorname{sen}\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) + 21,22 \operatorname{sen}\left(200t + \frac{\pi}{2}\right) \\ & + 4,24 \operatorname{sen}\left(400t - \frac{\pi}{2}\right) + 1,82 \operatorname{sen}\left(600t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V} \end{aligned}$$

Nótese que las amplitudes de las armónicas superiores a seis serán despreciables.

b) En la Fig. 9.15 se grafican los espectros de frecuencia de amplitud y fase. Obsérvese la gran convergencia existente, dado que luego de la fundamental y segunda armónica, las demás amplitudes comparativamente carecen de importancia.

c) En la Fig. 9.16 se grafica la componente de continua V_0 , la fundamental $v_1(t)$; la segunda armónica $v_2(t)$, y la resultante que se obtiene al sumarlos tres componentes mencionados. Adviértase que se logra una aproximación aceptable a la forma de señal mostrada en la Fig. 9.14, considerando que sólo se tiene en cuenta las tres primeras componentes.

El propósito de este problema ha sido el de insistir sobre lo expuesto en el Cap. 2, parágrafo 2.3.5) sobre el desarrollo de señales periódicas no senoidales en Serie de Fourier. En los problemas sucesivos, se resolverán circuitos excitados por señales poliarmónicas partiendo del supuesto que se conoce el desarrollo en serie de dicha señal.

9.5.2) Para el circuito ilustrado en la Fig. 9.17, excitado por un generador de tensión poliarmónica expresada como:

$$v(t) = 100 + 141 \operatorname{sen}(1000t) + 70,7 \operatorname{sen} 2000t \text{ V}$$

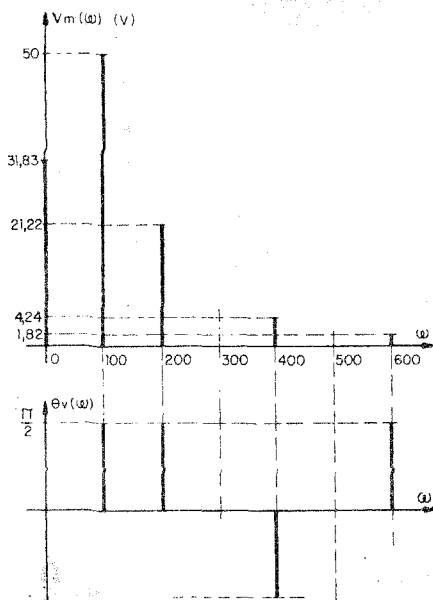


Fig. 9.15

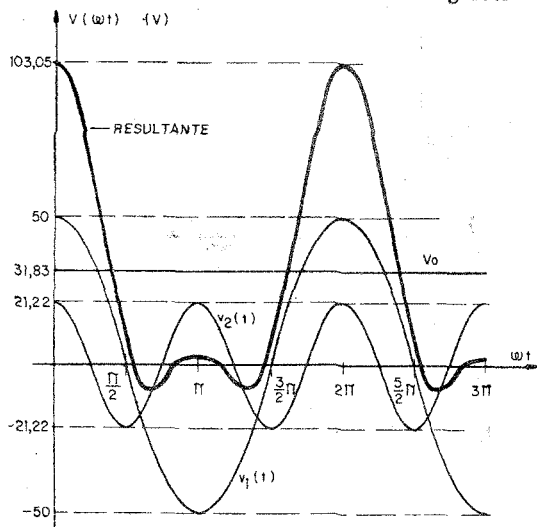


Fig. 9.16

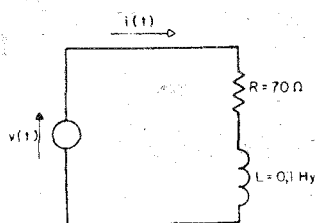


Fig. 9.17

se pide:

- La expresión de la corriente instantánea.
- Graficar los espectros de frecuencia de amplitud y fase de la tensión y la co-

riente.

c) Los valores de las potencias aparente, activa, reactiva y de deformación, justificando los resultados en base al análisis de los espectros.

Solución:

$$a) \omega = 0 \frac{1}{s}$$

Para la componente continua de la excitación poliarmónica $V_0 = 100$ V, el inductor se comportará como un cortocircuito dado que se trabaja en régimen permanente, y la corriente estará limitada solamente por el resistor. Esto puede verificarse realizando los cálculos, a saber:

$$\bar{Z}_0 = R + j \omega_0 L = (70 + j 0 \cdot 0,1) = 70 \Omega \therefore$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{70} = 1,43 \text{ A} \quad (9.32)$$

$$\omega = 1000 \frac{1}{s}$$

$$\bar{Z}_1 = R + j \omega_1 L = 70 + j 1000 \cdot 0,1 = (70 + j 100) \Omega$$

$$\bar{Z}_1 = 122 e^{j 55^\circ} \Omega$$

Trabajando con los valores máximos,

$$\bar{I}_{1m} = \frac{\bar{V}_{1m}}{\bar{Z}_1} = \frac{141 e^{j 0^\circ}}{122 e^{j 55^\circ}} = 1,15 e^{-j 55^\circ} \text{ A} \therefore$$

$$i_1(t) = J_m [\dot{I}_{1m}] = 1,15 \sin(1000 t - 55^\circ) \text{ A} \quad (9.33)$$

$$\omega = 2000 \frac{1}{s}$$

$$\bar{Z}_2 = R + j \omega_2 L = 70 + j 2000 \cdot 0,1 = (70 + j 200) \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 212 e^{j 70,7^\circ} \Omega$$

$$\bar{I}_{2m} = \frac{\bar{V}_{2m}}{\bar{Z}_2} = \frac{70,7 e^{j 0^\circ}}{212 e^{j 70,7^\circ}} = 0,33 e^{-j 70,7^\circ} \text{ A} \therefore$$

$$i_2(t) = J_m [\dot{I}_{2m}] = 0,33 \sin(2000 t - 70,7^\circ) \text{ A} \quad (9.34)$$

De la suma de las Ecs. (9.32); (9.33) y (9.34) resulta:

$$i(t) = 1,43 + 1,15 \sin(1000 t - 55^\circ) + 0,33 \sin(2000 t - 70,7^\circ) \text{ A}$$

b) Los espectros pedidos se muestran en la Fig. 9.18.

c) Previo a la determinación de las potencias, deben calcularse los valores eficaces de tensión y corriente de la poliarmónica, según se expuso en el Cap. 2, párrafo 2.3.5) y que en este capítulo se sintetizaron en las Ecs. (9.10) y (9.11) que se reproducen, reemplazando valores extraídos de $v(t)$ e $i(t)$.

$$V^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 = 100^2 + \left(\frac{141}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{70,7}{\sqrt{2}}\right)^2 = 22.439,7 \therefore$$

$$V = 149,8 \text{ V}$$

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 = 1,43^2 + \left(\frac{1,15}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,33}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2,76 \therefore$$

$$I = 1,66 \text{ A}$$

y la potencia aparente, según la Ec. (9.12) resulta:

$$P_s = VI = 149,8 \cdot 1,66 = 248,7 \text{ VA}$$

La potencia activa según la Ec. (9.18) que adaptada al presente caso resulta, considerando que $\varphi_n = \theta_{v_n} - \theta_{i_n}$,

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

$$P = 100 \cdot 1,43 + \frac{141}{\sqrt{2}} \frac{1,15}{\sqrt{2}} \cos 55^\circ + \frac{70,7}{\sqrt{2}} \frac{0,33}{\sqrt{2}} \cos 70,7^\circ$$

$$P = 193,37 \text{ W}$$

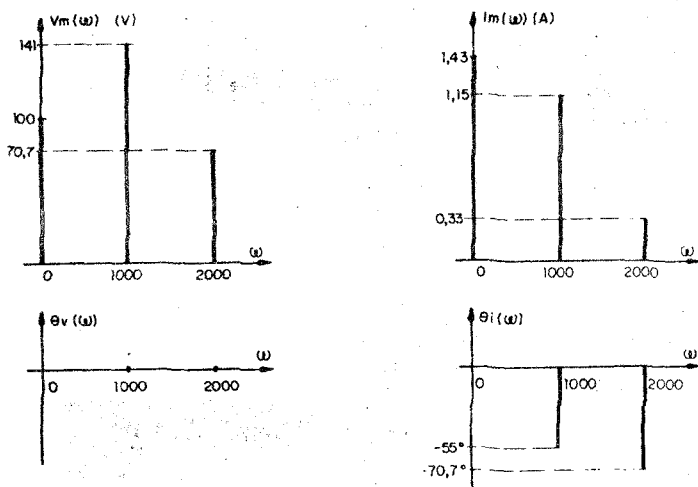


Fig. 9.18

La potencia reactiva se calcula adecuando la Ec. (9.12), resultando:

$$P_q = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2$$

$$P_q = \frac{141}{\sqrt{2}} \frac{1,15}{\sqrt{2}} \sin 55^\circ + \frac{70,7}{\sqrt{2}} \frac{0,33}{\sqrt{2}} \sin 70,7^\circ$$

$$P_q = 77,40 \text{ VAr}$$

y empleando la Ec. (9.27) puede calcularse la potencia de deformación:

$$P_d = \sqrt{P_s^2 - P^2 - P_q^2} = \sqrt{(248,7)^2 - (193,37)^2 - (77,40)^2}$$

$$P_d = 136 \text{ V A d}$$

De la Fig. 9.18 se observa que los espectros de excitación y respuesta *no son formalmente iguales*, en consecuencia es lógico que exista potencia de deformación. Por otra parte, esto también puede deducirse observando que la impedancia del circuito para las componentes senoidales presenta parte reactiva.

9.5.3.) Dado el circuito mostrado en la Fig. 9.19, excitado por un generador de tensión poliarmónica de valor:

$$v(t) = 100 + 141 \text{ sen } 1000 t \text{ V}$$

se pide,

- Determinar los valores de C y R para que resulte que la potencia activa sea $P = 10 \text{ W}$ y la reactiva $P_q = 5 \text{ VAr}$.
- Justificar si existe potencia de deformación.

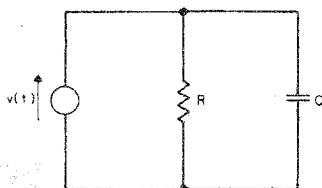


Fig. 9.19

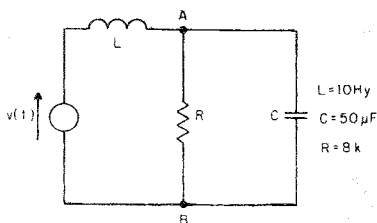


Fig. 9.20

Solución

a) Dado que potencia reactiva existirá solamente para la componente senoidal, y puesto que ambos elementos pasivos están conectados en paralelo con el generador, se puede expresar:

$$P_q = V_1^2 B_c = V_1^2 \omega C \quad \therefore$$

$$C = \frac{P_q}{V_1^2 \omega_1} = \frac{5}{10^4 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

Por otra parte, para la conexión dada, sólo se disipará potencia activa en el resistor, por lo tanto

$$P = \frac{V_0^2}{R} + \frac{V_1^2}{R} = \frac{1}{R} (V_0^2 + V_1^2) \quad \therefore$$

$$R = \frac{V_0^2 + V_1^2}{P} = \frac{100^2 + 100^2}{10} = 2000 \, \Omega$$

b) Existirá potencia de deformación puesto que el circuito es reactivo a la frecuencia de la armónica presente en la excitación.

9.5.4) Para el circuito ilustrado de la Fig. 9.20 excitado por un generador de tensión poliarmónica expresada como:

$$v(t) = \frac{200}{\pi} + \frac{400}{3\pi} \sin(628t + \frac{\pi}{2}) \, \text{V}$$

se pide,

a) hallar la expresión de $v_{AB}(t)$

b) calcular la relación entre las componentes alterna y continua para la excitación y la respuesta.

Solución:

a) $\omega = 0$

Para la componente de continua, en régimen permanente el inductor se comporta como un cortocircuito y el capacitor como un circuito abierto, en consecuencia la tensión continua provista por el generador quedará aplicada al resistor, por lo cual:

$$V_{AB0} = \frac{200}{\pi} \, \text{V} \quad (9.35)$$

$$\omega_1 = 628 \, \frac{1}{s}$$

$$\bar{Y}_{pAB} = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{8 \cdot 10^3} + j628 \cdot 50 \cdot 10^{-6}$$

$$\bar{Y}_{pAB} = (0,125 \cdot 10^{-3} + j31,4 \cdot 10^{-3}) \, \text{S}$$

$$\bar{Z}_{pAB} = \frac{1}{\bar{Y}_{pAB}} = (0,126 - j31,84) = 31,84 e^{-j89,8^\circ} \, \Omega$$

La impedancia total resulta:

$$\bar{Z}_1 = j\omega_1 L + \bar{Z}_{pAB} = j628 \cdot 10 + 0,126 - j31,84$$

$$\bar{Z}_1 = (0,126 + j6248,2) \, \Omega = 6248,2 e^{j90^\circ} \, \Omega$$

y la corriente total,

$$\bar{I}_{1m} = \frac{\bar{V}_{1m}}{\bar{Z}_1} = \frac{\frac{400}{3\pi} e^{j\pi/2}}{6248,2 e^{j\pi/2}} = 6,8 \cdot 10^{-3} \, \text{A}$$

por lo cual:

$$\bar{V}_{AB_1m} = \bar{I}_{1m} \bar{Z}_{pAB} = 6,8 \cdot 10^{-3} \cdot 31,84 e^{-j 89,8^\circ}$$

$$\bar{V}_{AB_1m} = 0,22 e^{-j 89,8^\circ} \text{ V}$$

y el valor instantáneo resulta:

$$v_{AB_1(t)} = \text{Im} [V_{AB_1m}] = 0,22 \sin (628 t - 89,8^\circ) \text{ V} \quad (9.36)$$

finalmente, la expresión de $v_{AB(t)}$ se halla sumando las Ecs. (9.35) y (9.36),

$$v_{AB(t)} = \frac{200}{\pi} + 0,22 \sin (628 t - 89,8^\circ) \text{ V}$$

b) Para la excitación es:

$$\frac{V_{1m}}{V_0} = \frac{\frac{400}{3\pi}}{\frac{200}{\pi}} = 0,67$$

y para la respuesta resulta:

$$\frac{V_{AB_1m}}{V_{AB_0}} = \frac{0,22}{\frac{200}{\pi}} = 0,003$$

Nótese que el circuito actúa como un filtro pasabajos, permitiendo el paso de la componente continua íntegra y atenuando la componente senoidal. Por esa causa este tipo de circuito es utilizado en las fuentes de alimentación de equipos que requieren tensiones continuas para su funcionamiento.

9.5.5) Dado el circuito indicado en la Fig. 9.21, excitado por un generador de corriente poliarmónica expresada como:

$$i(t) = 100 \sin (100 t + \frac{\pi}{2}) + 50 \sin (300 t - \frac{\pi}{2}) - 20 \sin 500 t \text{ A}$$

y sabiendo que la tensión eficaz entre los extremos del inductor es $V_L = 100 \text{ V}$ se pide determinar el valor del mismo.

Solución:

A efectos de llevar la expresión del desarrollo en serie de la corriente a su forma convencional, se trasfiere el signo negativo de la tercer componente al ángulo de fase, resultando:

$$i(t) = 100 \sin (100 t + \frac{\pi}{2}) + 50 \sin (300 t + \frac{\pi}{2}) + 20 \sin (500 t - \pi) \text{ A}$$

se notará que el paso anterior no es inevitable para la resolución de este problema.

Dado las características del circuito, la tensión instantánea sobre el inductor puede hallarse como:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \left[10^4 \cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) + 1,5 \cdot 10^4 \cos\left(300t + \frac{\pi}{2}\right) + 10^4 \cos(500t - \pi) \right]$$

y la tensión eficaz:

$$V_L = 100 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V_{Ln}^2} = \sqrt{L^2 \left[\left(\frac{10^4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1,5 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10^4}{\sqrt{2}}\right)^2 \right]}$$

$$100 = L \cdot 1,45 \cdot 10^4 \therefore$$

$$L = 6,9 \text{ mH}$$

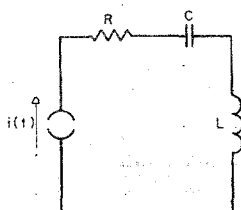


Fig. 9.21

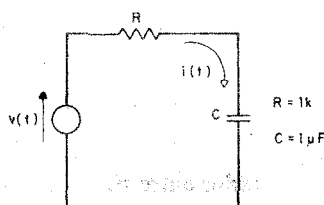


Fig. 9.22

9.6 Problemas propuestos

9.6.1) Considérese el circuito mostrado en la Fig. 9.22, excitado por un generador de tensión poliarmónica expresada como:

$$v(t) = 200 - 100 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) + 50 \sin\left(2000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Para el mismo se desea calcular:

- La expresión de la corriente instantánea.
- Los valores eficaces de tensión y corriente.
- Las potencias aparente, activa, reactiva y de deformación.

Resultados:

Recuérdese transferir el signo negativo del coeficiente de la segunda componente al ángulo de fase.

$$i(t) = 70,7 \cdot 10^{-3} \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) + 44,7 \cdot 10^{-3} \sin\left(200t - 0,35\pi\right) \text{ A}$$

$$b) V = 215 \text{ V}$$

$$I = 0,059 \text{ A}$$

$$c) P_s = 12,68 \text{ V A}$$

$$P = 3,47 \text{ W}$$

$$P_q = -2,98 \text{ VAr}$$

$$P_d = 11,82 \text{ V Ad}$$

9.6.2) Mediante el análisis armónico de la tensión aplicada a un dipolo pasivo y la corriente que por él circula, se obtienen las siguientes expresiones:

$$v(t) = 100 + 50 \sin(1000t + \frac{\pi}{2}) + 20 \sin(2000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 + 5 \sin(1000t + \frac{\pi}{2}) + 2 \sin(2000t + \frac{\pi}{4}) \text{ A}$$

deseándose determinar:

- Si el dipolo es resistivo puro.
- En caso afirmativo, si está constituido por elementos lineales.
- Los valores eficaces de tensión y corriente.
- Las potencias aparente, activa, reactiva y de deformación.
- Graficar los espectros de frecuencia de amplitud y fase para la tensión y corriente y compararlos entre sí.

Resultados

a) Lo es, o bien se comporta como resistivo puro para todas las frecuencias, pues mantiene los ángulos de fase constantes.

b) El hecho de que no aparezcan en la corriente otras componentes de frecuencia distintas a las existentes en la tensión, y que para todas las amplitudes se cumpla que $\frac{V_{m_n}}{I_{m_n}} = \text{cte}$, en este caso igual a 10, dice que el dipolo es lineal.

Nótese que este razonamiento sólo tiene sentido cuando el circuito es resistivo puro.

$$c) V = 107 \text{ V}$$

$$I = 10,7 \text{ A}$$

$$d) P_s = 1.144,9 \text{ V A}$$

$$P = 1.144,9 \text{ W}$$

$$P_q = 0 \text{ VAr}$$

$$P_d = 0 \text{ VAd}$$

Resultados previsibles, dado que siendo el circuito lineal y resistivo puro no puede existir la potencia reactiva y en consecuencia tampoco la de deformación.

e) En la Fig. 9.23 se grafican los espectros pedidos. Se observa que son formalmente iguales, como debe ser para el dipolo en análisis.

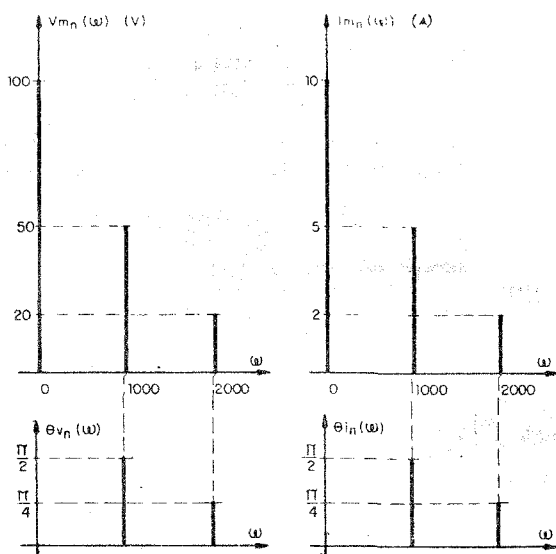


Fig. 9.23

9.6.3) Para el circuito ilustrado en la Fig. 9.24 excitado por los generadores de corriente poliarmónicos a saber:

$$i_1(t) = 100 \operatorname{sen}(1000t) + 50 \operatorname{sen}(2000t) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 100 \operatorname{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) + 50 \operatorname{sen}(3000t) \text{ A}$$

se pide calcular:

- La corriente instantánea total y su valor eficaz.
- La tensión instantánea total y su valor eficaz.

Resultados:

$$a) i(t) = 141 \operatorname{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) + 50 \operatorname{sen} 2000t + 50 \operatorname{sen} 3000t \text{ A}$$

$$I = 111,54 \text{ A}$$

$$b) v(t) = 2 \cdot 10^5 \operatorname{sen} 1000t + 56 \cdot 10^3 \operatorname{sen}(2000t - 26,6^\circ) + 52,7 \cdot 10^3 \operatorname{sen}(3000t - 18,4^\circ) \text{ V}$$

$$V = 15,15 \cdot 10^4 \text{ V}$$

9.6.4) Dado el circuito mostrado en la Fig. 9.25, excitado por un generador de tensión poliarmónica,

$$v(t) = 100 + 100 \sin 1000 t + 50 \sin 2000 t \text{ V}$$

y sabiendo que el mencionado circuito presenta a cualquier frecuencia una impedancia $Z = (1000 + j0) \Omega$ se desea determinar:

- La corriente instantánea total
- Los valores eficaces de la tensión y la corriente totales
- Los valores de las potencias aparente, activa, reactiva y de deformación justificando conceptualmente los resultados.

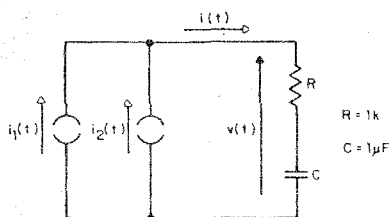


Fig. 9.24

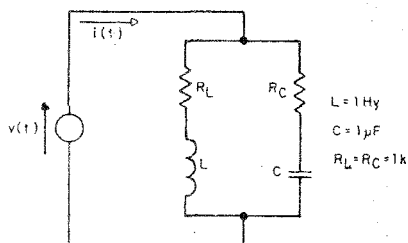


Fig. 9.25

Resultados

a) $i(t) = 0,1 + 0,1 \sin 1000 t + 0,05 \sin 2000 t \text{ A}$

b) $V = 127,5 \text{ V}$
 $I = 127,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

c) $P_s = 16,26 \text{ VA}$

$P = 16,26 \text{ W}$

$P_q = 0 \text{ VAR}$

$P_d = 0 \text{ VAd}$

Puesto que el circuito es resonante a todas la frecuencias, se comporta como resistivo puro y como además es lineal, serán nulas las potencias reactivas y de deformación, y coincidirán los valores de las potencias aparente y activa.

Este circuito especial ya fue tratado en el Cap. 8, parágrafo 8.9.4, y que se estudiará en detalle en el Cap. 12.

Bibliografía

I) MATEMATICA

- Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, C.A. - **Análisis Matemático** - Volúmenes I, 1952; II, 1957 - III 1959; Kapelus, Buenos Aires.
- Sokolnikoff, I.S.; Sokolnikoff, E.S. - **Matemática Superior para Ingenieros y Físicos**. - Librería y Editorial Nigar S.R.L., Buenos Aires 1956.
- Kaplan, W. - **Cálculo Avanzado** - Ceca, México 1964.
- Pipes, L.A. - **Applied Mathematics for Engineers and Physicists** - Mc Graw-Hill Book Co., New York 1958.
- Moretti, G. - **Métodos Matemáticos de la Física**, Tomo I - Imprenta y Casa Editora Coni, Buenos Aires 1959.
- Sadosky, M. - **Cálculo Numérico y Gráfico** - Ediciones Librería del Colegio - Buenos Aires 1952.
- Lewis, W.E.; Price, D.G. - **The Application of Matrix Theory to Electrical Engineering**. - Chapman and Hall Ltd. - London 1965.
- Kurosch, A.G. - **Curso de Algebra Superior** - Editorial Mir - Moscú 1975.
- Phillips, H.B. - **Ecuaciones Diferenciales** - Uteha - México 1945.
- Hartman, P. - **Ordinary Differential Equations** - John Wiley and Sons - New York 1964.
- Phillips, E.G. - **Funciones de una Variable Compleja y sus Aplicaciones** - Editorial Dossat S.A. - Madrid 1958.
- Churchill, R.V. - **Introduction to Complex Variables and Applications** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1948.
- Le Page, W.R. - **Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers** - Mc Graw-Hill Book Co - New York 1961.
- Churchill, R.V. - **Operational Mathematics** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1958.
- Spiegel, M.R. - **Theory and Problems of Laplace Transforms** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1965.
- Schwartz, L. - **Theorie des Distributions**, Tome I 1950, Tome II 1951 - Hermann, París.
- Schwartz, L. - **Theorie Elementaire des Distributions** - Les Cours de Sorbonne París 1955.
- Schwartz, L. - **Convolution** - Les Cours de Sorbonne - París 1955.
- Schwartz, L. - **Series de Fourier** - Les Cours de Sorbonne - París 1955.
- Schwartz, L. - **Transformations de Laplace** - Les Cours de Sorbonne - París 1955.
- Sanford, R.S. - **Physical Networks** Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- Balabanian, N. - **Fundamentals of Circuit Theory** - Allyn and Bacon, Inc. Boston 1961.
- Cassell, W.L. - **Linear Electric Circuits**. - John Wiley & Sons, Inc. New York 1964.
- Chan, Shu-Park - **Introductory Topological Analysis of Electrical Networks** - Holt, Rinehart & Winston, Inc. - New York - 1969.
- Truxal, D.F. (Jr.) - **Electric Networks, Analysis and Synthesis** - Mc Graw-Hill, Book Co. New York 1965.
- Aseltine, J.A. - **Transform Method in Linear System Analysis** - Mc Graw-Hill Co. Inc. New York 1958.
- Cooper, G.R. & Mc Gillem, C.D. - **Methods of Signal and System Analysis** - Holt, Rinehart & Winston, New York 1965.
- Cheng, D.K. - **Analysis of Linear Systems** - Addison-Wesley Publishing Co. Inc. Reading Massachusetts 1959.

- Kim W.H. and Chien, R.T.W. - **Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks**, Columbia University Press, New York 1962.
- Desoer, C.A. and Kuh, E.S. - **Basic Circuit Theory**. Mc Graw-Hill Co. New York 1966.
- Cauer, W. - **Synthesis of Communications Networks** - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1958.
- Seshu, S. and Balabanian, N. - **Linear Network Analysis** - John Wiley Sons, New York 1959.
- Van Valkenburg. - **Introduction to Modern Network Synthesis** - John Wiley & Sons - New York 1960.
- Weinberg, L. - **Network Analysis and Synthesis** Valkenburg Mc Graw - Hill Book Co. New York 1962.
- Guillemin, E.A. - **Communication Networks** - Vol I 1931, Vol. II 1935 - John Wiley and Sons, New York.
- Guillemin, E.A. - **Theory of Linear Physical Systems** - John Wiley and Sons, New York 1963.
- Cruft Electronic Staff - **Electronic Circuits and Tubes** - Mc Graw-Hill Book Co., Inc. New York 1947.
- Langford-Smith, F. - **Radiotron Designer's Handbook** - RCA 1953.
- Littauer, R. - **Pulse Electronics** - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1965.
- Millman, J. & Halkias C.C. - **Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems** - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1972.
- Landee, R.W., Davis D.C. and Albrecht, A.P. - **Electronic Designer's Handbook** - Mc Graw-Hill Co., New York 1957.
- Tropper - **Theorie des Circuits Electriques** Dunod, Paris 1956.
- Gille, Decaulne Et Pelegrin - **Méthodes Modernes D'Etudes Des Systèmes Asservis** - Dunod Paris 1960.
- Basseras, G. - **Exercices & Problèmes de Radioelectricité al Usage del Ingenieur**- Eyrolles, Paris 1962.
- Le Corbeiller, P. **Analyse Matricielle des Reseaux Electriques** - Dunod - Paris 1954.

II) TEORIA DE CIRCUITOS Y SU APLICACION EN ELECTRONICA .

- Van Valkenburg, M.E. - **Análisis de Redes** - Limusa - México 1977.
- Balabanian, N.; Bickart, T.A.; Seshu, S. - **Teoría de Redes Eléctricas** - Reverte S.A. - Barcelona 1972.
- Lagasse, J. - **Estudio de los Circuitos Eléctricos**. Tomo I 1963, Tomo II 1964 - Paraninfo, Madrid.
- Skilling, H. H. - **Circuitos en Ingeniería Eléctrica**. - Cecsa, México 1959.
- Skilling, H. H. - **Redes Eléctricas** - Limusa, México 1977.
- Miembros del Personal de Massachusetts - Institute of Tecnology - **Circuitos Eléctricos** - Cecsa, México 1959.
- Guillemin E.A. - **Introducción a la Teoría de los circuitos** - Reverté S.A. - Barcelona 1959.
- Brenner, E. y Javid, M. - **Análisis de Circuitos Eléctricos** - Mc Graw-Hill Book Company, Inc. - Ediciones Del Castillo S.A. - New York - Madrid 1966.
- Tuttle, D.F. (Jr.) - **Redes Eléctricas** - Editorial Dossat S.A. - Madrid 1964.
- Masson, S.J. y Zimmermann H.J. - **Circuitos Señales y Sistemas Electrónicos** - Cecsa, México 1962.
- Kaufmann, A., Grabowsky, B. y Thouzery, J. - **Análisis de las Redes Eléctricas** - Paraninfo, Madrid 1967.
- Zeveke, G.V. - Ionkin, P.A. - **Principios de Electrotécnia** - Tomo I 1958 Cartago - Buenos Aires.
- Netushil, A.V. - Strajov, S.V. - **Principios de Electrotécnia** - Tomo II 1959 - Cartago Buenos Aires.

- Everitt, W.L. - Anner, G.E. - Ingeniería de Comunicaciones - Arbó, Buenos Aires 1961.
- Kuo, B.C. - **Sistemas Automáticos de Control** - Cccsa - Barcelona 1970.
- Schwartz, M. - **Transmisión de la Información, Modulación y Ruido**. 2º Edición - H.A.S.A. Buenos Aires 1973.
- Gray, T.S. - **Electrónica Aplicada** - Reverte, Barcelona 1955.
- Terman F.E. - **Ingeniería Electrónica y de Radio** - Arbó 1952.
- Di Marco, A. - **Electrónica**, El Ateneo, Buenos Aires 1962.
- Angelo, E.J. (Jr.) - **Circuitos Electrónicos** - Mc Graw-Hill Book Inc. - Ediciones Del Castillo S.A. - New York - Madrid 1966.
- Alley, Ch. L. y Atwood, K.W. - **Ingeniería Electrónica**. - Limusa-Wiley S.A. - México 1968.
- Gray P.E. - Searle, C.L. - **Principios de Electrónica** - Reverté, Barcelona 1973.
- Schilling, D.L., Belove, C. - **Circuitos Electrónicos, Discretos e Integrados**.
- Kuo, F.F. - **Network Analysis and Synthesis** - John Wiley and Sons, Inc. - New York 1962.
- Josephs, H.J. - **Heavyside's Electric Circuit Theory** - Methuen and Co. Ltd. - London 1946.
- Angelo, E.J. (Jr.) - Papoulis, S.A. - **Pole-zero Patterns** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1964.
- Ryder, J.D. - **Introduction to Circuit Analysis** - Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.N. 1973.
- Cohen A.R. - **Linear Circuits and Systems** - Part I 1965, Regents Publishing Co. Inc. New York 1965.
- Edminister J.A. - **Electric Circuits** - Schaum Publishing Col New York 1965.
- Reza, F.M. and Seely, S. - **Modern Network Analysis** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1959.
- Lepage W.R. and Seely S. - **General Network Analysis** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1952.
- Bode, H.W. - **Network Analysis and Feedback Amplifier Design** - Van Nostrand Book Co. Princeton, N.J. 1945.

Este libro se terminó de imprimir en los
talleres de Nueva Librería S.R.L., Balcarce 873
(1064) Buenos Aires, Argentina, Tel.: 362-9266,
en el mes de julio de 1993.

LOS AUTORES:

CARLOS MARCO

Ingeniero en Electrónica.

Profesor Asociado interino de "Teoría de los Circuitos I" en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

Es Director del Departamento de Electrónica de la Escuela Técnica ORT de Buenos Aires.

Inicio su actividad docente en el año 1962, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica en 1969, en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

A partir de 1970 comienza su actividad docente universitaria como ayudante de trabajos prácticos en las cátedras de Electrónica General y Electrónica Aplicada (Ingeniería Eléctrica) dependientes del Departamento de Electrónica de la F.R.B.A. - U.T.N.

En 1971 Ayudante de Trabajos Prácticos en las Cátedras de "Teoría de los Circuitos I"; en 1972 Jefe de Trabajos Prácticos a cargo del dictado de dicha materia; siendo designado Profesor Adjunto Interino a partir de 1973; y Profesor Asociado Interino Desde 1984.

Desde 1981 se desempeña como Secretario Técnico del Departamento de Electrónica de la FIBA U.T.N.

Ha publicado diversas guías de trabajos prácticos, participado en Congresos de Ingeniería y Seminarios de perfeccionamiento docente.

Los datos curriculares del Prof. Héctor O. Pueyo se reproducen en la solapa de la tapa.

Nº 1
Sig
Nº 1