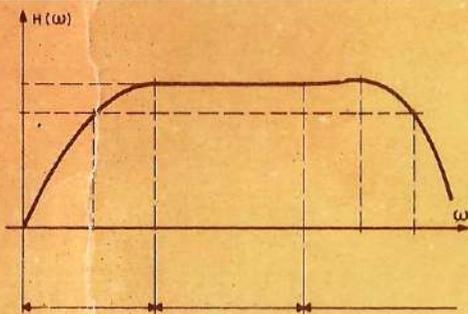
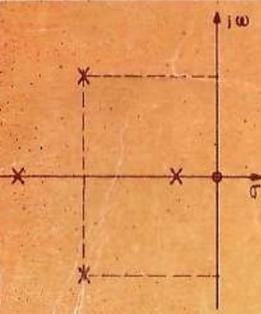
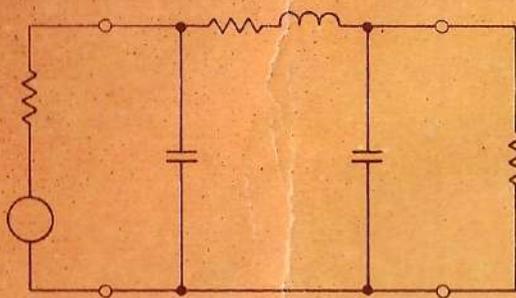


HECTOR O. / CARLOS
PUEYO / MARCO

ANALISIS DE MODELOS CIRCUITALES

TOMO 2



LOS AUTORES:

HECTOR OSVALDO PUEYO

Profesor ordinario asociado de "Teoría de los Circuitos I" en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

Profesor titular interino y Director de la cátedra de "Medidas Electrónicas II" en la F.R.B.A. - U.T.N.

Es Director de Planeamiento y Asistencia Técnica de ORT Argentina. Inició su actividad docente universitaria en 1956, como ayudante de los Doctores Charola y Cicchini, y los ingenieros Poli, Poncet y Dufour, en la F.R.B.A. - U.T.N.

Fue fundador del laboratorio de Electrónica de la F.R.B.A. - U.T.N., estando a cargo de la jefatura del mismo hasta 1970, en que fue designado profesor adjunto con dedicación exclusiva.

Ha tenido a su cargo seminario de formación de docentes en el área de Teoría de Circuitos en la F.R.B.A. - U.T.N.

Ha presentado trabajos en diversos Congresos de Ingeniería y formado parte de la Comisión Organizadora y el Comité Ejecutivo de las Primeras Jornadas Latinoamericanas y Quintas Argentinas de Ingeniería realizadas en Mar del Plata en 1972.

Los datos curriculares del Prof. Héctor O. Pueyo se reproducen en la solapa de la tapa.

**ANALISIS DE
MODELOS CIRCUITALES
TOMO 2**

ANALISIS DE MODELOS CIRCUITALES

TOMO 2

Prof. Héctor O. Pueyo

Profesor de
"Teoría de los Circuitos I",
Director del Depto. de Electrónica y
Vicedecano Normalizador de la
Fac. Reg. Bs. As. de la
Universidad Tecnológica Nacional.
Director de Planeamiento y
Asistencia Técnica de ORT Argentina

Ing. Carlos Marco

Profesor de
"Teoría de los Circuitos I"
y Secretario Técnico del Depto.
de Electrónica de la Fac. Reg. Bs. As.
de la Universidad Tecnológica Nacional.
Director del Depto. de Electrónica de la
Escuela Técnica ORT, Bs. As.



Arbó
ARBÓ S. A. C. e. I.

1ª edición
1ª reimpresión, año 1987
2ª reimpresión, año 1992
3ª reimpresión, año 1993
Copyright Arbó S.A.C. e I., 1982

*Queda prohibida la reproducción
total o parcial sin expresa autorización
de los editores.*

Queda hecho el depósito
que marca la ley 11.723

I.S.B.N. 950-0022-00-1 Obra Completa

I.S.B.N. 950-0022-02-8 Tomo II

I.S.B.N. 950-9022-8 Tomo II

PRINTED IN ARGENTINE

LIBRO DE EDICION ARGENTINA

Prólogo

En el presente libro, sus autores tratan los fundamentos básicos del análisis de circuitos partiendo de conceptos físicos sencillos, de forma tal, que no es necesario que el lector posea conocimientos previos sobre el tema, sino solamente los de física y matemática corriente en los primeros años de estudio de ingeniería.

Los temas están bien tratados, desarrollados y ejemplificados con problemas de aplicación bien elegidos, resultando por lo tanto de fácil comprensión al lector, permitiéndole así manejar con soltura el análisis básico de los circuitos. La obra sirve adecuadamente como texto para un primer curso de Teoría de Circuitos y capacita al estudiante para encarar el estudio de un curso avanzado de circuitos.

Uno de los propósitos de este libro es el empleo de los métodos de ataque modernos, desde el punto de vista matemático, para el tratamiento de los problemas que plantea el análisis de circuitos. Con ello se pretende lograr una preparación adecuada del estudiante en el tema.

El enfoque que se da a las funciones de transferencia en régimen sinusoidal y su representación por medio de diagramas de Bode es acertado, pues su aplicación ya es corriente en el estudio de los circuitos electrónicos. Asimismo, la introducción de los conceptos de polos y ceros de las funciones circuitales, como así también el de frecuencia compleja en la respuesta de los circuitos, conduce a una comprensión más general y amplia del comportamiento de los mismos.

Resulta interesante la introducción de los conceptos fundamentales de la teoría de los cuádrupolos lineales, en un primer curso de circuitos, pues así el lector sacará más provecho de su aplicación en estudios posteriores.

El libro se adapta perfectamente a los programas de los Cursos de Teoría de Circuitos de la carrera Ingeniería Electrónica que se dicta en la Universidad Tecnológica Nacional.

Ing. Juan Manuel Barcala

Prefacio

Esta obra está destinada a quienes desean adquirir una sólida formación básica en análisis de circuitos eléctricos, con el fin de encarar estudios posteriores de Ingeniería Electrónica o Eléctrica.

El desarrollo del libro está planificado para su utilización en un primer curso de Teoría de los Circuitos. Es por ello que resulta admisible un conocimiento prácticamente nulo del análisis de circuitos.

Solo se requieren los conocimientos de Física y Matemáticas incluidos en los ciclos básicos de las carreras de Ingeniería. Los problemas se estudian de lo particular a lo general, pero partiendo siempre de conceptualizaciones en las que se definen claramente las limitaciones de cada método.

Esto es, se ha buscado compatibilizar el rigor matemático con el análisis conceptual y el desarrollo didáctico.

El contenido de esta obra, ha sido ensayado y perfeccionado durante más de 20 años en los cursos de Teoría de los Circuitos de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional. Es por ello que los autores quedan reconocidos a los docentes y alumnos de dicha cátedra, con quienes analizaron y discutieron dicho material, permitiendo su sucesivo mejoramiento.

Se ha tratado de presentar todos los temas con una introducción conceptual, para luego desarrollar métodos generales de análisis que puedan ser aplicados por los que recién se inician en el tema, sin las dudas e inseguridades propias de un conocimiento parcial. Los ejemplos elegidos corresponden, en lo posible a casos prácticos de frecuente aplicación.

En síntesis, se ha buscado lograr que al concluir el estudio de este libro se posea:

- a) Un sólido conocimiento de los conceptos asociados a cada variable, parámetro o factor.
- b) Una segura aplicación de los métodos de resolución de circuitos como herramienta operativa.
- c) Una formación metodológica adecuada para el trabajo en Ingeniería Electrónica y Eléctrica.
- d) El conocimiento del comportamiento y las principales propiedades de los circuitos de uso más frecuente en la práctica.

Por otra parte, se ha buscado la autoconsistencia de este texto, efectuando revisiones o introducciones de los temas de análisis matemático necesarios, inmediatamente antes de su aplicación. Se han incluido también prácticamente todas las demostraciones inherentes a los temas de la Teoría de los Circuitos abarcados. De este modo, el material presentado resulta particularmente apto para estudiantes universitarios que dispongan de poco tiempo o medios para recopilar el material adicional de referencia, así como para autodidactas o docentes que tengan a su cargo cursos similares.

La división de la obra en dos tomos ha de facilitar la consulta de la misma. El primer tomo abarca los capítulos 1 a 9; el segundo, los enumerados del 10 al 17.

Cada capítulo comienza con una introducción donde se plantean los objetivos del mismo y se comentan los principales temas a tratar. Luego se desarrollan dichos temas y se introducen ejemplos aclaratorios. Finalmente se incluyen algunos problemas resueltos y se proponen otros con sus resultados.

Los primeros cinco capítulos se desarrollan en el dominio del tiempo, donde los problemas conducen al empleo de ecuaciones diferenciales que se resuelven por métodos clásicos. Se considera que el estudio de estos capítulos, da seguridad al lector, por tratarse de un campo más cercano a sus experiencias y conocimientos intuitivos. Una vez afirmados los conceptos básicos se introducen en los capítulos 6 y 7 las ideas fundamentales de los métodos de transformación. Se inicia el análisis en el dominio de la frecuencia; dado que esto se hace para el régimen permanente de los circuitos excitados por señales senoidales, los conceptos resultan fácilmente comprensibles y se preparan las bases para las sucesivas generalizaciones que se presentan en los capítulos posteriores. En el capítulo 8 se estudian los lugares geométricos de las variables complejas asociadas a los circuitos en régimen permanente senoidal, en los que varía algún parámetro o la frecuencia.

Ampliando los conceptos introducidos en los capítulos 6 y 7, mediante el uso de la Serie de Fourier, en el capítulo 9 se estudia la respuesta de los circuitos excitados por señales poliarmónicas, en régimen permanente.

En los capítulos 10 y 11 se generaliza la aplicación de los métodos de transformación mediante la introducción de la transformación de Laplace, que permite extender la metodología al régimen transitorio y señales de excitación aperiódicas o impulsivas, trabajando en el dominio de frecuencia compleja.

Se remarca entonces la similitud operativa con los procedimientos aplicados en los capítulos 6 y 7. Asimismo se introducen los métodos de análisis con polos y ceros, mostrando la relación con la síntesis de circuitos. Se completa el capítulo 11 con las respuestas asintóticas de Bode.

La última parte está dedicada a la aplicación de los métodos de transformación y la utilización de los teoremas de los circuitos y los métodos de resolución sistemática.

En el capítulo 12 se estudia la resonancia en circuitos simples.

En el capítulo 13 se introduce la topología de circuitos y los métodos de resolución sistemática.

En el capítulo 14 se presentan los teoremas de los circuitos y sus aplicaciones.

El capítulo 15 se dedica a la teoría de los cuadripolos lineales.

En el capítulo 16 se definen los circuitos acoplados inductivamente mostrando las diversas formas en que se los puede resolver y sus circuitos equivalentes. Como aplicación se estudian las respuestas de frecuencia de los transformadores con acoplamiento débil doble sintonizados y los transformadores con acoplamiento ferromagnético.

Finalmente, en el capítulo 17 se plantean las ideas básicas sobre el régimen permanente en los circuitos trifásicos.

Mucho agradecemos a todos los que han contribuido a la concreción de este libro; en especial a los Editores del mismo, por su permanente apoyo; al Sr. Miguel A. Riera por la dedicación y talento volcados en la confección de los dibujos.

Finalmente, en nuestro agradecimiento, merece especial mención el reconocimiento a nuestros seres queridos, por su inestimable estímulo y comprensión, sin los cuales hubiera sido imposible la realización de este libro.

LOS AUTORES

Sumario

Capítulo 10. Transformación de Laplace. Funciones operacionales de los circuitos

10. 1	Introducción	1
10. 2	Antecedentes del cálculo operacional	2
10. 3	Dominio de frecuencia compleja	2
10. 4	Transformación de Laplace	5
10.4.1	Transformada directa	5
10.4.2	Condiciones de existencia	6
10.4.3	Unicidad	8
10.4.4	Cálculo de algunas transformadas simples	8
10.4.5	Transformada inversa	11
10. 5	Propiedades fundamentales de la transformación de Laplace	12
10.5.1	Linealidad	12
10.5.2	Derivación temporal	12
10.5.3	Integración temporal	14
10.5.4	Derivación frecuencial	15
10.5.5	Integración frecuencial	16
10.5.6	Desplazamiento frecuencial o 1er. teorema de desplazamiento	17
10.5.7	Desplazamiento temporal o 2do. teorema de desplazamiento	18
10.5.8	Teorema del valor inicial	20
10.5.9	Teorema del valor final	21
10. 6	Métodos prácticos para hallar la transformada inversa	23
10.6.1	Utilización de tablas de pares de transformadas	23
10.6.2	Expansión en fracciones simples	24
10.6.3	Cálculo de residuos	26
10.6.4	Determinación de la respuesta de un circuito utilizando la transformada de Laplace como una herramienta matemática	34
10. 7	Planteo y solución de problemas en el dominio transformado de Laplace	36
10.7.1	Introducción	36
10.7.2	Transformación de las leyes circuitales	37
10.7.3	Transformación de las excitaciones	38
10.7.4	Transformación de los circuitos	38
10.7.5	Immitancias de excitación operacionales	42
10.7.6	Funciones operacionales de los circuitos	45
10. 8	Influencia de los polos de $H(s)$ y $E_x(s)$ sobre la respuesta temporal	48
10. 9	Obtención de la respuesta temporal por convolución	51
10.9.1	Introducción	51
10.9.2	Producto de convolución	51
10.9.3	Teorema de convolución	53
10.9.4	Antitransformación empleando el teorema de convolución	54
10.9.5	Significado de la antitransformada de la función operacional del circuito $H(s)$	57
10.9.6	Obtención de la respuesta temporal a partir de la respuesta indicativa	57

10.9.7	Respuesta al escalón unitario	60
10.9.8	Obtención de la respuesta temporal en base a la respuesta al escalón unitario. Integrales de Duhamel.	62
10.9.9	Obtención de las integrales de Duhamel a partir del Principio de Superposición	65
10.10	Utilización simultánea de los dominios $j\omega$, s y t	67
10.11	Problemas resueltos	69
10.12	Problemas propuestos	92

Capítulo 11. Análisis de las funciones operacionales de los circuitos en base a las configuraciones de polos y ceros

11. 1	Introducción	95
11. 2	Configuraciones de polos y ceros	95
11. 3	Configuraciones típicas de polos y ceros de $R(s)$ y respuestas temporales asociadas	102
11.3.1	Polo doble en el origen	102
11.3.2	Polo simple en el origen	103
11.3.3	No existen polos ni ceros	104
11.3.4	Polo real negativo	104
11.3.5	Polos imaginarios conjugados	105
11.3.6	Polos complejos conjugados con parte real negativa	107
11.3.7	Polo doble negativo	109
11.3.8	Un polo real negativo y otro en el origen	109
11.3.9	Dos polos reales negativos	110
11.3.10	Análisis cualitativo de configuraciones de polos y ceros más amplias	111
11. 4	Obtención de la respuesta temporal a partir de la configuración de polos y ceros de $R(s)$	111
11. 5	Influencia de la ubicación de los polos y los ceros sobre el valor de los residuos	114
11.5.1	Polos complejos conjugados	115
11.5.2	Polo próximo a un cero	115
11.5.3	Polo próximo a otro polo	116
11.5.4	Polo alejado del resto de la configuración	116
11. 6	Respuestas indicativas típicas de los sistemas de primer y segundo orden	117
11.6.1	Sistemas de primer orden	117
11.6.2	Sistemas de segundo orden	119
11. 7	Obtención de la respuesta frecuencial a partir de la configuración de polos y ceros de $H(s)$	126
11. 8	Influencia de la ubicación de los polos y los ceros sobre las curvas de respuesta de frecuencia de amplitud y fase	133
11.8.1	Cero sobre el eje $j\omega$	133
11.8.2	Polo sobre el eje $j\omega$	134
11.8.3	Cero próximo al eje $j\omega$ con componente real negativa	136
11.8.4	Polo próximo al eje $j\omega$ con componente real negativa	137
11. 9	Configuraciones particulares de polos y ceros y respuestas de frecuencia asociadas	138
11.9.1	Analogía de la membrana elástica	138
11.9.2	Cero en el origen	141
11.9.3	Polo en el origen	141
11.9.4	No existen polos ni ceros	142
11.9.5	Polo real negativo	143
11.9.6	Cero en el origen y polo real negativo	144
11.9.7	Cero en el origen y par de polos complejos conjugados	144
11.9.8	Par de polos complejos conjugados	145
11.9.9	Pares de polos complejos conjugados y ceros imaginarios conjugados	146
11.9.10	Cero en el origen y par de polos reales negativos	147
11.9.11	Funciones de amplitud constante	149
11.9.12	Funciones de fase mínima	149
11.9.13	Aproximaciones de Butterworth y Chebychev a la respuesta del filtro ideal	152

11.10	Gráficos logarítmicos asintóticos de Bode	154
11.10.1	Planteo General	154
11.10.2	Término constante	157
11.10.3	Cero real negativo simple	158
11.10.4	Polo real negativo simple	161
11.10.5	Ceros y polos reales negativos múltiples	163
11.10.6	Par de ceros complejos conjugados	164
11.10.7	Par de polos complejos conjugados	169
11.10.8	Ceros y polos en el origen	169
11.10.9	Construcción de los gráficos asintóticos	171
11.11	Problemas resueltos	180
11.12	Problemas propuestos	193

Capítulo 12. Resonancia en circuitos simples

12. 1	Introducción	197
12. 2	Resonancia en un circuito R L C serie	198
12.2.1	Análisis cualitativo para pulsación variable. Representación de gráficos de todas las variables en función de la frecuencia	198
12.2.2	Factor de selectividad. Introducción por inducción. Definición	206
12.2.3	Diferencias entre el factor de mérito y el de selectividad	208
12.2.4	Distintas expresiones del factor de selectividad para el circuito R L C serie	209
12.2.5	Análisis cuantitativo para pulsación variable. Estudio de las curvas de I, V_C, V_L, P_S, P y P_q	210
12.2.6	Análisis de la resonancia para C y L como variables	230
12. 3	Resonancia en un circuito R L C paralelo	238
12. 4	Curva universal de resonancia	242
12. 5	Resonancia en un circuito paralelo de dos ramas	247
12.5.1	Análisis cualitativo para pulsación variable. Representación de gráficos de las variables en función de la frecuencia	247
12.5.2	Análisis cuantitativo para pulsación variable	254
12.5.3	Circuito resonante paralelo de dos ramas simplificado	262
12. 6	Circuitos con resonancia múltiple	266
12. 7	Análisis de la resonancia de un circuito R L C serie en base a su diagrama de polos y ceros	272
12. 8	Problemas resueltos	287
12. 9	Problemas propuestos	294

Capítulo 13. Resolución sistemática de circuitos

13. 1	Introducción	297
13. 2	Revisión sobre determinantes y matrices	298
13.2.1	Determinantes	298
13.2.2	Matrices	302
13. 3	Clasificación de los tipos de problemas y métodos de resolución utilizados	306
13. 4	Nociones sobre análisis topológico de circuitos	307
13.4.1	Definiciones fundamentales	307
13.4.2	Notación	310
13.4.3	Corrientes de malla independiente	310
13.4.4	Tensiones de rama independiente	312
13.4.5	Relación entre las corrientes y las tensiones de rama	314
13.4.6	Elección de las variables y número de incógnitas. Número de ecuaciones independientes que se derivan de la primera y segunda regla de Kirchhoff	314
13.4.7	Matriz de transformación de corrientes	315
13.4.8	Matriz de transformación de tensiones	319
13. 5	Método de las mallas	323
13. 6	Método de los nodos	331

13. 7 Comparación de los métodos de las mallas y los nodos. Campo de aplicación de cada uno	337
13. 8 Aplicación del principio de dualidad. Obtención por simple inspección del circuito dual	337
13. 9 Problemas resueltos	339
13.10 Problemas propuestos	348

Capítulo 14. Teorema de los circuitos

14. 1 Introducción	353
14. 2 Teorema de superposición	354
14. 3 Teorema de Thévenin	356
14. 4 Teorema de Norton	361
14. 5 Cálculo de las inmitancias equivalentes de Thévenin y Norton en función de la tensión de circuito abierto y la corriente de cortocircuito	365
14. 6 Teorema de compensación	367
14. 7 Extensión del Teorema de superposición al caso de circuitos que cambian de estado	372
14. 8 Teorema de la máxima trasferencia de potencia	375
14. 9 Teorema de reciprocidad	381
14.10 Transformación estrella - triángulo	385
14.11 Teorema de reducción de generadores	388
14.12 Problemas resueltos	392
14.13 Problemas propuestos	404

Capítulo 15. Teoría de los cuadripolos

15. 1 Introducción	408
15. 2 Definición de cuadripolo	409
15. 3 Configuraciones típicas	409
15. 4 Clasificación de cuadripolos	411
15. 5 Tipos de problemas	412
15. 6 Ecuaciones, parámetros y matrices características	413
15. 7 Información suministrada por los parámetros	424
15. 8 Asociación de cuadripolos	426
15. 9 Cálculo de los parámetros y matrices características	434
15.10 Relación entre los parámetros correspondientes a las distintas matrices	440
15.11 Circuitos equivalentes del cuadripolo	452
15.11.1 Introducción	452
15.11.2 Circuitos equivalentes con dos generadores controlados	454
15.11.3 Circuitos equivalentes con un trasferidor ideal	456
15.12 Equivalencia de cuadripolos	459
15.13 Impedancias de entrada y salida en condiciones normales de funcionamiento	463
15.14 Impedancias iterativas, imagen y característica	465
15.15 Constantes de propagación, atenuación y fase	469
15.16 Problemas resueltos	474
15.17 Problemas propuestos	484

Capítulo 16. Circuitos acoplados inductivamente

16. 1 Introducción	488
16. 2 Inductancia mutua	489
16. 3 Coeficiente de acoplamiento	494
16. 4 Tensiones de inducción mutua	496
16. 5 Polaridades de los arrollamientos	497
16.5.1 Borne de igual polaridad respecto del flujo	498
16.5.2 Propiedades de los bornes homólogos	498

16. 6	Planteo de las ecuaciones en circuitos con acoplamiento inductivo	499
16. 7	Asociación de inductores con acoplamiento inductivo en serie y en paralelo	504
16. 8	Circuitos equivalentes con "generadores controlados"	508
16. 9	Aplicación del método de las mallas a circuitos con acoplamiento inductivo	511
16.10	El circuito con acoplamiento inductivo débil como cuadripolo	514
16.11	Impedancia reflejada	515
16.12	Circuito equivalente con una impedancia reflejada y un generador controlado	518
16.13	Aplicación del teorema de Thévenin a circuitos con acoplamiento inductivo	519
16.14	Diagramas fasoriales de circuitos con acoplamiento inductivo	521
16.15	Respuesta de frecuencia de los circuitos con acoplamiento inductivo débil	523
16.15.1	Introducción	523
16.15.2	Análisis cualitativo de la respuesta de frecuencia del circuito doble sintonizado con acoplamiento inductivo débil	525
16.15.3	Análisis cuantitativo de la respuesta del circuito doble sintonizado con acoplamiento débil	530
16.15.4	Acoplamiento transicional	549
16.16	Circuitos con acoplamiento perfecto. Transformadores	551
16.16.1	Acoplamiento perfecto	551
16.16.2	Transformador ideal	552
16.16.3	Circuito equivalente del transformador no ideal sin pérdidas en el núcleo ferromagnético	557
16.16.4	Circuito equivalente del transformador real	561
16.17	Respuesta de frecuencia de un transformador con núcleo ferromagnético	565
16.17.1	Introducción	565
16.17.2	Análisis cualitativo	565
16.17.3	Análisis cuantitativo	567
16.18	Problemas resueltos	574
16.19	Problemas propuestos	584

Capítulo 17. Régimen permanente de circuitos trifásicos

17. 1	Introducción	588
17. 2	Generalidades	588
17. 3	Definiciones fundamentales	589
17. 4	Sistemas perfectos	591
17.4.1	Generalidades	591
17.4.2	Concatenación de los sistemas trifásicos	592
17.4.3	Potencia en sistemas trifásicos perfectos	596
17.4.4	Resolución de los sistemas perfectos	598
17. 5	Sistemas asimétricos y desequilibrados	602
17. 6	Problemas resueltos	611
17. 7	Problemas propuestos	618

ANÁLISIS DE MODELOS CIRCUITALES - Tomo 1

Capítulo 1. Fundamentos de la teoría de los modelos circuitales idealizados.

Capítulo 2. Señales de excitación de uso frecuente.

Capítulo 3. Respuesta de circuitos con un solo tipo de elemento pasivo.

Capítulo 4. Respuesta de circuitos con dos tipos de elementos pasivos.

Capítulo 5. Respuesta de circuitos con tres tipos de elementos pasivos.

Capítulo 6. Fasores armónicos y fasores eficaces asociados a las señales senoidales.

Capítulo 7. Régimen permanente de circuitos excitados por señales senoidales.

Capítulo 8. Lugares geométricos de las funciones de impedancia y admitancia complejas.

Capítulo 9. Régimen permanente de circuitos excitados por señales poliarmónicas.

Transformación de Laplace. Funciones operacionales de los circuitos

10.1 Introducción: En los Cap. 6 y 7, se introdujo el concepto básico de los métodos operacionales, aplicándolo al estudio del régimen permanente de circuitos excitados por señales senoidales. Posteriormente, en el Cap. 9, se extendió el procedimiento a los circuitos excitados por señales poliarmónicas representables por series de Fourier fuertemente convergentes.

En este capítulo se realizará una nueva generalización, cambiando la relación de transformación y definiendo un nuevo dominio transformado. En primer término se verá que, para extender la metodología del Cap. 7 al estudio del régimen transitorio, con excitaciones no senoidales y aperiódicas, se debe trabajar en un dominio transformado de frecuencia compleja. Luego se introducirán las transformadas de Laplace, que permitirán pasar del dominio de la variable t al de frecuencia compleja deseado y viceversa. Una vez presentadas las transformadas directa e inversa, se describirán las principales limitaciones y propiedades, para luego introducir los métodos prácticos de antitransformación utilizados en el análisis de circuitos.

A continuación, análogamente a lo hecho en el Cap. 7, se transformarán las excitaciones, las leyes y los modelos circuitales, introduciendo los generadores de condiciones iniciales y las funciones operacionales de los circuitos. Se definirán los polos y los ceros de la excitación, y la función del circuito, estableciendo su relación con las componentes libres y forzadas de la respuesta transitoria y con las raíces de la ecuación característica empleada en los Cap. 4 y 5.

Se completará el capítulo con el estudio del Teorema de Convolución, la función indicativa, las integrales de Duhamel y su aplicación a la solución de problemas en los que la transformada de la excitación no existe o es difícil de obtener.

10.2 Antecedentes del cálculo operacional

Los métodos simbólicos interesaron en la matemática aplicada mucho tiempo antes que se generalizara su aplicación. Ya en 1695 Leibniz señaló que el símbolo de derivación poseía algunas propiedades algebraicas. A lo largo del siglo XIX, diversos matemáticos franceses e ingleses aplicaron parcialmente algunas de las propiedades del cálculo operacional. Pero fue el ingeniero electricista Oliver Heaviside quien dio definitivo impulso al método simbólico, al publicar en el "Proceedings of the Royal Society" N° 52 pág. 504 de 1893 y N° 54 pág. 105 de 1894 su trabajo "On Operators In Mathematical Physics". En dicha publicación se describió la metodología operativa, pero sin una fundamentación matemática adecuada, por lo que generó gran resistencia en los medios científicos.

El método propuesto, permitía reducir la solución de ecuaciones diferenciales a procesos puramente algebraicos, debiendo verificarse a posteriori la validez del resultado, debido al desconocimiento de las limitaciones del procedimiento. Ante el auge del método simbólico, numerosos matemáticos se lanzaron a la búsqueda de su justificación formal, hallándola finalmente en la utilización de la transformación de Laplace, que recibió entonces aplicación práctica un siglo después de ser presentada por Pierre Simón Laplace.

10.3 Dominio de frecuencia compleja

En el Cap. 7, parágrafo 7.14.1, se describió el proceso seguido en los métodos de transformación, el que fue resumido en la Fig. 7.31.

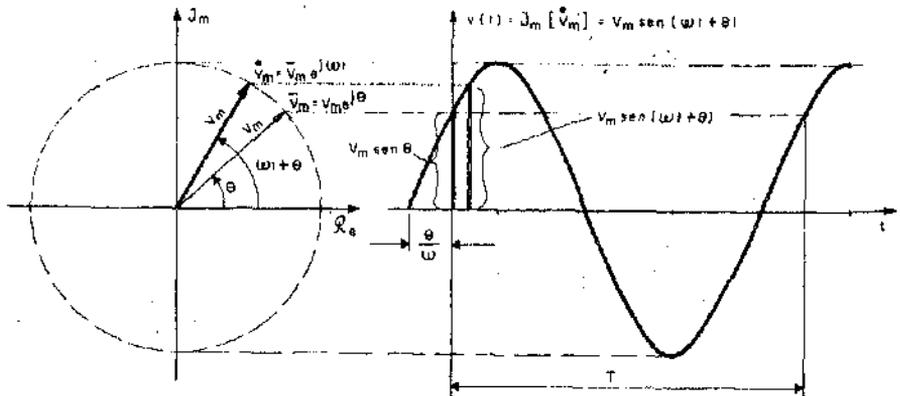


Fig. 10.1

Como se recordará, trabajando en el dominio transformado de la variable $f \omega$, el método sólo resulta válido para el estudio del régimen permanente, en circuitos excitados exclusivamente por señales senoidales. Efectivamente, la proyección de un fasor armónico de módulo constante, que gira con velocidad angular ω invariable, da una señal senoidal como se muestra en la Fig. 10.1.

Según se vio en los Cap. 4 y 5, al estudiar la respuesta de circuitos excitados por señales aperiódicas, aparecen componentes constantes, exponenciales, oscilaciones de amplitud decreciente en forma exponencial, etcétera.

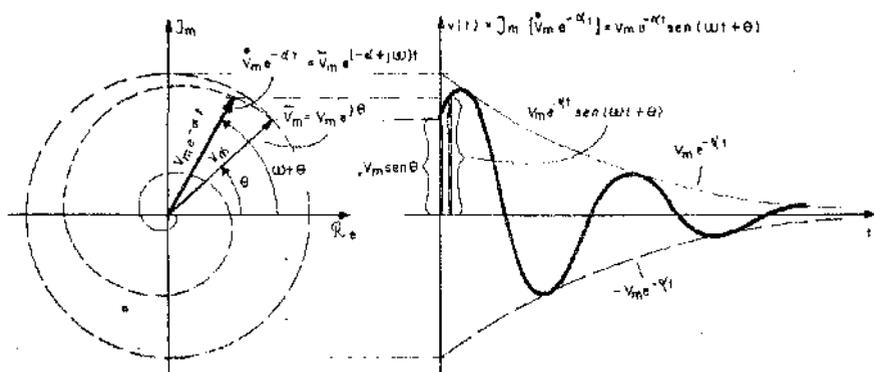


Fig. 10.2

En la Fig. 10.2 se muestra la proyección sobre el eje imaginario de un fasor armónico cuyo módulo decrece exponencialmente. El resultado es una oscilación amortiguada. Si el módulo se incrementara, se tendría una oscilación creciente como la de la Fig. 10.5.

En la Fig. 10.3 se muestra la proyección de la Fig. 10.2, pero suponiendo que

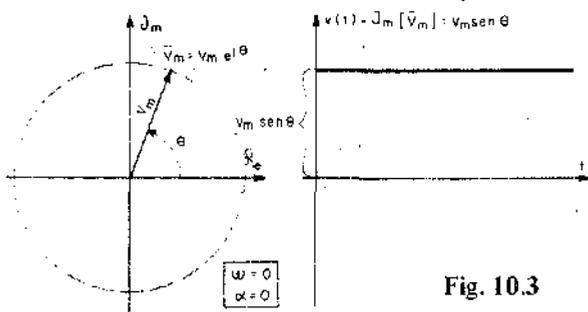


Fig. 10.3

el fasor no gira. En este caso se obtiene una exponencial decreciente, que podría resultar creciente como en la Fig. 10.6, si el exponente fuera positivo.

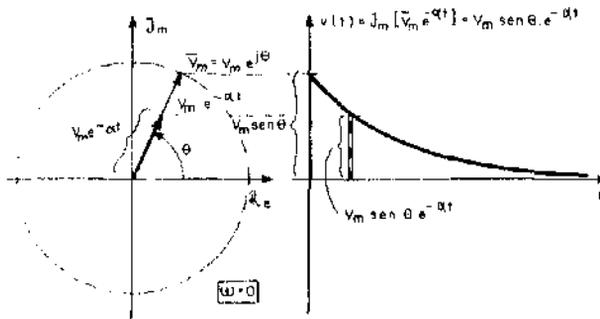


Fig. 10.4

En la Fig. 10.4 se ve que, si tanto α como ω son nulos, al proyectar sobre el eje imaginario se obtiene una señal constante.

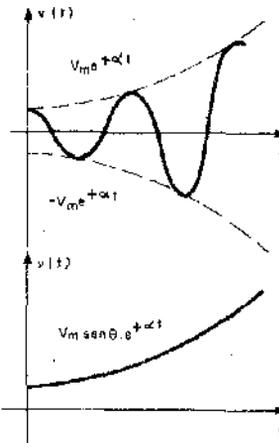


Fig. 10.5

Fig. 10.6

Comparando las Figs. 10.1 y 10.2, se observa que la diferencia entre ambas reside en que en la primera se afecta al fasor \bar{V}_m por el operador unitario $e^{j\omega t}$, mientras que en la segunda se multiplica a \bar{V}_m por $e^{(-\alpha + j\omega)t}$. Es decir que el factor exponencial tiene ahora como exponente una frecuencia compleja

$(-\alpha + j\omega)$, que en lo sucesivo se designará en forma genérica $s = \sigma + j\omega$, en lugar de la frecuencia imaginaria $j\omega$ empleada en el Cap. 7.

Nótese que la parte real de la frecuencia compleja controla el amortiguamiento mientras que la parte imaginaria hace lo propio con la frecuencia de las oscilaciones.

En principio, parece entonces razonable pensar que para suprimir las limitaciones del Cap. 7, sin perder las ventajas operativas alcanzadas, debe mantenerse la metodología y buscar otra transformación que traslade del dominio del tiempo al de la frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$.

Como se verá en el parágrafo siguiente, el factor exponencial e^{-st} intervendrá en la transformación que permite el pasaje del dominio t al s .

10.4 Transformación de Laplace

10.4.1) Transformada directa: Se recordará que una transformación funcional es una generalización del concepto de función. En efecto, una función $y = f(x)$, hace corresponder a cada número x de un cierto conjunto, otro número y de un conjunto distinto. Una transformación funcional $F(y) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, hace corresponder a cada función $f(x)$ de un conjunto de funciones, una función $F(y)$ de otro conjunto. Se denomina función original u objeto a $f(x)$ y función transformada o imagen a $F(y)$.

Las transformaciones funcionales integrales, son de la forma general indicada en la Ec. (10.1):

$$F(y) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_a^b f(x) \cdot K(x, y) dx \quad (10.1)$$

donde $f(x)$ es la función original. La función de dos variables $K(x, y)$ se denomina núcleo de la transformación. $F(y)$ es la transformada o imagen de $f(x)$, que, como puede observarse en la Ec. (10.1), solamente es función de la nueva variable y .

Cada tipo de transformación queda caracterizada al elegir los límites de integración y el núcleo de la transformación.

En la transformación de Laplace, la variable independiente x es el tiempo, mientras que la variable y , correspondiente al dominio transformado, es la frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$.

El núcleo de la transformación es e^{-st} y los límites de integración cero e infinito. La función transformada o transformada directa de Laplace, resulta entonces:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (10.2)$$

donde el operador transformada directa de Laplace, se simboliza con la letra \mathcal{L} , colocándose entre corchetes la función sobre la cual opera.

La Ec. (10.2), se denomina transformada ordinaria, de primera especie o unilateral, para diferenciarla de la de segunda especie o bilateral, definida por la Ec. (10.3).

$$\mathcal{L}^* [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (10.3)$$

Salvo en casos muy particulares, se ha generalizado el uso de la Ec. (10.2), pues al tener como límite inicial de integración o en lugar de $-\infty$, la integral es convergente en un número de casos muy superior. Además, como se vio en los Cap. 4 y 5, lo más frecuente es estudiar la respuesta de un circuito a partir de un cierto instante inicial, incorporando lo acontecido previamente a las condiciones iniciales. En lo que sigue se hará referencia exclusivamente a la Ec. (10.2), sin necesidad de señalar que se trata de la transformada de Laplace ordinaria. Es interesante destacar que la transformada de Laplace no es la única que permite arribar a un dominio de frecuencia compleja. En efecto, en el estudio de los servomecanismos, se utiliza a veces la transformada de Carson, definida como:

$$\mathcal{C} [f(t)] = s \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = s \mathcal{L} [f(t)] \quad (10.4)$$

10.4.2) Condiciones de existencia: Para que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ exista, la integral de la Ec. (10.2) debe ser convergente. Para ello, debe existir el límite.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |f(t) e^{-st}| dt \quad (10.5)$$

esto se cumple cuando la función $f(t)$ satisface las siguientes condiciones:

- a) Es seccionalmente continua. Esto es, tiene un número finito de discontinuidades de primera especie (saltos finitos) para $0 < t < \infty$. Dicho de otro modo, la función debe ser continua y acotada en cualquier intervalo (t_1, t_2) tal que $0 < t_1 < t < t_2 < \infty$
- b) Es de orden exponencial. Esto ocurre cuando, para todo $t > 0$ es:

$$|f(t) e^{(-\sigma_0 + j\omega_0)t}| \leq M \quad (10.6)$$

o también,

$$|f(t)| e^{-\sigma_0 t} \leq M$$

o lo que es lo mismo:

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \tag{10.7}$$

donde M es cualquier número finito y σ_0 llamada abscisa de convergencia absoluta, es el menor número finito para la cual existe algún valor de M que satisface la desigualdad (10.7). Por ejemplo, la función $f(t) = 3 e^{10t}$ es de orden exponencial y es transformable Laplace, pues para $\sigma_0 > 10$ y $M > 3$, se satisface la Ec. (10.7).

En cambio e^{e^t} o e^{t^2} no son transformables Laplace.

La condición b) es suficiente, pero no necesaria, ya que existen funciones que no son de orden exponencial y son transformables Laplace. Esos casos son muy poco frecuentes en teoría de circuitos y pueden ser tratados reemplazando la condición b) por la siguiente, que se obtiene aplicando la integral de Stieltjes: $f(t)$ es transformable Laplace sólo si la función:

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt$$

satisface la condición de la Ec. (10.8), similar a la Ec. (10.7),

$$|g(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \tag{10.8}$$

σ_0 es la abscisa de convergencia. Si la integral converge para $s = \sigma_0$, también lo hace para todo s con $\sigma > \sigma_0$. Ver Fig. 10.7.

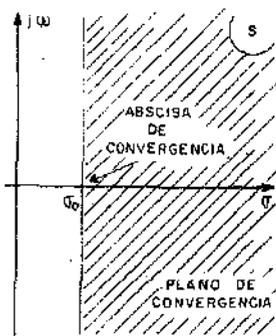


Fig. 10.7

En cuanto a las señales discontinuas como $\delta(t)$, no pueden ser tratadas con rigor matemático en la forma que, siguiendo a Heaviside y Dirac, se aplica el cálculo operacional.

Sin embargo, la generalización del concepto de función introducido en la teoría de las distribuciones de L. Schwartz, ha permitido arribar a las mismas conclusiones finales por caminos matemáticamente correctos, dando a éstas plena validez y sentido.

10.4.3) Unicidad: Puede demostrarse en base al teorema de Lerch, que si dos funciones continuas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tienen la misma transformada de Laplace, $F(s)$, ellas son idénticas. Esto es rigurosamente cierto para funciones que sean idénticamente nulas para $t < 0$, ya que la Ec. (10.2) tiene como límites de integración 0 e ∞ . Por tal causa, cuando una señal no sea nula para $t < 0$, se la multiplicará por $u(t)$ antes de aplicarle la transformación.

10.4.4) Cálculo de algunas transformadas simples

Ejemplo 1: $f(t) = u(t)$ (Escalón unitario de Heaviside)

Aplicando la Ec. (10.2), resulta:

$$F(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

En el intervalo de integración es $u(t) = 1$.

En consecuencia:

$$F(s) = 1 \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-s} [0 - 1] = \frac{1}{s} \quad (10.9)$$

Ejemplo 2: $f(t) = \rho(t) = t \cdot u(t)$ (rampa unitaria)

En este caso es:

$$F(s) = \mathcal{L}[\rho(t)] = \int_0^{\infty} t u(t) e^{-st} dt = 1 \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

Integrando por partes resulta, aplicando L'Hospital al límite superior del primer término:

$$F(s) = - \left. \frac{t e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 0 - 0 - \left. \frac{e^{-st}}{s^2} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \quad (10.10)$$

Ejemplo 3: $f(t) = \delta(t)$ (impulso unitario de Dirac)

Aplicando la Ec. (10.2), queda

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt$$

y como $\delta(t) = 0$ para $t < 0$, puede escribirse:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt \quad (10.11)$$

Puede demostrarse en base a la teoría de las distribuciones que si $\varphi(t)$ es una función continua, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (10.12)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (10.12), la Ec. (10.11) queda:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1 \quad (10.13)$$

La Ec. (10.13) también puede ser obtenida "formalmente" de la siguiente manera, admitiendo una permutación no válida de paso al límite e integración, tal como se hizo en el Cap. 2:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) e^{-st} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_h(t) \cdot e^{-st} dt$$

donde $\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t)$, siendo $\delta_h(t)$ la función auxiliar definida en el Cap. 2 como

$$\delta_h(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{h} & 0 < t < h \\ 0 & t > h \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \frac{1}{h} e^{-st} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sh}}{sh}$$

y aplicando L'Hospital:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-sh} = 1$$

Ejemplo 4: $f(t) = e^{at}$

En este caso es:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$\therefore F(s) = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (10.14)$$

Ejemplo 5: $f(t) = e^{j\omega t}$

Este es un caso particular de la Ec. (10.14), con $a = j\omega$

$$\therefore F(s) = \mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10.15)$$

Ejemplo 6: $f(t) = \cos \omega t$

$$f(t) = \text{sen } \omega t$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler puede escribirse la Ec. (10.15) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \mathcal{L}[\cos \omega t + j \text{sen } \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

De la definición dada en la Ec. (10.2), por la linealidad de la integral, puede escribirse:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t + j \text{sen } \omega t] = \mathcal{L}[\cos \omega t] + j \mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Finalmente, igualando las partes reales e imaginarias resulta:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (10.16)$$

$$\mathcal{L}[\sen \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10.17)$$

10.4.5) **Trasformada inversa:** Para retornar del dominio de frecuencia compleja al dominio del tiempo, dada una función $F(s)$, debe hallarse la función $f(t)$, tal que se satisfaga la Ec. (10.2). La unicidad de la transformación de Laplace asegura la validez del resultado. Esta transformación inversa o antitransformada, $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ se calcula con la fórmula de inversión de Mellin, también conocida como de Mellin-Fourier o de Reimann:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{+st} ds = \begin{cases} f(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (10.18)$$

donde σ_1 debe ser mayor que la abscisa de convergencia σ_0 definida en el párrafo anterior. Si no se conoce σ_0 , un criterio equivalente consiste en adoptar como camino de integración, una recta vertical que deje a la izquierda todos los puntos singulares de $F(s)$, tal como se muestra en la Fig. 10.8. Recordando que las singularidades de $F(s)$ son los valores de S para las cuales la función no es regular. Para que $F(s)$ sea regular en un punto, debe ser derivable en dicho punto y en un entorno del mismo.

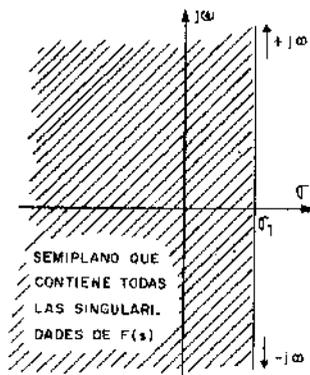


Fig. 10.8

Si bien la Ec. (10.18) da un método general para hallar la función antitransformada, su utilización no resulta práctica, por lo que en el parágrafo 10.6 se estudiará la forma de hacerlo más fácilmente.

10.5 Propiedades fundamentales de la transformación de Laplace

10.5.1) **Linealidad:** Sean K_1 y K_2 constantes, $f(t)$ y $g(t)$ funciones cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente $F(s)$ y $G(s)$. Entonces resulta:

$$\mathcal{L}\{K_1 f(t) + K_2 g(t)\} = K_1 F(s) + K_2 G(s) \quad (10.19)$$

En efecto, por la linealidad de la integral resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{K_1 f(t) + K_2 g(t)\} &= \int_0^{\infty} K_1 f(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} K_2 g(t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= K_1 \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt + K_2 \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ \therefore \mathcal{L}\{K_1 \cdot f(t) + K_2 g(t)\} &= K_1 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + K_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\{10 \operatorname{sen} 6t u(t) + 20 p(t)\} = 10 \frac{6}{s^2 + 6^2} + 20 \frac{1}{s^2}$$

10.5.2) **Derivación temporal:** Si $f(t)$ y su derivada primera son transformables por Laplace, resulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(t=0^+) \quad (10.20)$$

$$\text{Donde } f(t=0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad \text{para } t > 0$$

En efecto, aplicando la definición dada por la Ec. (10.2), se obtiene:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t)$$

llamando: $e^{-st} = u$, $df(t) = dv$ e integrando por partes

$$\int_0^{\infty} u dv = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$$

$$\begin{aligned} \text{resulta: } \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-s) e^{-st} dt = \\ &= -f(t=0^+) + s \mathcal{L} [f(t)] = s F(s) - f(t=0^+) \end{aligned}$$

Ejemplo: Aplicar la transformada de Laplace a la siguiente ecuación diferencial, correspondiente al circuito de la Fig. 10.9:

$$v_C(t) + R_C \frac{dv_C(t)}{dt} = v(t)$$

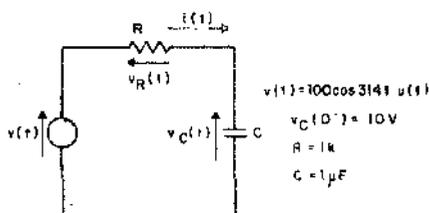


Fig. 10.9

Aplicando la transformación y recordando la propiedad de linealidad, resulta:

$$V_C(s) + R_C [sV_C(s) - v_C(0^+)] = V(s)$$

resultando:

$$V_C(s) + 10^3 \cdot 10^{-6} s V_C(s) - 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 100 \frac{s}{s^2 + 314^2}$$

$$\therefore V_C(s) + 10^{-3} s V_C(s) - 10^{-2} = 10^2 \frac{s}{s^2 + 314^2}$$

Como se ve, la ecuación diferencial se ha convertido en una ecuación algebraica, de la cual puede despejarse fácilmente:

$$V_C(s) = \frac{10^2 \frac{s}{s^2 + 314^2} + 10^{-2}}{1 + 10^{-3} s}$$

Nótese la similitud operativa entre el dominio de frecuencia compleja y el de frecuencia imaginaria estudiado en el Cap. 6. En el primer caso, derivar en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar por $S = \sigma + j\omega$ en el dominio transformado, mientras que en el segundo la derivación temporal implica multiplicar por $j\omega$ en el dominio frecuencial. Obsérvese además que en el dominio transformado de Laplace, quedan incorporadas automáticamente las condiciones iniciales al efectuar la transformación directa.

Para el caso de derivadas de orden enésimo, aplicando reiteradamente el cálculo indicado por la Ec. (10.20) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^{(n)}} \right] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(t=0^+) - s^{n-2} f'(t=0^+) \dots - \\ &- s f^{(n-2)}(t=0^+) - f^{(n-1)}(t=0^+) \end{aligned} \quad (10.21)$$

10.5.3) **Integración temporal:** Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y esta última es de orden exponencial, resulta:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (10.22)$$

En efecto aplicando la Ec. (10.2) es:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-st} dt$$

Llamando a $\int_0^t f(t) dt = u$ y $e^{-st} dt = dv$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u dv &= uv \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du \text{ queda: } \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \\ &= \left(\int_0^t f(t) dt \right) \left(\frac{1}{-s} e^{-st} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) f(t) dt \end{aligned}$$

Al ser $f(t)$ de orden exponencial, resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \int_0^t f(t) dt \right] = 0$$

por lo que:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s)$$

En este caso, integrar en el dominio del tiempo, equivale a dividir por $S = \sigma + j\omega$ en el dominio transformado, lo que vuelve a dar como caso particular para $\sigma = 0$, el resultado hallado en el Cap. 6 para los fasores armónicos.

Ejemplo:

Aplicar la transformación de Laplace a la ecuación de equilibrio instantáneo siguiente, correspondiente a un circuito R - L - C serie con condiciones iniciales nulas, excitado por una tensión rampa.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + V_0 = \frac{V}{T} \rho(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros resulta:

$$RI(s) + sLI(s) - LI_0 + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{V_0}{s} = \frac{V}{T} \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore I(s) = \frac{\frac{V}{T} \frac{1}{s^2} + LI_0 - \frac{V_0}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

nótese que: $\mathcal{L}[V_0] = \int_0^{\infty} V_0 e^{-st} dt = \frac{V_0}{s}$

10.5.4) **Derivación frecuencial:** Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, puede escribirse:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)] \quad (10.23)$$

en efecto:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

derivando ambos miembros respecto de s queda:

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [-t f(t)] e^{-st} dt \\ \therefore \frac{dF(s)}{ds} &= \mathcal{L}[-t f(t)] \end{aligned}$$

Es decir que, derivar en el dominio s equivale a multiplicar por $(-t)$ en el dominio temporal.

Ejemplo:

Dada la función $f(t) = Am \operatorname{sen} \omega t$, cuya transformada es $F(s) = Am \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ hallar la transformada de $g(t) = Am \cdot t \cdot \operatorname{sen} \omega t$.

Aplicando la propiedad de derivación frecuencial resulta:

$$G(s) = \mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} = Am \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

10.5.5) **Integración frecuencial:** Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, puede escribirse:

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (10.24)$$

se parte de la expresión:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

integrando ambos miembros en el dominio de frecuencia queda:

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right] ds$$

permutando las integrales del segundo miembro se tiene:

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \left[\int_s^{\infty} f(t) e^{-st} ds \right] dt$$

$$\therefore \int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \left[f(t) \frac{1}{-t} e^{-st} \right]_s^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

En consecuencia, integrar en el dominio de frecuencia equivale a dividir por t en el dominio del tiempo.

Ejemplo:

Dadas $f(t) = t \cos \omega t$ y $F(s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$, hallar la función de $g(t)$ que corresponde a $G(s) = \int_0^\infty \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} ds$. Aplicando la Ec. (10.24) puede escribirse:

$$G(s) = \int_0^\infty \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} ds = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{t \cos \omega t}{t} \right] = \mathcal{L} [\cos \omega t]$$

Es importante destacar que las propiedades definidas por las Ecs. (10.23) y (10.24) tienen mucho menos importancia que las correspondientes a la derivación y la integración temporal.

10.5.6) Desplazamiento frecuencial o 1er. teorema de desplazamiento: Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y a es una constante real positiva o negativa, resulta:

$$F(s-a) = \mathcal{L} [e^{at} f(t)] \quad (10.25)$$

Aplicando la Ec. (10.2) resulta:

$$\mathcal{L} [e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt$$

y con el cambio de variable $s-a = z$, resulta:

$$\mathcal{L} [e^{at} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = F(z) = F(s-a)$$

Es decir que una traslación frecuencial como la mostrada en la Fig. 10.10, equivale a multiplicar la función $f(t)$ por un factor e^{at} que aumenta o disminuye el valor de $f(t)$ con el transcurso del tiempo, según sea el signo de a .

Ejemplo:

Hallar la transformada de $f(t) = e^{at} \cos \omega t$.

Se sabe que $\mathcal{L} [\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

en consecuencia, aplicando la Ec. (10.25) resulta:

$$\mathcal{L} [e^{at} \cos \omega t] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

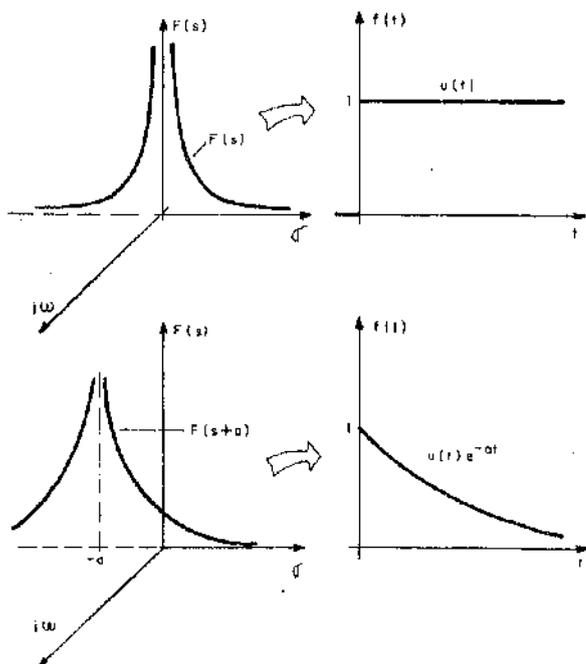


Fig. 10.10

10.5.7) Desplazamiento temporal o 2do. teorema de desplazamiento:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y a es una constante real positiva o negativa, resulta:

$$\mathcal{L} [f(t-a) u(t-a)] = F(s) e^{-as} \quad (10.26)$$

en efecto, aplicando la Ec. (10.2) queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(t-a) u(t-a)] &= \int_0^{\infty} f(t-a) u(t-a) e^{-st} dt = \int_0^a f(t-a) u(t-a) e^{-st} dt + \\ &+ \int_a^{\infty} f(t-a) u(t-a) e^{-st} dt = 0 + \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\text{ya que } u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t > a \end{cases}$$

multiplicando por $e^{+as} e^{-as} = e^0 = 1$ resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[f(t-a) u(t-a) \right] &= \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-st} e^{+as} e^{-as} dt = \\ &= \int_a^{\infty} f(t-a) e^{-(t-a)s} e^{-as} dt \end{aligned}$$

y con el cambio de variable $t-a = x$ queda:

$$\mathcal{L} \left[f(t-a) u(t-a) \right] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-xs} e^{-as} dx = e^{-as} \int_0^{\infty} f(x) e^{-xs} dx$$

$$\therefore \mathcal{L} \left[f(t-a) u(t-a) \right] = e^{-as} F(s)$$

En consecuencia, el adelanto o la demora de una señal en el dominio t , como el mostrado en la Fig. 10.11 equivale a multiplicar por e^{-as} la transformada de Laplace de dicha señal.

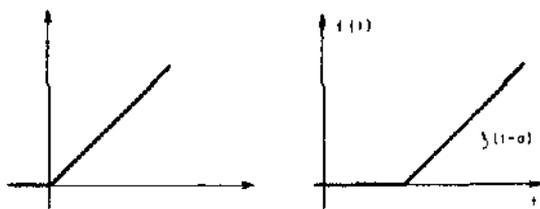


Fig. 10.11

Ejemplo:

Hallar la transformada de Laplace del pulso rectangular de la Fig. 10.12.a) y el pulso senoidal de la Fig. 10.12.b).

Para el pulso rectangular resulta:

$$\mathcal{L} [v(t)] = A \mathcal{L} [u(t)] - A \mathcal{L} [u(t-Ta)]$$

$$\therefore \mathcal{L} [v(t)] = \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-as} = \frac{A}{s} [1 - e^{-as}]$$

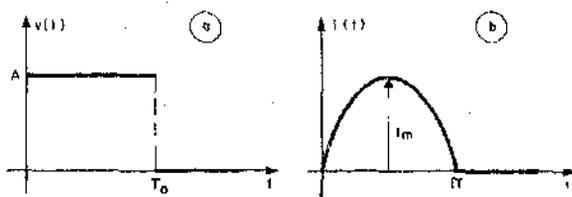


Fig. 10.12

Para el pulso senoidal es:

$$\mathcal{L}[i(t)] = I_m \mathcal{L}[\text{sen } \omega t u(t)] + I_m \mathcal{L}[\text{sen}(\omega t - \pi) u(t - \frac{\pi}{\omega})]$$

$$\therefore \mathcal{L}[i(t)] = I_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-\pi s})$$

10.5.8) **Teorema del valor inicial:** Si $f(t)$ y su primera derivada poseen transformada de Laplace, con una abscisa de convergencia finita, resulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (10.27)$$

en efecto, según la Ec. (10.20) es:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s F(s) - f(0^+)$$

tomando en ambos miembros el límite cuando $S \rightarrow \infty$, resulta:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s) - f(0^+)] \quad (10.28)$$

Como $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$ existe por hipótesis, su límite para $S \rightarrow \infty$ en la zona de convergencia vale cero, por lo que la Ec. (10.28), se reduce a la Ec. (10.27).

Este teorema permite determinar las condiciones iniciales de un circuito cuando se reconoce su función transformada $F(s)$.

Ejemplo:

$$\text{Dada } F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2}$$

hallar $f(0^+)$

Aplicando la Ec. (10.27) resulta:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2} \right] = 1$$

Para que $f(t)$ y $f'(t)$ posean transformada de Laplace, la primera debe ser continua o como máximo poseer una discontinuidad de primera especie en el origen. En consecuencia, si existe un impulso, el teorema no es aplicable.

Ejemplo:

Sea $f(t) = 4 \delta(t) + 2 u(t)$ cuyo límite para $t \rightarrow 0$ es:

$$f(0^+) = 2$$

La transformada de $f(t)$ es:

$$F(s) = 4 + \frac{2}{s}$$

resultando

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} [4s + 2] \rightarrow \infty \neq f(0^+)$$

10.5.9) **Teorema del valor final:** Si $f(t)$ y $f'(t)$ son transformables por Laplace y $sF(s)$ es regular sobre el eje $j\omega$ y en el semiplano de la derecha resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s) \quad (10.29)$$

Para demostrarlo se parte de la Ec. (10.20):

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s F(s) - f(0^+)$$

tomando los dos últimos miembros el límite cuando $s \rightarrow 0$ resulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = f(0^+)$$

Si se cumplen las hipótesis enunciadas, puede permutarse el límite y la integral, resultando:

$$\int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d f(t)}{d t} e^{-st} d t = \int_0^{\infty} d f(t) = f_{(\infty)} - f(0^+)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación anterior queda:

$$f_{(\infty)} - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) - f(0^+)$$

$$\therefore f_{(\infty)} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

este resultado es muy útil en análisis y diseño de servosistemas y circuitos, pues permite obtener el valor al cual tiende la respuesta temporal para tiempos muy grandes, cuando se conoce la respuesta frecuencial.

Ejemplo:

$$\text{Dada } F(s) = \mathcal{L} [f(t)] = \frac{11s + 10}{s(s + 2)}$$

$$\text{hallar el } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

De acuerdo a la Ec. (10.29) es:

$$f_{(\infty)} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{11s + 10}{s + 2} = \frac{10}{2} = 5$$

Las limitaciones del enunciado pueden expresarse también diciendo que este teorema no puede aplicarse cuando el denominador de $sF(s)$ posee algún cero cuya parte real sea nula o positiva.

Ejemplo:

Sea $f(t) = Am \cos \omega t$ cuya transformada es:

$$F(s) = Am \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Puesto que $sF(s)$ tiene un par de valores $s = \pm j\omega$ sobre el eje imaginario, para los que se anula el denominador, resulta inaplicable el teorema.

En efecto, nótese que se trata de una oscilación de amplitud constante. En cambio, para:

$$F(s) = \frac{10}{s[s + (4 - j8)][s + (4 + j8)]}$$

resulta $sF(s)$ regular sobre el eje imaginario y en el semiplano con parte real positiva y por lo tanto:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{[s + (4 - j8)][s + (4 + j8)]} = \frac{1}{8}$$

Como se verá en el próximo capítulo, las raíces complejas conjugadas con parte real negativa en el denominador, dan lugar a una oscilación amortiguada, por lo que el límite existe y tiene un único valor.

10.6 Métodos prácticos para hallar la transformada inversa

10.6.1) Utilización de tablas de pares de transformadas: En la Fig. 10.13 se muestra una tabla con algunos pares de transformadores construida en base a las Ecs.(10.9),(10.10),(10.13),(10.14),(10.15),(10.16),(10.17),(10.23) y (10.25).

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$p(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{sen } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1	$t \text{ sen } t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{j\omega t}$	$\frac{s+j\omega}{s^2 + \omega^2}$		

Fig. 10.13

Como puede apreciarse, en la primera columna se encuentra $f(t)$ y en la segunda $F(s)$. En consecuencia, la tabla sirve para pasar del dominio del tiempo al de frecuencia compleja, o a la inversa. Para efectuar una antitransformación utilizando la tabla, debe llevarse la función dada a la forma de alguna de la segun-

da columna de la misma. En efecto, suponiendo que se debe hallar la función $f(t)$ que corresponde a:

$$F(s) = \frac{10s}{(s^2 + 7)^2} \quad (10.30)$$

La Ec. (10.30) no está en la tabla 10.13, pero si se la escribe de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \frac{2\sqrt{7} \cdot s}{[s^2 + (\sqrt{7})^2]^2}$$

se verá que aparece en la segunda columna de la tabla en el penúltimo lugar, de modo que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10s}{(s^2 + 7)^2} \right] = t \cdot \text{sen } \sqrt{7} t$$

En consecuencia, las posibilidades de este método dependen de lo completa que resulte la tabla empleada y de la creatividad puesta en juego para encuadrar el caso considerado en uno de los tabulados.

10.6.2) Expansión en fracciones simples: Un caso particular de antitransformación que conviene mencionar separadamente por la gran frecuencia con que se presenta en la teoría de circuitos, es el correspondiente a las funciones de la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (10.31)$$

Donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios, siendo el grado del numerador $N(s)$ menor que el del denominador $D(s)$, de tal modo que puede considerarse a $F(s)$ como una transformada de Laplace. Como es sabido, una función racional puede ser expresada como una suma de fracciones simples, cuyo número coincide con el grado del denominador.

Considerando en primer término el caso de que todas las raíces $p_1; p_2; p_3; \dots; p_n$ del polinomio del denominador sean distintas. En esas condiciones, la Ec. (10.31) puede escribirse:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_1)\dots(s-p_n)} \quad (10.32)$$

o bien, expandiendo en fracciones simples:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_j}{s-p_i} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad (10.33)$$

que puede escribirse:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} \quad (10.34)$$

Para hallar el coeficiente genérico K_i , se multiplican ambos miembros de la Ec. (10.33), por $(s-p_i)$:

$$F(s) (s-p_i) = K_1 \frac{s-p_i}{s-p_1} + K_2 \frac{s-p_i}{s-p_2} + \dots + K_i \frac{s-p_i}{s-p_i} + \dots + K_n \frac{s-p_i}{s-p_n}$$

y como todas las raíces p_i son distintas, se toma el límite para s teniendo a p_i en ambos miembros, resulta:

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \{ F(s) (s-p_i) \} \quad (10.35)$$

Debido a la linealidad de la transformación de Laplace, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_i}{s-p_i} \right]$$

y teniendo en cuenta la Ec. (10.9) y las propiedades de linealidad, Ec. (10.19) y de desplazamiento frecuencial, Ec. (10.25), puede escribirse:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e^{p_i t} \cdot u(t) \quad (10.36)$$

De modo que una función racional propia del tipo de la Ec. (10.31) puede anti-
transformarse mediante la Ec. (10.36), cuyos coeficientes K_i pueden ser hallados mediante la Ec. (10.35).

Ejemplo: antitransformar por expansión en fracciones simples la siguiente función:

$$F(s) = 10 \frac{s+2}{s^3 + 8s^2 + 15s}$$

Las raíces del polinomio del denominador $s^3 + 8s^2 + 15s = 0$ son $p_1 = 0$; $p_2 = -3$; $p_3 = -5$

En consecuencia, puede escribirse:

$$F(s) = 10 \cdot \frac{s+2}{s(s+3)(s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+5}$$

donde los K_i se pueden calcular con la Ec. (10.35):

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \{ F(s) \cdot (s - p_1) \} = \lim_{s \rightarrow 0} 10 \cdot \frac{s+2}{(s+3)(s+5)} = \frac{20}{15}$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow (-3)} \{ F(s) (s - p_2) \} = \lim_{s \rightarrow (-3)} 10 \frac{s+2}{s(s+5)} = \frac{10}{6}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow (-5)} \{ F(s) (s - p_3) \} = \lim_{s \rightarrow (-5)} 10 \frac{s+2}{s(s+3)} = -3$$

Reemplazando los valores de los K_i y los p_i hallados en la Ec. (10.36) resulta:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^3 K_i \cdot e^{p_i t} u(t)$$

$$\therefore f(t) = \frac{20}{15} \cdot e^{0 \cdot t} u(t) + \frac{10}{6} e^{-3t} u(t) - 3 e^{-5t} u(t)$$

Cuando las raíces p_i del denominador son múltiples, la expansión en fracciones simples puede hacerse utilizando un polinomio en lugar del coeficiente K_i del término correspondiente a cada raíz múltiple del denominador, como se hace al resolver integrales de funciones racionales. Sin embargo, no se desarrollará el procedimiento, pues estos casos pueden ser resueltos en forma general como se indica en el párrafo siguiente.

10.6.3) Cálculo de residuos: Recuérdese que una función es *regular* u *holomorfa* en un punto, cuando es derivable en dicho punto y en un entorno del mismo. Para que la función sea regular en un recinto, debe serlo en todos los puntos del mismo. Cuando la función no es derivable en el punto, pero lo es en un entorno del mismo, se dice que en aquél existe una *singularidad aislada*. Si tampoco es derivable en el entorno, se trata de una *singularidad esencial* o punto de acumulación de singularidades.

Los modelos circuitales idealizados de constantes concentradas, lineales e invariantes en el tiempo, son descriptos mediante funciones racionales (cocientes de polinomios). Dichas funciones sólo tienen singularidades aisladas llamadas *polos*. Se denomina polo al valor de $s = p_i$, para el cual la inversa de la función $F(s)$ posee un *cero*.

$$\frac{1}{F(p_i)} = 0$$

Dicho de otro modo, se tiene un polo para un valor de $s = p_i$, cuando el límite para s tendiendo a p_i existe y es infinito:

$$\lim_{s \rightarrow p_i} F(s) = \infty$$

Se verá ahora el Teorema de la integral de Cauchy. Este afirma que una función regular en todos los puntos de una curva cerrada simple C y en su interior, como los abarcados por el recinto simplemente conexo de la Fig. 10.14, tiene una integral de valor nulo:

$$\int_C F(s) \cdot ds = 0 \tag{10.37}$$

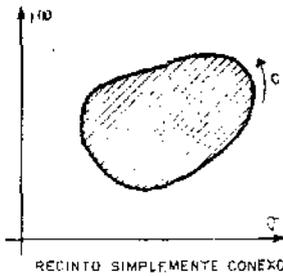


Fig. 10.14

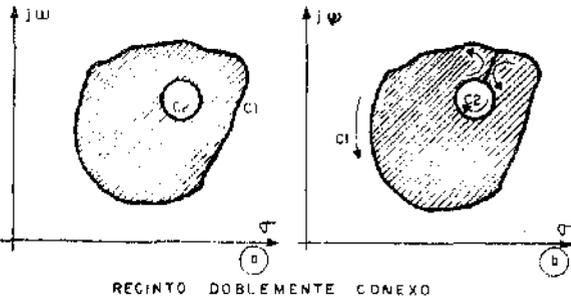


Fig. 10.15

El recinto debe quedar siempre a la izquierda de la curva para el sentido de circulación positivo.

Si se trata de un recinto doblemente conexo, como el de la Fig. 10.15.a), se lo puede reducir a uno simplemente conexo, "conectando" las dos curvas mediante un corte que al ser recorrido dos veces en sentidos opuestos, no contribuye al valor de la integral como se muestra en la Fig. 10.15.b).

Si la función $F(s)$ es regular en el recinto encerrado por las dos curvas y los sentidos de circulación son positivos, la integral es nula.

$$\int_{C_1} F(s) ds + \int_{C_2} F(s) ds = 0$$

Si se invierte el sentido de giro a lo largo de C_2 , resulta:

$$\int_{C_1} F(s) ds = \int_{C_2} F(s) ds \quad (10.38)$$

de donde se deduce que el resultado de la integral no depende del contorno elegido mientras se mantenga dentro de la región en la que la función es regular.

Si una función es regular en un recinto múltiplemente conexo, como el de la Fig. 10.16, resulta, dejando siempre el dominio a la izquierda de la curva:

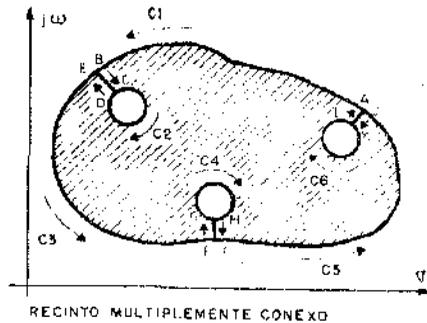


Fig. 10.16

$$\int_{C_1} F(s) ds + \int_{C_2} F(s) ds + \int_{C_3} F(s) ds + \int_{C_4} F(s) ds + \int_{C_5} F(s) ds + \int_{C_6} F(s) ds = 0$$

o bien, cambiando el sentido de C_3 , C_4 y C_5 .

$$\int_{C_1} F(s) ds + \int_{C_3} F(s) ds + \int_{C_5} F(s) ds = \int_{C_2} F(s) ds + \int_{C_4} F(s) ds + \int_{C_6} F(s) ds \quad (10.39)$$

La Ec. (10.39) expresa que el valor de la integral de una función regular en un recinto múltiplemente conexo, es igual a la suma de las integrales a lo largo de las curvas internas, recorridas todas en sentido anti-horario.

Considerando ahora la función:

$$F(s) = \frac{1}{s - p_1}$$

que es regular en todo el plano complejo, excepto en el punto $s = p_1$ en que presenta un polo. Calculando la integral de $F(s)$ a lo largo de una circunferencia C_1 como la de la Fig. 10.17, que tiene centro en p_1 y radio r . Si se llama φ al argumento, resulta:

$$s - p_1 = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\therefore ds = j r e^{j\varphi} d\varphi$$

en estas condiciones es:

$$\int_{C_1} F(s) ds = \int_{C_1} \frac{1}{s - p_1} ds = \int_0^{2\pi} j \frac{r e^{j\varphi} d\varphi}{r e^{j\varphi}} = \int_0^{2\pi} j d\varphi = 2\pi j \quad (10.40)$$

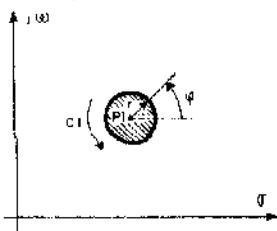


Fig. 10.17

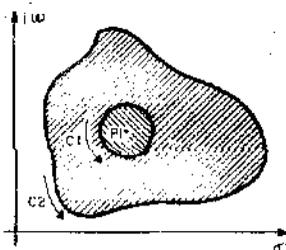


Fig. 10.18

De acuerdo a la Ec. (10.38), si se toma una curva C como la mostrada en la Fig. 10.18, que contiene en su interior a C_1 , al ser regular $F(s)$ entre las dos curvas y teniendo ambas sentido anti-horario, resulta:

$$\int_C F(s) ds = \int_{C_1} F(s) ds = 2\pi j \quad (10.41)$$

Esto significa que cualquiera sea la curva cerrada elegida, por ser la función $F(s)$ regular en todo el plano complejo, excepto en el punto p_1 en que presenta un polo, el resultado de la integral será el mismo.

Este valor sólo depende del punto p_i y de la función. Este importante resultado permite introducir el concepto de *residuo* de una función en un punto singular p_i , definiéndolo mediante la expresión:

$$\text{Res} [F(s)]_{s=p_i} = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(s) ds \quad (10.42)$$

Donde C es cualquier camino cerrado alrededor de la singularidad p_i , dentro del cual $F(s)$ es regular con la única excepción del punto p_i .

Generalizando, si se tiene una función $F(s)$ que es regular en un recinto C , salvo en N puntos p_i en los que existen singularidades aisladas, puede cortarse el recinto como se mostró en la Fig. 10.16 y en virtud de lo indicado por las Ecs. (10.39) y (10.42), resulta:

$$\int_C F(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^N \text{Res} [F(s)]_{s=p_i} \quad (10.43)$$

que es la expresión del teorema de los residuos, según el cual: "El valor de la integral de una función a lo largo de un camino cerrado C , es igual a la suma de los residuos de la función en cada una de las singularidades encerradas por C , multiplicada por $2\pi j$."

Si se aplica este teorema para calcular la integral de la fórmula de inversión de Mellin dada por la Ec. (10.18), resulta:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \sum_{i=1}^N \text{Res} [F(s) \cdot e^{st}]_{s=p_i} \\ \therefore f(t) &= \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^N \text{Res} [F(s) \cdot e^{st}]_{s=p_i} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Expresión importantísima válida sólo para $t > 0$, que permite una fácil determinación de la antitransformada en una gran cantidad de casos.

Los polos de $F(s)$ pueden ser simples o múltiples. Puede demostrarse en base a la serie de Laurent, que el valor del residuo en un polo múltiple de orden n , está dado por la expresión:

$$\text{Res} [F(s)]_{s=p_i} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-p_i)^n F(s)]_{s=p_i} \quad (10.45)$$

o en este caso:

$$\text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-p_i)^n F(s) e^{st}] \quad (10.46)$$

Para el caso de un polo simple, la Ec. (10.46) se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} &= \lim_{s \rightarrow p_i} [(s-p_i) F(s) e^{st}] \\ \therefore \text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} &= e^{p_i t} \lim_{s \rightarrow p_i} [(s-p_i) F(s)] \end{aligned}$$

que puede escribirse:

$$\text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} = e^{p_i t} \text{Res} [F(s)]_{s=p_i} \quad (10.47)$$

donde:

$$\text{Res} [F(s)]_{s=p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s-p_i) F(s)] \quad (10.48)$$

Reemplazando la Ec. (10.47) en la Ec. (10.44), resulta:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^N e^{p_i t} \text{Res} [F(s)]_{s=p_i} u(t) \quad (10.49)$$

donde se ha agregado $u(t)$, pues la Ec. (10.44) sólo vale para $t > 0$.

Comparando la Ec. (10.36) correspondiente a la expansión en fracciones simples con la Ec. (10.49) resulta que:

$$K_i = \text{Res} [F(s)]_{s=p_i} \quad (10.50)$$

Esto es, tal como se anticipó, el cálculo de residuos y la expansión en fracciones simples conducen al mismo resultado.

Resumiendo:

Para antitransformar una función $F(s)$ que posee N polos simples y múltiples p_i , se emplean las Ecs. (10.48) y (10.46).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^N \text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} u(t) \quad (10.44)$$

$$\text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-p_i)^n F(s) e^{st}] \quad (10.46)$$

donde n es el orden de multiplicidad del polo p_i .

Si todos los polos son simples, se utilizan las Ecs. (10.36) o (10.49) y la Ec. (10.51), que sintetiza las Ecs. (10.48) y (10.50).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s) e^{st}] = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t) \quad (10.36)$$

$$K_i = \text{Res} [F(s)]_{s=p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s-p_i) F(s)] \quad (10.51)$$

Ejemplo 1:

Antitrasformar:

$$F(s) = 8 \frac{s}{(s+1)^2 (s+2)}$$

como existe un polo simple y uno doble, se emplearán las Ecs. (10.44) y (10.46)

Se calcularán los residuos. La Ec. (10.46) se reduce a la siguiente, para $n=2$:

$$\text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d}{ds} [(s-p_i)^2 F(s) e^{st}]$$

y en éste caso, para $p_1 = -1$:

$$\begin{aligned} \text{Res} [F(s) e^{st}]_{s=-1} &= \lim_{s \rightarrow (-1)} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{8s}{(s+1)^2 (s+2)} e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow (-1)} \left[8 \frac{(s+2) - s}{(s+2)^2} e^{st} + 8 \frac{s}{s+2} t e^{st} \right] = 16 e^{-t} - 8 t e^{-t} \end{aligned} \quad (10.52)$$

El residuo para $p_2 = -2$ es, por tratarse de un polo simple:

$$\text{Res} [F(s) \cdot e^{st}]_{s=-2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} \left[(s+2) \frac{8}{(s+1)^2 (s+2)} e^{st} \right] = -16 e^{-2t} \quad (10.53)$$

Reemplazando las Ecs. (10.52) y (10.53) en la Ec. (10.44) se obtiene:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = (16 e^{-t} - 8 t e^{-t} - 16 e^{-2t}) u(t)$$

Ejemplo 2:

Hallar la transformada inversa de:

$$F(s) = 20 \frac{s + 2}{5s^3 + 20s^2 + 15s} \quad (10.54)$$

En primer término se deben hallar los polos. Es importante destacar que antes de hallar las raíces del polinomio del denominador se debe lograr que el coeficiente del término de mayor grado sea unitario. Dividiendo numerador y denominador por 5 resulta:

$$F(s) = 4 \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s} \quad (10.55)$$

Los polos son:

$$s^3 + 4s^2 + 3s = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -3 \end{cases}$$

Por lo que la Ec. (10.55) se puede escribir:

$$F(s) = 4 \frac{s + 2}{(s + 0)(s + 1)(s + 3)} \quad (10.56)$$

Nótese que de haber operado directamente con la Ec. (10.54) se habría obtenido la siguiente ecuación errónea:

$$F(s) = 20 \frac{s + 2}{(s + 0)(s + 1)(s + 3)}$$

ya que,

$$5s^3 + 20s^2 + 15s = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -3 \end{cases}$$

Puesto que todos los polos de la Ec. (10.56) son simples, se efectuará el cálculo de los residuos mediante la Ec. (10.51):

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot 4 \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right] = \frac{8}{3}$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow (-1)} \left[(s+1) \cdot 4 \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right] = -2$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow (-3)} \left[(s+3) \cdot 4 \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} \right] = -\frac{2}{3}$$

y según la Ec. (10.36):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \sum_{i=1}^3 K_i e^{p_i t} u(t) = \left(\frac{8}{3} e^{0t} - 2 e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-3t} \right) u(t)$$

10.6.4) Determinación de la respuesta de un circuito utilizando la transformada de Laplace como una herramienta matemática: Se considerará el circuito de la Fig. 10.19 y se hallará el valor de la corriente utilizando la metodología indicada en el diagrama de la Fig. 10.20.

Aplicando la 2da. regla de Kirchoff resulta:

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Transformando ambos miembros, se obtiene:

$$\mathcal{L} [v(t)] = R \mathcal{L} [i(t)] + L \left\{ s \mathcal{L} [i(t=0)] \right\}$$

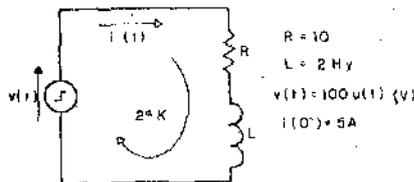


Fig. 10.19

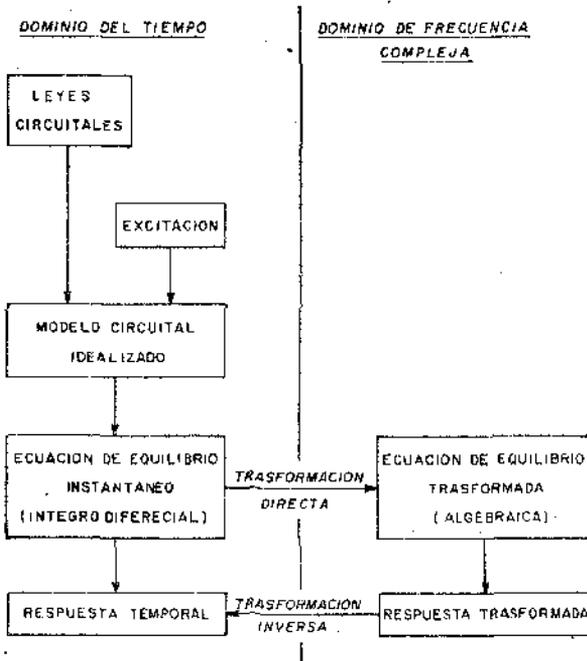


Fig. 10.20

y como, $\mathcal{L} [v(t)] = \mathcal{L} [100 u(t)] = \frac{100}{s}$

$\mathcal{L} [i(t)] = I(s)$

$i(t = 0^-) = 5 \text{ A}$

puede escribirse:

$$\frac{100}{s} = R I(s) + s L I(s) - L \cdot 5$$

Reemplazando los valores de R y L y despejando $I(s)$, se obtiene:

$$I(s) = \frac{\frac{100}{s} + 10}{2s + 10} = \frac{100 + 10s}{s(2s + 10)}$$

que puede escribirse:

$$I(s) = 5 \frac{s + 10}{s(s + 5)}$$

$I(s)$ posee dos polos simples $p_1 = 0$ y $p_2 = -5$.

Calculando los residuos con la Ec. (10.51), resulta:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot 5 \frac{s + 10}{s(s + 5)} \right] = 10$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow (-5)} \left[(s + 5) \cdot 5 \frac{s + 10}{s(s + 5)} \right] = -5$$

y reemplazando en la Ec. (10.36):

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} [I(s)] = \sum_{i=1}^2 K_i \cdot e^{p_i t} u(t) = (10 \cdot e^{0t} - 5 \cdot e^{-5t}) u(t) A$$

Nótese que las condiciones iniciales quedan automáticamente incorporadas a la solución, al aplicar la transformación de Laplace.

10.7 Planteo y solución de problemas en el dominio transformado de Laplace

10.7.1) Introducción: El diagrama de flujo de la Fig. 10.20 puede ser modificado como se indica en la Fig. 10.21. En estas condiciones, la transformación de Laplace deja de ser solamente una herramienta matemática; para convertirse en una parte integrante de la Teoría de Circuitos, permitiendo una mayor riqueza conceptual y una mejor eficiencia operativa.

La Fig. 10.21 muestra que es necesario aplicar la transformación directa de Laplace a las leyes circuitales, las excitaciones y los circuitos. Puede observarse la gran similitud entre este planteo y el desarrollo del Cap. 7. Es razonable que así sea, ya que el dominio de frecuencia imaginaria es un caso particular del dominio de frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$, para $\sigma = 0$.

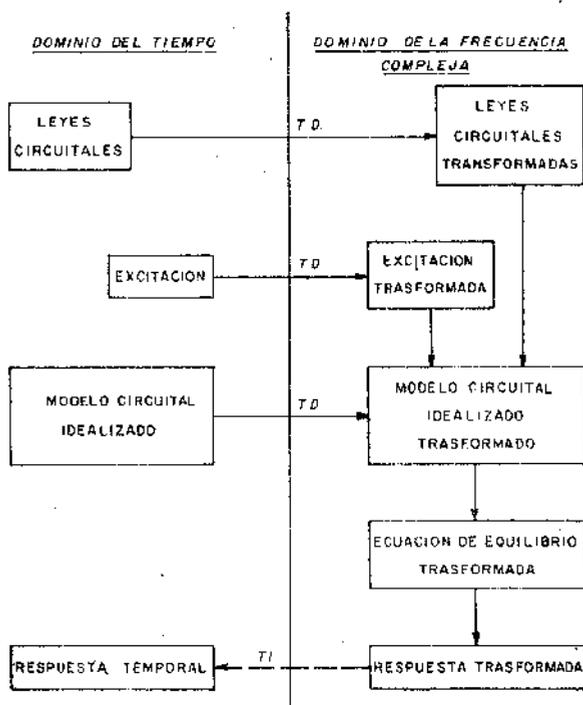


Fig. 10.21

10.7.2) **Trasformación de las leyes circuitales:** En el dominio temporal, las leyes de Kirchhoff son:

$$\sum_{K=1}^n i_K(t) = 0$$

$$\sum_{K=1}^n v_K(t) = 0$$

Aplicando la transformación de Laplace, resulta:

$$\sum_{K=1}^n I_K(s) = 0 \quad (10.57)$$

$$y \sum_{K=1}^n V_K(s) = 0 \quad (10.58)$$

10.7.3) Transformación de las excitaciones: En este caso se trata simplemente de aplicar la transformación directa de Laplace a la señal de excitación. En el apartado 10.4.4 se desarrollaron 6 ejemplos de cálculos para señales simples. En la práctica se utilizan tablas de pares de transformadas del tipo ejemplificado en la Fig. 10.13. En los manuales de ingeniería electrónica o de fórmulas y tablas matemáticas y físicas, existen tabulaciones muy completas, que permiten resolver la mayoría de los casos que se presentan.

10.7.4) Transformación de los circuitos: En la parte izquierda de la Fig. 10.22 se han dibujado los modelos circuitales del resistor, el inductor y el capacitor ideales en el dominio del tiempo. Se hallarán ahora los modelos circuitales transformados, aplicando la transformación directa de Laplace a las ecuaciones que vinculan tensión y corriente en el dominio temporal.

En el caso del resistor es:

$$v(t) = R \ i(t)$$

cuya ecuación transformada es:

$$V(s) = R \ I(s) \quad (10.58)$$

En la Fig. 10.22.d) se ha dibujado el modelo que corresponde a la Ec. (10.58). Para el inductor se parte de:

$$v(t) = L \ \frac{di(t)}{dt}$$

la ecuación transformada resulta:

$$V(s) = sL \ I(s) - L \ i(t=0^+) \quad (10.59)$$

En los casos en que el circuito asociado no admite un impulso de tensión entre los extremos del inductor, las condiciones de continuidad conducen a:

$$i_L(t=0^+) = i_L(t=0^-)$$

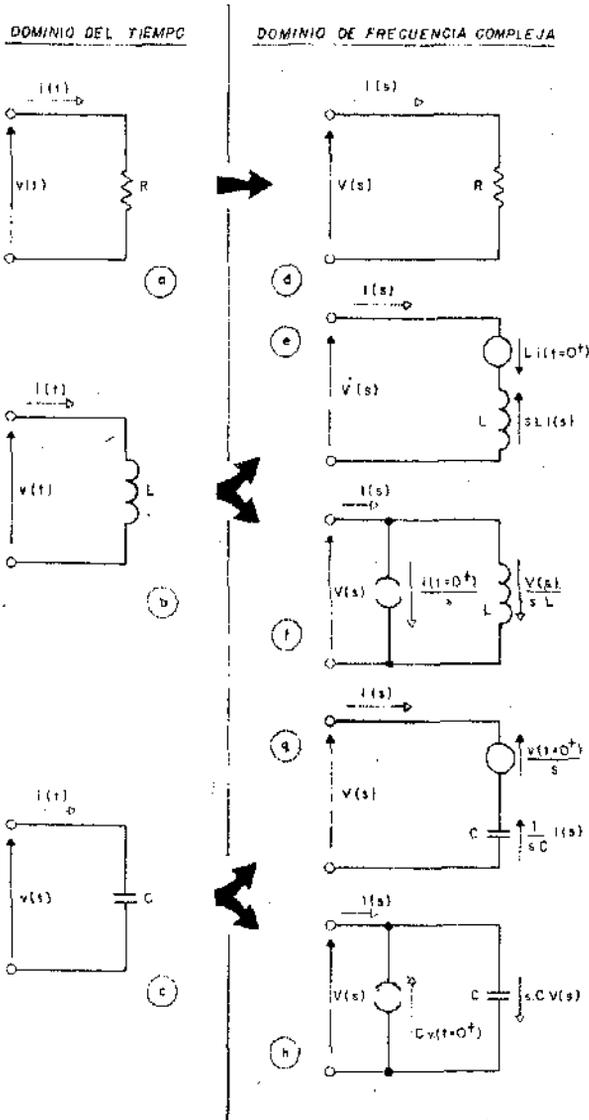


Fig. 10.22

despejando $I(s)$ queda:

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(t=0^+)}{s} \quad (10.60)$$

El primer término de la Ec. (10.59) es una tensión proporcional a la corriente, la inductancia y la frecuencia compleja. Obviamente, corresponde a la tensión sobre la inductancia. El segundo término es una tensión que no depende del valor de $I(s)$. Es por lo tanto un generador de tensión. Como su valor depende de la corriente $i(t=0^+)$, se lo denomina *generador de condición inicial*. El circuito de la Fig. 10.22.e) corresponde a la Ec. (10.59), ya que aplicando en él la 2da. ley de Kirchhoff se obtiene dicha ecuación.

El primer término de la Ec. (10.60) es una corriente proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la inductancia y la frecuencia. Resulta claro que representa la corriente que atraviesa la inductancia. El segundo término es una corriente que no depende de $V(s)$. Por consiguiente, se trata de un generador ideal de corriente. Como su valor depende de $i(0^+)$, se trata de un generador de condición inicial. El circuito que corresponde a la Ec. (10.60) es el de la Fig. 10.22.f), ya que aplicando la 1ra. ley de Kirchhoff se obtiene dicha ecuación.

Para analizar el capacitor, se parte de:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

cuya transformada de Laplace es:

$$I(s) = sC V(s) - CV(t=0^+) \quad (10.61)$$

y despejando $V(s)$ se obtiene:

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V(t=0^+)}{s} \quad (10.62)$$

Con un análisis similar al hecho para el inductor, resultan para el capacitor dos circuitos equivalentes en el dominio de frecuencia. A partir de la Ec. (10.62) se obtiene el circuito de la Fig. 10.22.g) y a partir de la Ec. (10.61) el de la Fig. 10.22.h).

En los casos en que el circuito asociado no admite la circulación de un impulso de corriente a través del capacitor, las condiciones de continuidad conducen a:

$$v_C(t=0^+) = v_C(t=0^-)$$

La elección del modelo transformado más adecuado, depende de la geometría del circuito. Así para un asociación en serie de elementos, conviene emplear los de las Fig. 10.22.e y g), mientras que para los elementos conectados en paralelo es preferible emplear los de las Fig. 10.22.f y h).

Ejemplo 1:

Hallar el modelo circuitual transformado correspondiente al circuito de la Fig. 10.23.a).

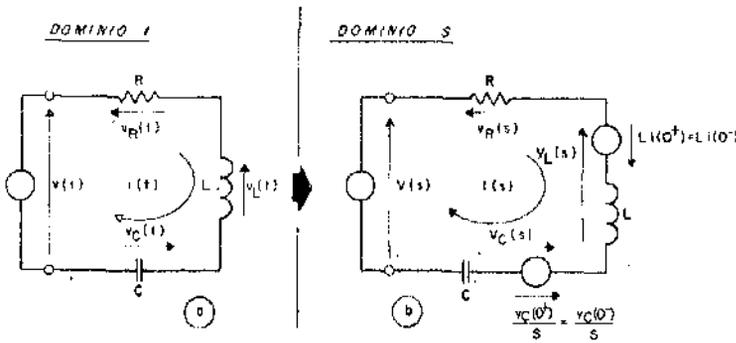


Fig. 10.23

Como se trata de una asociación en serie, se utilizan los modelos circuitales transformados con generadores de condiciones iniciales de tensión, resulta el circuito de la Fig. 10.23. b).

Ejemplo 2:

Hallar el modelo circuitual transformado del circuito de la Fig. 10.24.a).

Empleando los modelos con generadores iniciales de corriente, por tratarse de una asociación en paralelo, se obtiene el circuito de la Fig. 10.24.b).

Si la asociación es mixta, en los tramos con elementos en serie se usan generadores de condiciones iniciales de tensión y en las partes con elementos en paralelo se usan generadores de condiciones iniciales de corriente.

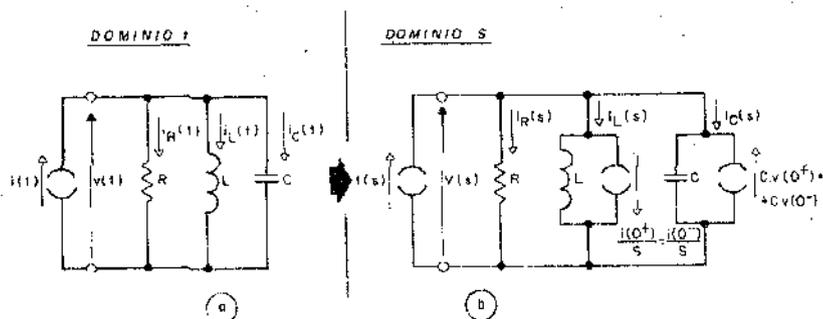


Fig. 10.24

10.7.5) **Immitancias de excitación operacionales:** Considérese el circuito de la Fig. 10.23.b).

Aplicando la 2da ley de Kirchhoff trasformada, resulta:

$$V(s) + L i(0^-) - \frac{V_C(0^-)}{s} = R I(s) + s L I(s) + \frac{1}{s C} I(s)$$

Considerando *condiciones iniciales nulas* (C.I.N.) y despejando $I(s)$ queda:

$$I(s) = \frac{1}{R + s L + \frac{1}{s C}} V(s)$$

Es decir que, tal como ocurrió en el Cap. 7, la respuesta está vinculada con la excitación a través de una función operacional que se denominará $H(s)$, que depende de la geometría del circuito, los parámetros circuiales R - L - C y la frecuencia compleja s . En forma genérica puede escribirse:

$$R(s) = H(s) \cdot E_X(s) \quad (10.63)$$

donde $R(s)$ y $E_X(s)$ son, respectivamente, la respuesta y la excitación transformadas.

Se introducirán ahora dos casos particulares de $H(s)$, la impedancia y la admitancia de excitación. La impedancia de excitación $Z(s)$ se define como el cociente de la tensión y la corriente transformadas, para condiciones iniciales nulas (CIN):

$$Z(s) = \left. \frac{V(s)}{I(s)} \right|_{CIN}$$

La admitancia de excitación $Y(s)$ es la inversa de $Z(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \quad] \text{ C/N}$$

En el cuadro de la Fig. 10.25 se indican las expresiones de la impedancia y la admitancia de excitación para el resistor, el inductor y el capacitor ideales.

ELEMENTO	$Z(s)$	$Y(s)$
RESISTOR	R	$\frac{1}{R}$
INDUCTOR	sL	$\frac{1}{sL}$
CAPACITOR	$\frac{1}{sC}$	sC

Fig. 10.25

Puesto que las definiciones coinciden formalmente con las del Cap. 7, las leyes de asociación en serie y en paralelo halladas en él son válidas en el plano de frecuencia compleja. Esto es:

Asociación en serie $Z_T(s) = \sum_{K=1}^n Z_K(s)$

Asociación en paralelo $\frac{1}{Y_T(s)} = \sum_{K=1}^m \frac{1}{Y_K(s)}$

En muchos casos puede hallarse las immitancias de excitación por asociación de elementos en serie o en paralelo, como se hizo en el dominio $j\omega$.

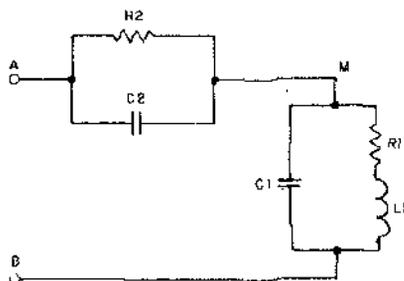


Fig. 10.26

Ejemplo: Hallar la impedancia de excitación $Z_{AB}(s)$ del circuito de la Fig. 10.26. Se comienza hallando la impedancia de la rama formada por R_1 y L_1 :

$$Z_{L_1 R_1}(s) = R_1 + sL_1$$

la admitancia correspondiente es:

$$Y_{L_1 R_1}(s) = \frac{1}{R_1 + sL_1}$$

La admitancia del paralelo formado por $Y_{L_1 R_1}(s)$ y C_1 resulta:

$$Y_{MB}(s) = sC_1 + \frac{1}{R_1 + sL_1}$$

la impedancia correspondiente es:

$$Z_{MB}(s) = \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_1 + sL_1}}$$

La admitancia del paralelo $R_2 C_2$ es:

$$Y_{AM}(s) = sC_2 + \frac{1}{R_2}$$

invirtiendo resulta:

$$Z_{AM}(s) = \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2}}$$

Resultando finalmente la impedancia buscada:

$$Z_{AB}(s) = Z_{AM}(s) + Z_{MB}(s) = \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_1 + sL_1}}$$

10.7.6) Funciones operacionales de los circuitos

La Ec. (10.63):

$$R(s) = H(s) \cdot E_X(s) \quad (10.63)$$

muestra que la respuesta transformada $R(s)$ puede ser hallada multiplicando la excitación transformada $E_X(s)$ por una función operacional del circuito.

$H(s)$ es una función algebraica, generalmente un cociente de polinomios y puede ser hallada frecuentemente sin necesidad de plantear la ecuación de equilibrio transformada, como se vio en el ejemplo del párrafo anterior.

$H(s)$ puede vincular tensión y corriente en el mismo par de terminales (función operacional de excitación) o bien relacionar tensión y/o corriente en distintos pares de terminales (función operacional de transferencia).

Los casos posibles son los siguientes:

- a 1) Si $R(s)$ es la tensión en un par de terminales y $E_X(s)$ es la corriente en el mismo par de terminales, resulta la impedancia de excitación en el par de terminales α .

$$Z_{\alpha}(s) = \left. \frac{V_{\alpha}(s)}{I_{\alpha}(s)} \right]_{CIN} \quad (10.64)$$

- a 2) Si $R(s)$ es la corriente y $E_X(s)$ la tensión en el mismo par de terminales, se obtiene la admitancia de excitación en el par de terminales α .

$$Y_{\alpha}(s) = \left. \frac{I_{\alpha}(s)}{V_{\alpha}(s)} \right]_{CIN} \quad (10.65)$$

- b 1) Si $R(s)$ es la tensión $V_{\alpha}(s)$ en un par de terminales y $E_X(s)$ es la corriente $I_{\beta}(s)$ en otro par de terminales, resulta la impedancia de transferencia entre los pares de terminales α y β .

$$Z_{T\alpha\beta}(s) = \left. \frac{V_{\alpha}(s)}{I_{\beta}(s)} \right]_{CIN} \quad (10.66)$$

- b 2) Si $R(s)$ es la corriente $I_{\alpha}(s)$ en un par de terminales y $E_X(s)$ es la tensión $V_{\beta}(s)$ en otro par de terminales, se obtiene la admitancia de transferencia entre los pares de terminales α y β .

$$Y_{T\alpha\beta}(s) = \left. \frac{I_{\alpha}(s)}{V_{\beta}(s)} \right]_{CIN} \quad (10.67)$$

- b 3) Si $R(s)$ y $Ex(s)$ son, respectivamente las tensiones $V_\alpha(s)$ y $V_\beta(s)$ en dos pares de terminales α y β , resulta la transmitancia o trasferencia de tensiones entre dichos pares de terminales.

$$A_{V\alpha\beta}(s) = \left. \frac{V_\alpha(s)}{V_\beta(s)} \right]_{CIN} \quad (10.68)$$

- b 4) Si $R(s)$ es la corriente $I_\alpha(s)$ en un par de terminales y $Ex(s)$ es la corriente $I_\beta(s)$ en otro par de terminales, se obtiene la transmitancia o trasferencia de corrientes entre los pares de terminales α y β .

$$A_{I\alpha\beta}(s) = \left. \frac{I_\alpha(s)}{I_\beta(s)} \right]_{CIN} \quad (10.69)$$

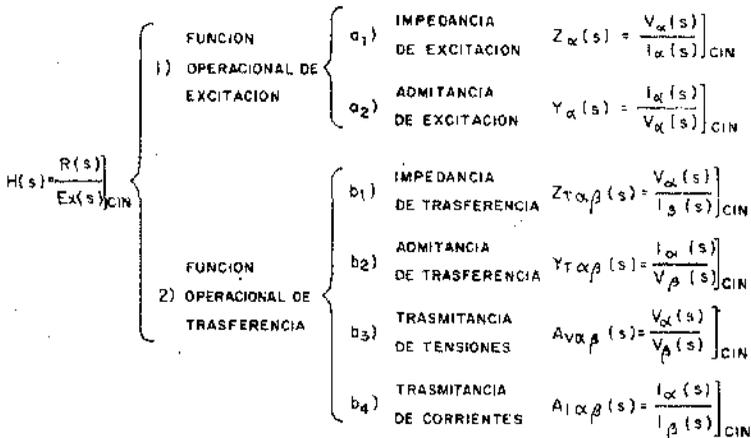
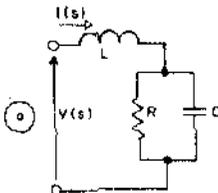


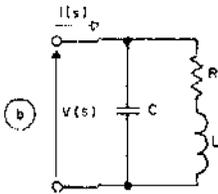
Fig. 10.27

En el cuadro sinóptico de la Fig. 10.27 se resumen los casos posibles y en la Fig. 10.28 se muestra ejemplos de cada una de las funciones operacionales definidas. Para calcularlas se halla la expresión de una de las variables del cociente



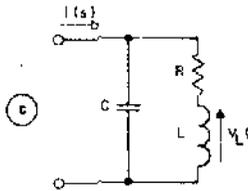
IMPEDANCIA DE EXCITACION

$$Z(s) = \left. \frac{V(s)}{I(s)} \right|_{CIN} = sL + \frac{1}{sC + \frac{1}{R}}$$



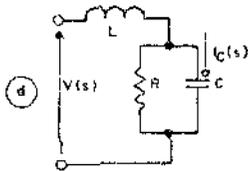
ADMITANCIA DE EXCITACION

$$Y(s) = \left. \frac{I(s)}{V(s)} \right|_{CIN} = sC + \frac{1}{R + sL}$$



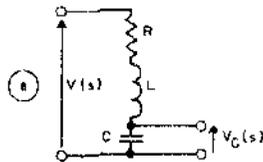
IMPEDANCIA DE TRASFERENCIA

$$Z_T(s) = \left. \frac{V_L(s)}{I(s)} \right|_{CIN} = \frac{sL}{s^2LC + sCR + 1}$$



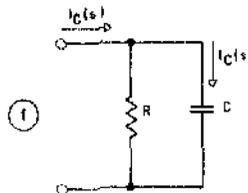
ADMITANCIA DE TRASFERENCIA

$$Y_T(s) = \left. \frac{I_C(s)}{V(s)} \right|_{CIN} = \frac{sC}{s^2LC + \frac{1}{R} + 1}$$



TRASMITANCIA DE TENSIONES

$$A_V(s) = \left. \frac{V_C(s)}{V(s)} \right|_{CIN} = \frac{1}{s^2LC + sCR + 1}$$



TRASMITANCIA DE CORRIENTES

$$A_I(s) = \left. \frac{I_C(s)}{I(s)} \right|_{CIN} = \frac{sC}{sC + \frac{1}{sR}}$$

Fig. 10.28

en función de la otra. Por ejemplo, para la Fig. 10.28.d), se comienza por calcular la tensión sobre el paralelo, en base a la relación de división de tensión:

$$V_p(s) = \frac{Z_p(s)}{sL + Z_p(s)} = V(s) \frac{1}{\frac{sL}{Z_p(s)} + 1} = V(s) \frac{1}{1 + sL Y_p(s)}$$

$$\therefore V_p(s) = V(s) \frac{1}{1 + sL \left(sC + \frac{1}{R} \right)} = V(s) \frac{1}{1 + s^2 LC + \frac{sL}{R}}$$

La corriente sobre el capacitor resulta:

$$I_C(s) = sC V_p(s) = sC V(s) \frac{1}{1 + s^2 LC + \frac{sL}{R}} = V(s) \frac{sC}{s^2 LC + \frac{sL}{R} + 1}$$

Finalmente, reemplazando la expresión de $I_C(s)$ en función de $V(s)$ en la Ec. (10.67) queda:

$$Y_T(s) = I_C(s)$$

$$Y_T(s) = \left. \frac{I_C(s)}{V(s)} \right]_{CIN} = \frac{\frac{1}{s} C}{s^2 LC + \frac{sL}{R} + 1}$$

10.8 Influencia de los polos de $H(s)$ y $E_X(s)$ sobre la respuesta temporal

Se parte de la Ec. (10.63):

$$R(s) = H(s) \cdot E_X(s) \quad (10.63)$$

Supóngase que, como es habitual en teoría de circuitos, tanto $H(s)$ como $E_X(s)$ son cocientes de polinomios en los cuales el grado del denominador es superior al del numerador. Esto es:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} \quad (10.70)$$

$$E_X(s) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} \quad (10.71)$$

Reemplazando las Ecs. (10.70) y (10.71) en la Ec. (10.63) y expresando los polinomios de los denominadores en función de los polos, resulta:

$$R(s) = \frac{N_H(s)}{(s-p_{H1})(s-p_{H2}) \cdots (s-p_{Hi}) \cdots (s-p_{Hm})} \cdot \frac{N_E(s)}{(s-p_{E1})(s-p_{E2}) \cdots (s-p_{Ej}) \cdots (s-p_{Em})}$$

donde p_{Hi} son los polos de $H(s)$ y p_{Ej} los polos de $E_X(s)$.

Descomponiendo en fracciones simples queda:

$$R(s) = \sum \frac{K_{Hi}}{s-p_{Hi}} + \sum \frac{K_{Ej}}{s-p_{Ej}} \quad (10.72)$$

donde K_{Hi} y K_{Ej} son los residuos de $R(s)$ en los polos p_{Hi} de $H(s)$ y p_{Ej} de $E_X(s)$ respectivamente, que pueden ser calculados con la Ec. (10.51).

Recordando que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_i}{s-p_i} \right] = K_i e^{-p_i t} u(t)$$

puede escribirse:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[R(s) \right] = \sum_{i=1}^m K_{Hi} e^{-p_{Hi} t} u(t) + \sum_{j=1}^n K_{Hj} e^{-p_{Ej} t} u(t) \quad (10.73)$$

Los términos de la primera sumatoria dependen fundamentalmente de $H(s)$, por lo que se denominan *componentes libres o naturales* de la respuesta transitoria. La forma de cada componente está determinada por los polos p_{Hi} , que se denominan *frecuencias libres o naturales* de la respuesta.

Los términos de la segunda sumatoria dependen fundamentalmente de $E_X(s)$, por lo que se denominan *componentes forzadas* de la respuesta transitoria y los polos p_{Ej} *frecuencias forzadas* de la misma.

Este resultado es razonable, si se tiene en cuenta que los polos de $H(s)$ son las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial de equilibrio instantáneo estudiado en el Cap. 5. En efecto, para un circuito RLC paralelo, la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d i_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} i(t)$$

y la ecuación característica asociada a la homogénea:

$$B^2 + \frac{1}{RC} B + \frac{1}{LC} = 0$$

cuyas raíces son:

$$B_{1;2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (10.74)$$

Se calculará ahora, en el dominio transformado de Laplace, la función operacional $H(s)$ que relaciona la corriente en el inductor con la de excitación del circuito RLC considerado:

$$H(s) = \left. \frac{I_L(s)}{I(s)} \right]_{CIN} = \frac{\frac{1}{sL}}{sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Los polos de $H(s)$ se obtienen anulando el denominador:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\therefore p_{1;2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (10.75)$$

Como puede apreciarse las raíces de la ecuación característica calculadas en la Ec. (10.74) coinciden con los polos de $H(s)$ dados por la Ec. (10.75).

10.9 Obtención de la respuesta temporal por convolución

10.9.1) **Introducción:** En los Cap. 3 a 5 se describió la forma de hallar la respuesta temporal a partir del circuito. En el párrafo 10.7.5 se introdujo la caracterización del circuito por una función operacional $H(s)$, de modo que si ésta es conocida, se puede prescindir del modelo circuital para hallar su respuesta. Se verá ahora que la respuesta a una señal arbitraria puede ser obtenida en función de la respuesta al impulso o el escalón unitarios. Esto es particularmente importante cuando la excitación no es trasformable o está dada en forma gráfica o experimental.

10.9.2) **Producto de convolución:** Dadas dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, se denomina producto de composición, producto de convolución o simplemente *convolución* $f(t) * g(t)$ al resultado de la siguiente integral:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (10.75)$$

Se verán algunas propiedades; haciendo el cambio de variable $t - \tau = u \therefore \tau = t - u$ y $d\tau = -du$, corrigiendo los límites de integración resulta:

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_t^0 f(u) g(t-u) (-du) = \\ &= \int_0^t g(t-u) f(u) du = g(t) * f(t) \end{aligned} \quad (10.76)$$

$$\text{esto es: } f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (10.77)$$

Además, por la linealidad de la integral es:

$$A f(t) * B g(t) = A B [f(t) * g(t)] \quad (10.78)$$

En la Fig. 10.29 puede verse la interpretación gráfica del producto de convolución. En a) se muestra la función $f(\tau)$, en b) $f(-\tau)$ y en c) $f(t-\tau)$. En d) se ha representado $g(\tau)$ y en e) se incluyen $f(t-\tau)$, $g(\tau)$ y el producto de ambas. El área encerrada por la función $f(t-\tau) g(\tau)$ entre 0 y t es el valor del producto de convolución $f(t) * g(t)$. Para cada t considerado se obtiene un área distinta, como se muestra en la Fig. 10.30. Representando los valores S_i de las áreas, en función de los tiempos t_i correspondientes, se obtiene la función $f(t) * g(t)$, como se aprecia en la Fig. 10.30.f.

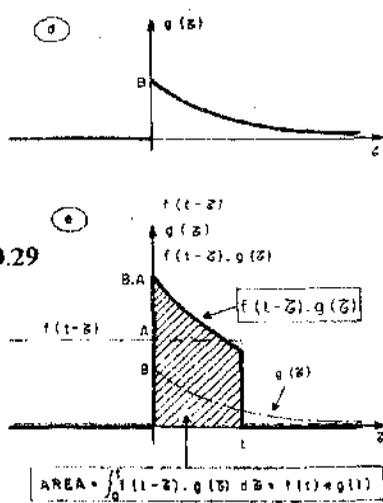
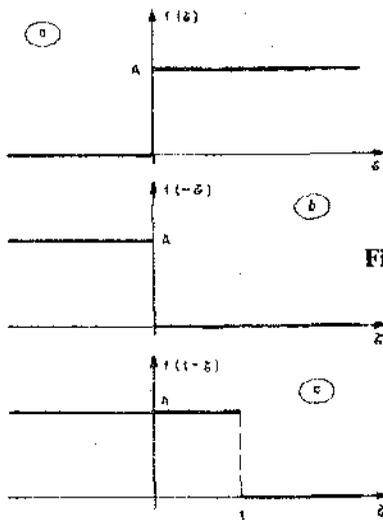


Fig. 10.29

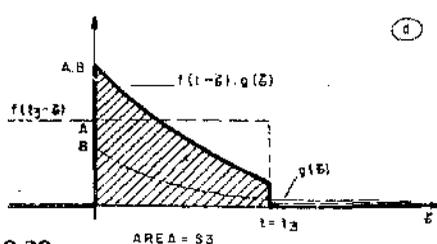
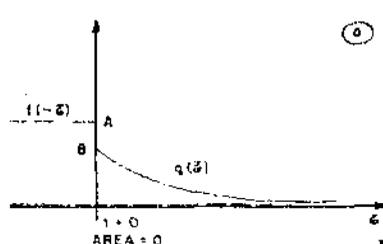
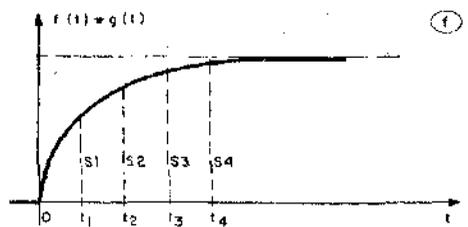
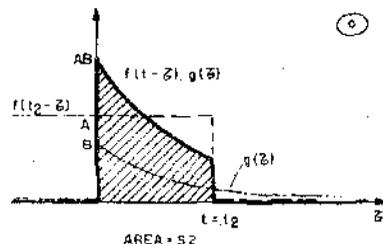
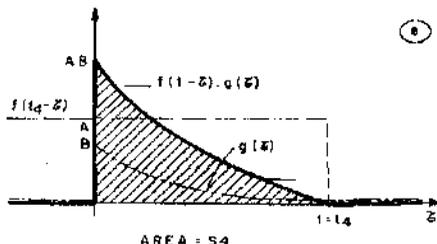
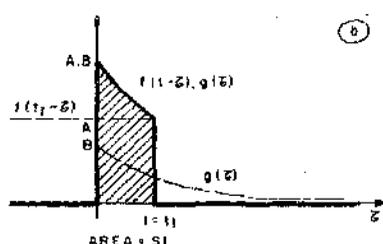


Fig. 10.30



10.9.3) **Teorema de convolución:** Sean dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, cuyas transformadas de Laplace son $F(s)$ y $G(s)$. El teorema de convolución, o de HORN-BOREL, afirma que si las integrales de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ son absolutamente convergentes en $s = s_0$, entonces también es absolutamente convergente en s_0 la integral del producto de convolución dada por la Ec. (10.75) y se verifica que:

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L} \{ f(t) * g(t) \} \quad (10.79)$$

Para demostrar la Ec. (10.79), se escribe el producto de las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, usando las variables x e y en lugar de t , para facilitar la comprensión del desarrollo. La convergencia absoluta de las integrales permite efectuar los cambios siguientes:

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left[\int_{x=0}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \right] \left[\int_{y=0}^{\infty} g(y) e^{-sy} dy \right] = \\ &= \iint_C f(x) g(y) e^{-s(x+y)} dx dy \end{aligned} \quad (10.80)$$

donde el recinto de integración C es el primer cuadrante del plano $x-y$ completo.

Efectuando el cambio de variables:

$$\begin{cases} z = x \\ t = x + y \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = z \\ y = t - z \end{cases} \quad (10.81)$$

La relación entre las diferenciales de área, hallada utilizando el jacobiano resulta:

$$\begin{aligned} dx dy &= \left| J \begin{pmatrix} x, y \\ z, t \end{pmatrix} \right| d z dt = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta z} & \frac{\delta y}{\delta z} \\ \frac{\delta x}{\delta t} & \frac{\delta y}{\delta t} \end{vmatrix} d z dt = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} d z dt = d z dt \end{aligned} \quad (10.82)$$

Falta analizar los nuevos límites de integración: siendo $t = x + y = z + y$ y puesto que $y \geq 0$ por el recinto de integración C de la Ec. (10.80) el primer

cuadrante, resulta que $t \geq z$, donde z varía de cero a ∞ . En consecuencia, el dominio de integración es el rayado en la Fig. 10.31. Al integrar, para cada valor de t , z varía de 0 a t para $0 \leq t < \infty$.

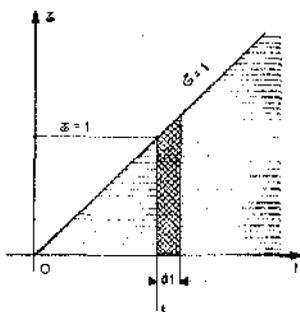


Fig. 10.31

Teniendo en cuenta las Ecs. (10.81) y (10.82) y los nuevos límites de integración, la Ec. (10.80) puede escribirse:

$$F(s) G(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{z=0}^t f(z) g(t-z) dz \right] e^{-st} dt$$

o también, teniendo en cuenta la Ec. (10.76):

$$F(s) G(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{z=0}^t f(t-z) g(z) dz \right] e^{-st} dt$$

Finalmente, considerando la Ec. (10.75) resulta:

$$F(s) G(s) = \mathcal{L} \{ f(t) * g(t) \} \quad (10.79)$$

Este teorema es de gran importancia para la teoría de circuitos, como se podrá apreciar en los párrafos siguientes.

10.9.4) **Antitransformación empleando el teorema de convolución:** Cuando se debe antitransformar una expresión que puede descomponerse en el producto de dos funciones cuyas transformadas inversas son conocidas, el teorema de convolución permite resolver el problema ventajosamente.

Ejemplo 1: Antitrasformar la respuesta frecuencial:

$$R(s) = \frac{A_0}{(s-p_1)(s-p_2)} \quad (10.83)$$

La Ec. (10.83) puede escribirse:

$$R(s) = F(s) G(s) \quad (10.84)$$

donde:

$$F(s) = \frac{A_0}{s-p_1} \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{1}{s-p_2}$$

cuyas antitrasformadas son:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = A_0 e^{p_1 t} u(t) \quad (10.85)$$

$$\text{y } g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)] = e^{p_2 t} u(t) \quad (10.86)$$

De acuerdo a la Ec. (10.79), puede escribirse:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = \mathcal{L}^{-1} [F(s) G(s)] = f(t) * g(t)$$

donde, según la Ec. (10.75) es:

$$r(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

y teniendo en cuenta las Ecs. (10.85) y (10.86):

$$r(t) = \int_0^t A_0 e^{p_1(t-\tau)} e^{p_2 \tau} d\tau \quad \text{válida para } t > 0$$

$$\text{o } r(t) = A_0 e^{p_1 t} \int_0^t e^{(p_2-p_1)\tau} d\tau = A_0 e^{p_1 t} \left[\frac{e^{(p_2-p_1)\tau}}{p_2-p_1} \right]_0^t$$

resultando finalmente:

$$r(t) = \frac{A_0}{p_2-p_1} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) u(t)$$

Ejemplo 2: Hallar la corriente que cirula cuando se aplica la tensión:

$$v(t) = \frac{V}{T_a} t u(t) \quad (10.87)$$

a un circuito con condiciones iniciales nulas, cuya admitancia de excitación es:

$$Y(s) = \frac{1}{R + sL} = \frac{1}{L} \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

La trasformada inversa de $Y(s)$ es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t} u(t) \quad (10.88)$$

Aplicando el teorema de convolución a $I(s) = Y(s) V(s)$, resulta:

$$i(t) = y(t) * v(t) = \int_0^t y(t-z) V(z) dz$$

y teniendo en cuenta las Ecs. (10.87) y (10.88):

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-z)} \cdot \frac{V}{T_a} z dz = \\ &= \frac{V}{T_a L} e^{-\frac{R}{L} t} \int_0^t e^{\frac{R}{L} z} z dz \quad \text{válida para } t > 0 \\ \therefore i(t) &= \frac{V}{T_a L} e^{-\frac{R}{L} t} \left[\frac{e^{\frac{R}{L} z}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2} \left(\frac{R}{L} z - 1\right) \right]_0^t = \\ &= \frac{VL}{T_a R^2} e^{-\frac{R}{L} t} \left[e^{\frac{R}{L} t} \left(\frac{R}{L} t - 1\right) + 1 \right] \end{aligned}$$

resultando finalmente:

$$i(t) = \frac{V}{T_a R} \left(t - \frac{L}{R} \right) + \frac{VL}{T_a R^2} e^{-\frac{R}{L} t} \quad \text{válida para } t > 0$$

Nótese que aun cuando la excitación esté dada en forma gráfica (oscilograma) o no posea transformada de Laplace, la respuesta puede ser hallada calculando el producto de convolución integrando gráficamente como se hizo en la Fig. 10.30.

10.9.5) Significado de la antitransformada de la función operacional del circuito $H(s)$: Según se ha visto, la respuesta transformada $R(s)$ de un circuito con condiciones iniciales nulas, puede ser expresada de la siguiente manera:

$$R(s) = H(s) Ex(s) \quad (10.89)$$

donde $Ex(s)$ es la transformada de Laplace de la excitación. Si el circuito es excitado por un impulso unitario, resulta:

$$Ex(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

y en consecuencia:

$$R_{\delta}(s) = H(s)$$

de modo que:

$$r_{\delta}(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_{\delta}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t) \quad (10.90)$$

En consecuencia, la antitransformada de la función operacional del circuito es la respuesta del circuito al impulso unitario $\delta(t)$ de Dirac. Este resultado es extraordinariamente importante, pues al ser combinado con el teorema de convolución, permite hallar la respuesta de un circuito a cualquier excitación, cuando es conocida la correspondiente al impulso unitario. Por esta causa, a $h(t)$ se la denomina *respuesta indicativa* o *indicial* o *función de ponderación*, además de respuesta impulsional. Recordando lo visto en el párrafo 10.8, resulta claro que $h(t)$ describe las componentes libres de la respuesta temporal.

10.9.6) Obtención de la respuesta temporal a partir de la respuesta indicativa: Antitransformando la Ec. (10.89) en base al teorema de convolución, resulta:

$$r(t) = h(t) * e_x(t) \quad (10.91)$$

y de acuerdo a la (10.90):

$$r(t) = r_s(t) * e_x(t) \quad (10.92)$$

Las Ecs. (10.91) y (10.92) indican que la respuesta temporal a una excitación arbitraria es igual al producto de convolución de la respuesta indicativa por la excitación expresada en el dominio del tiempo.

Dicho de otro modo, si se conoce la respuesta temporal al impulso unitario ya sea en forma teórica o experimental, se puede determinar la respuesta a cualquier excitación. Gracias a este resultado, es posible hallar la respuesta a una excitación que no posea transformada de Laplace o que esté dada en forma gráfica (pantalla de un osciloscopio). El diagrama de flujo a utilizar en este caso es el mostrado en la Fig. (10.32).

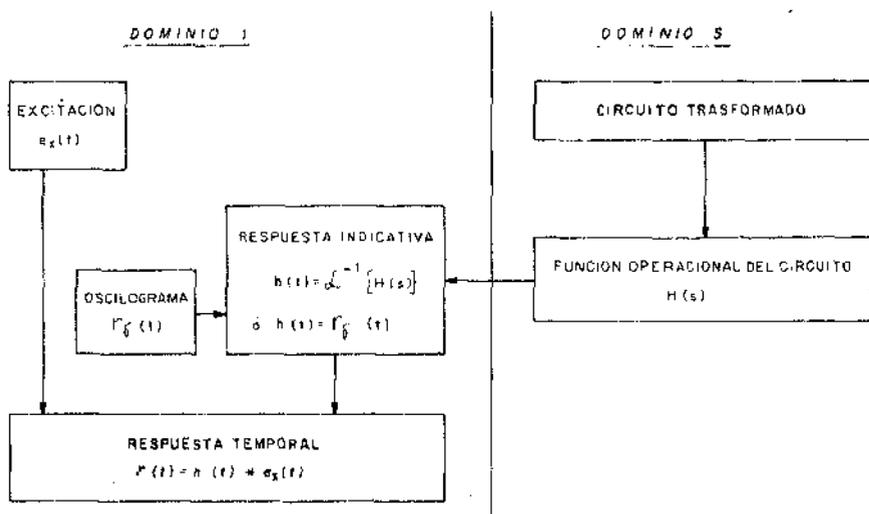


Fig. 10.32

A continuación se desarrollarán dos ejemplos de aplicación muy simples, con el fin de que la comprensión no resulte disminuida por complicaciones matemáticas o dibujos enmarañados. No obstante, *esta metodología es especialmente útil para los casos que no pueden resolverse con los métodos de antitransformación desarrollados en el parágrafo 10.6.*

Ejemplo 1: Hallar la tensión $v_C(t)$ para el circuito de la Fig. 10.33 por aplicación del teorema de convolución, sabiendo que $v_C(t) = Vu(t)$

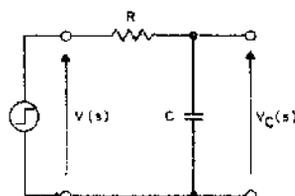


Fig. 10.33

La función operacional del circuito resulta:

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} \Big|_{CINR} = \frac{SC}{sCR + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

y la respuesta indicativa:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad (10.93)$$

La excitación es:

$$e_x(t) = Vu(t) \quad (10.94)$$

Según las Ecs. (10.75) y (10.75), la respuesta a $e_x(t)$ resulta:

$$v_C(t) = h(t) * e_x(t) = \int_0^t h(t-\tau) e_x(\tau) d\tau \quad (10.95)$$

y según las Ecs. (10.93) y (10.94):

$$v_C(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} V d\tau \quad \text{válida para } t > 0 \quad (10.96)$$

$$\therefore v_C(t) = \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau = \frac{V}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \left[RC e^{\frac{\tau}{RC}} \right]_0^t$$

resultando finalmente:

$$v_C(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t) \quad (10.97)$$

Ejemplo 2: Resolver el mismo problema anterior en forma gráfica, suponiendo que la respuesta indicativa dada por la Ec. (10.93) ha sido obtenida experimentalmente mediante un osciloscopio y tiene la forma indicada en la Fig. 10.29.d). La excitación de la Ec. (10.94) está representada en la Fig. 10.29.a).

Teniendo en cuenta la Ec. (10.77), la Ec. (10.95) puede escribirse:

$$v_C(t) = h(t) * e_x(t) = e_x(t) * h(t) = \int_0^t e_x(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau \quad (10.98)$$

En la Fig. 10.30 se ha denominado $f(t-\tau)$ a $e_x(t-\tau)$ y $g(\tau)$ a $h(\tau)$ y se ha resuelto en forma gráfica la Ec. (10.98), dando como resultado la curva de carga del capacitor mostrada en la Fig. 10.30.f), que corresponde a la solución 10.97 hallada en el ejemplo 1. El cambio de denominación de las funciones sólo tiene como finalidad el poder utilizar las mismas curvas del parágrafo 10.9.2.

10.9.7) Respuesta al escalón unitario: La generación de un impulso ideal no es posible en la práctica, aunque con cierta dificultad se pueden lograr resultados equivalentes. En cambio, el escalón ideal es la excitación que más fácilmente puede simularse, ya que basta una fuente continua y un interruptor, como se ve en la Fig. 10.34. Esta es una de las causas por la cual en algunos textos

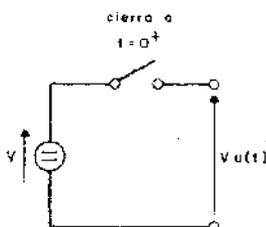


Fig. 10.34

dedicados al estudio de los servomecanismos se utiliza la transformada de Carson, para la cual es $C[u(t)] = 1$. No obstante trabajando con la transformada de Laplace, también es posible hallar la respuesta a cualquier excitación en función de la respuesta al escalón, como se verá en el parágrafo siguiente. Con ese

fin, se comenzará por hallar la respuesta temporal de un circuito con condiciones iniciales nulas, caracterizado por la función operacional $H(s)$ cuando se lo excita mediante un escalón unitario. En el dominio transformado es:

$$R(s) = H(s) E_x(s)$$

si $e_x(t) = u(t)$

$$\text{entonces, } E_x(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{S}$$

$$\text{resultando: } R_u(s) = \frac{H(s)}{S} \quad (10.99)$$

y antitrasformando:

$$r_u(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_u(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{S}\right] \quad (10.100)$$

donde $r_u(t)$ y $R_u(s)$ son, respectivamente, las respuestas temporal y frecuencial al escalón unitario, de un circuito con condiciones iniciales nulas.

Reemplazando $H(s) = R_\delta(s)$ en la Ec. (10.100) queda:

$$r_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_\delta(s)}{S}\right] \quad (10.101)$$

donde $R_\delta(s)$ es la respuesta transformada al impulso unitario.

Como dividir por S en el dominio S equivale a integrar en el dominio t , la Ec. (10.101) permite escribir:

$$r_u(t) = \int_0^t r_\delta(t) dt \quad (10.102)$$

o bien,

$$r_\delta(t) = \frac{d}{dt} r_u(t) + r_u(0) \delta t \quad (10.103)$$

ya que transformando ambos miembros de la Ec. (10.103) se obtiene:

$$R_\delta(s) = S R_u(s) - r_u(0) + r_u(0) = S R_u(s)$$

En la Ec. (10.103) $r_u(0)$ es el valor inicial de $r_u(t)$, que puede ser hallado en base al teorema del valor inicial dado por la Ec. (10.27).

$$r_u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [S R u(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \frac{H(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) \quad (10.104)$$

Es decir que si $H(s)$ tiene un cero en el infinito, según la Ec. (10.104) es $r_u(0) = 0$ y de acuerdo a la Ec. (10.103) resulta:

$$r_0(t) = \frac{d}{dt} r_u(t)$$

que a lo sumo presentará una discontinuidad de primera especie si la derivada de $r_u(t)$ no es continua en el origen.

Si $H(s)$ no es nula, pero no presenta polos para s teniendo a infinito, $r_u(0)$ es finita y no nula, mientras que $r_0(t)$ presenta una discontinuidad de segunda especie en el origen, según muestra la Ec. (10.103). Resumiendo, las Ecs. (10.102) y (10.103) indican que si $r_u(t)$ posee discontinuidad es $r_0(t)$ la tiene de un orden mayor en una unidad.

10.9.8) Obtención de la respuesta temporal en base a la respuesta al escalón unitario. Integrales de Duhamel: Sea un circuito con condiciones iniciales nulas, caracterizado por una función operacional $H(s)$ que no posee polos en el infinito. Si se lo excita con una señal $e_x(t)$ que no incluye impulsos y transformable Laplace, puede escribirse:

$$R(s) = H(s) E_x(s) \quad (10.105)$$

Reemplazando $H(s)$ por su valor dado por la Ec. (10.100), resulta:

$$R(s) = S R_u(s) E_x(s) \quad (10.106)$$

que puede escribirse

$$R(s) = S F(s) \quad (10.107)$$

donde:

$$F(s) = R_u(s) E_x(s) \quad (10.108)$$

Antitrasformando la Ec. (10.108) en base al teorema de convolución, resulta:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [R_u(s) E_x(s)] = r_u(t) * e_x(t) \quad (10.109)$$

Desarrollando el producto de convolución según la Ec. (10.75) queda:

$$f(t) \int_0^t r_u(t-\tau) e_x(\tau) d\tau \quad (10.110)$$

y de acuerdo a la Ec. (10.76).

$$f(t) = \int_0^t e_x(t-\tau) r_u(\tau) d\tau \quad (10.111)$$

Las Ecs. (10.110) y (10.111) muestran que para $t \rightarrow 0$ es $f(0) = 0$, pues $e_x(t)$ no posee impulsos por hipótesis y $r_u(t)$ tampoco, por no tener polos en el infinito $H(s)$.

Antitrasformando la Ec. (10.107), se tiene:

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = \mathcal{L}^{-1} [s F(s)] = \mathcal{L}^{-1} [s F(s) - f(0) + f(0)] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} [s F(s) - f(0)] = \mathcal{L}^{-1} [f(0)] \\ \therefore r(t) &= \frac{d}{dt} f(t) + f(0) \delta(t) \end{aligned} \quad (10.112)$$

Según se vio, $f(0) = 0$. En consecuencia, reemplazando en la Ec. (10.112) a $f(t)$ por sus expresiones dadas por las Ecs. (10.110) y (10.111), resulta:

$$r(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t r_u(t-\tau) e_x(\tau) d\tau \quad (10.113)$$

$$r(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e_x(t-\tau) r_u(\tau) d\tau \quad (10.114)$$

y aplicando a las Ecs. (10.113) y (10.114) la Ec. (10.115) para la derivación bajo el signo integral:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(x, t) dx &= \varphi(b, t) \frac{\partial b}{\partial t} - \varphi(a, t) \frac{\partial a}{\partial t} + \\ &+ \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) dx \end{aligned} \quad (10.115)$$

resulta, teniendo en cuenta que $a(t) = 0$:

$$r(t) = r_u(0) e_x(t) + \int_0^t r'_u(t-\tau) e_x(\tau) d\tau \quad (10.116)$$

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \int_0^t e'_x(t-\tau) r_u(\tau) d\tau \quad (10.117)$$

donde $r'_u(t-\tau)$ y $e'_x(t-\tau)$ son las derivadas respecto del tiempo de $r(t-\tau)$ y $e_x(t-\tau)$, respectivamente.

Teniendo en cuenta la Ec. (10.76), las Ecs. (10.116) y (10.117) pueden escribirse:

$$r(t) = r_u(0) e_x(t) + \int_0^t r'_u(\tau) e_x(t-\tau) d\tau \quad (10.118)$$

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \int_0^t e'_x(\tau) r_u(t-\tau) d\tau \quad (10.119)$$

Las Ecs. (10.113), (10.114), (10.116), (10.117), (10.118) y (10.119), se conocen como integrales de Duhamel, integrales de Carson o integrales de superposición de Boltzman-Hopkinson.

Se utiliza la que resulte de más fácil aplicación para el problema dado. Las Ecs. (10.116) y (10.118) exigen que $r_u(t)$ sea diferenciable, mientras que las Ecs. (10.117) y (10.119) que $e_x(t)$ sea derivable. Las Ecs. (10.116) y (10.118) sólo son aplicables si $r_u(0)$ es finito y las Ecs. (10.117) y (10.119) requieren que lo sea $e_x(0)$, como se impuso en las hipótesis iniciales.

Ejemplo: hallar $v_c(t)$ para que el circuito de la Fig. 10.33, cuando la excitación es $V(t) = (V + \frac{Va}{Ta} \cdot t) u(t)$, sabiendo que las condiciones iniciales son nulas.

La función operacional del circuito es:

$$H(s) = \left. \frac{V_c(s)}{V(s)} \right|_{CIN} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

La respuesta trasformada del escalón unitario es:

$$R_u(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

Antitrasformando resulta:

$$r_u(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$$

Aplicando la Ec. (10.117) se obtiene:

$$v_c(s) = r(t) = v(0) r_u(t) + \int_0^t v'(t-\tau) \cdot r_u(\tau) d\tau$$

$$\therefore v_c(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t) + \int_0^t \frac{V_a}{Ta} u(t) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right) d\tau$$

Resolviendo la integral queda:

$$v_c(t) = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t) + \frac{V_a}{Ta} t u(t) - \frac{V_a}{Ta} u(t) \left[\frac{-\tau}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} + e^{-\frac{\tau}{RC}} \right]_0^t$$

resultando finalmente:

$$v_c(t) = \left[V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + \frac{V_a}{Ta} (t - RC) + \frac{V_a}{Ta} RC e^{-\frac{t}{RC}} \right] u(t) \tag{10.120}$$

Nótese que el primer término es la respuesta al escalón de amplitud V , el segundo la componente forzada de la respuesta a la rampa de pendiente $\frac{V_a}{Ta}$ y el tercero la componente libre de la respuesta a la rampa mencionada.

Si en lugar de emplear la Ec. (10.117) se utiliza otra de las integrales de Duhamel, por ejemplo la Ec. (10.118), se llega al mismo resultado de la Ec. (10.120) pero en forma más laboriosa.

Sin embargo, pueden presentarse problemas más complejos en los que algunas de las integrales de Duhamel sean aplicables y otras no, por no ser derivable la excitación o no ser finito el valor inicial de $r_u(t)$ ó de $e_x(t)$.

10.9.9) Obtención de las integrales de Duhamel a partir del Principio de Superposición: Consideremos un circuito lineal, invariante en el tiempo y con condiciones iniciales nulas, al que se le aplica una excitación $e_x(t)$ como la mostrada en la Fig. 10.35, que posee una sola discontinuidad de primera especie para $t = 0$. La excitación puede ser expresada como una suma de escalones, cada

uno de los cuales está demorado respecto del anterior en un pequeño intervalo de tiempo Δz

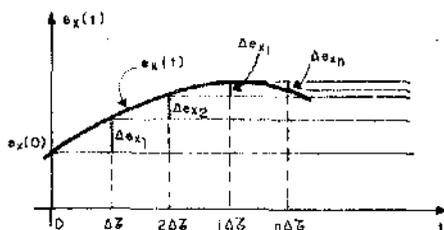


Fig. 10.35

Esto es:

$$e_x(t) = e_x(0) u(t) + \Delta e_{x1} u(t - \Delta z) + \Delta e_{x2} u(t - 2\Delta z) \\ + \dots + \Delta e_{xi} u(t - i\Delta z) + \dots + \Delta e_{xn} u(t - n\Delta z)$$

que puede escribirse:

$$e_x(t) = e_x(0) u(t) + \sum_{i=1}^n \Delta e_{xi} u(t - i\Delta z) \quad (10.121)$$

Si la respuesta del circuito al escalón unitario es $r_u(t)$, la respuesta al escalón genérico: $\Delta e_{xi} u(t - i\Delta z)$ resulta, por ser el circuito lineal e invariante con el tiempo.

$$\Delta e_{xi} \cdot r_u(t - i\Delta z)$$

De modo que la respuesta a la excitación dada por la Ec. (10.121) puede expresarse, en base al principio de superposición:

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \sum_{i=1}^n \Delta e_{xi} r_u(t - i\Delta z)$$

Si Δz es pequeño, puede escribirse que:

$$\Delta e_{xi} = \left(\frac{\Delta e_{xi}}{\Delta z} \right) \Delta z$$

resultando:

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta e_{xi}}{\Delta z} \right) r_u(t - i \Delta z) \Delta z$$

y en el límite, cuando $\Delta z \rightarrow 0$ y por lo tanto $n \rightarrow \infty$, queda:

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta e_{xi}}{\Delta z} \right) r_u(t - i \Delta z) \Delta z$$

$\infty \leftarrow u$

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \int_0^t e'x(z) r_u(t-z) dz \quad (10.122)$$

que coincide con la forma de la integral de Duhamel dada por la Ec. (10.119). Operando sobre la Ec. (10.122) se pueden hallar las Ecs. (10.116), (10.117) y (10.118).

En forma análoga puede hallarse la integral de convolución por superposición, caracterizando a la excitación como una suma de impulsos desplazados.

10.10 Utilización simultánea de los dominios $j\omega$, s y t

Cuando se desea hallar la respuesta temporal de un circuito excitado por una señal senoidal, en régimen permanente y se conoce la función operacional $H(s)$, es conveniente proceder como se indica en el diagrama de flujo de la Fig. 10.36.

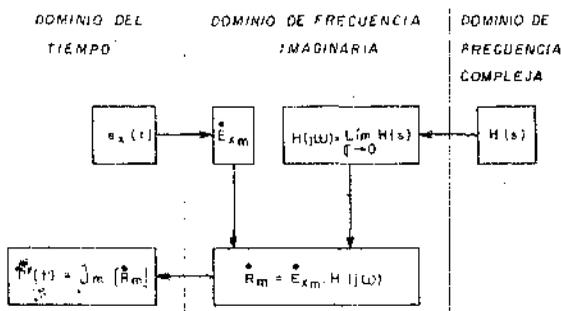


Fig. 10.36

A partir de la excitación en el dominio t , $e_x(t)$, se obtiene el fasor armónico máximo \dot{E}_{xm} . En base a la función operacional del circuito $H(s)$, se obtiene el fasor armónico máximo \dot{E}_{xm}

$$H(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} H(s)$$

Luego se calcula el fasor armónico máximo de la respuesta frecuencial \dot{R}_m y tomando su parte imaginaria se halla la respuesta temporal buscada. Nótese que este procedimiento sólo es válido para excitación senoidal y para obtener el régimen permanente.

Ejemplo: Hallar la respuesta permanente de la corriente $i_c(t)$ que circula por el capacitor de la Fig. 10.37 cuando se lo excita con una señal senoidal:

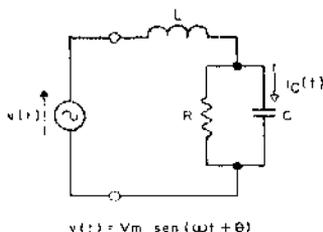


Fig. 10.37

$$v(t) = V_m \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

el fasor armónico máximo es:

$$V_m = V_m e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (10.123)$$

La función operacional del circuito $H(s)$ es en este caso una admitancia de transferencia, cuya expresión fue hallada en el párrafo 10.7.6 y se encuentra en la Fig. 10.18.d):

$$Y_T(s) = \left. \frac{I_c(s)}{V(s)} \right\}_{CIN} = \frac{sC}{s^2 LC + s \frac{L}{R} + 1}$$

Pasando del dominio S a $j\omega$ queda:

$$\bar{Y}_T = Y_T(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} Y_T(s) \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \frac{L}{R}} = Y_T e^{j\varphi_T} \quad (10.124)$$

donde:

$$Y_T = |\bar{Y}_T| = \frac{\omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \quad (10.125)$$

$$\varphi_T = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega \frac{L}{R}}{1 - \omega^2 LC} \quad (10.126)$$

El fasor armónico máximo de la corriente en el capacitor es, de acuerdo a las Ecs. (10.123 y 10.124):

$$\dot{i}_{cm} = \bar{Y}_T \dot{V}_m = Y_T e^{j\varphi_T} V_m e^{j\theta} e^{j\omega t} = Y_T V_m e^{j(\omega t + \theta + \varphi_T)}$$

y la respuesta permanente en el dominio del tiempo resulta:

$$i_C(t) = J_m [i_{cm}] = Y_T V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta + \varphi_T)$$

donde Y_T y φ_T están dadas por las Ecs. (10.125) y (10.126).

10.11 Problemas resueltos

10.11.1) Hallar:

a) La transformada de Laplace del pulso rectangular periódico representado en la Fig. 10.38.

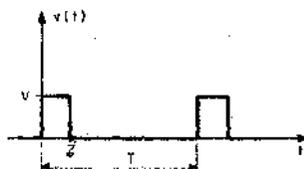


Fig. 10.38

- b) La respuesta transformada $V_s(s)$ que se obtiene al excitar el circuito de la Fig. 10.39 con la señal de la Fig. 10.38.

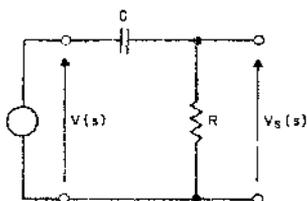


Fig. 10.39

Solución:

- a) para el primer período es:

$$v_1(t) = V u(t) - V u(t-2) \quad (10.127)$$

y para toda la señal:

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [V u(t-nT) - V u(t-2-nT)] \quad (10.128)$$

Esto es, por tratarse de una señal periódica, los siguientes ciclos son iguales al primero, desplazado en un tiempo nT .

Teniendo en cuenta la propiedad de desplazamiento temporal, dada por la Ec. (10.26), según la cual:

$$\mathcal{L} [f(t-a) u(t-a)] = F(s) \cdot e^{-as} \quad (10.26)$$

la transformada de Laplace de la excitación $v(t)$, dada por la Ec. (10.127), resulta:

$$V(s) = \mathcal{L} [v(t)] = \mathcal{L} [v_1(t)] \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \quad (10.129)$$

La sumatoria es una serie geométrica de razón e^{-Ts} , que puede ser expresada como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad (10.130)$$

ya que,

$$| e^{-Ts} | < 1$$

Reemplazando la Ec. (10.130) en la Ec. (10.129):

$$V(s) = \frac{\mathcal{L} [v_1(t)]}{1 - e^{-Ts}} \quad (10.131)$$

La Ec. (10.131) es una expresión general que muestra que la transformada de Laplace de una señal periódica cualquiera, no senoidal, es igual a la transformada del primer ciclo dividida por el factor $(1 - e^{-Ts})$. Para la señal considerada, dada por la Ec. (10.127) es:

$$\mathcal{L} [v_1(t)] = V_1(s) = \frac{V}{s} - \frac{V}{s} e^{-zS} = \frac{V}{s} (1 - e^{-zS}) \quad (10.132)$$

Reemplazando la Ec. (10.132) en la Ec. (10.131), resulta:

$$V(s) = \frac{V}{s} \frac{1 - e^{-zS}}{1 - e^{-Ts}} \quad (10.133)$$

La función de transferencia del circuito de la Fig. 10.138 es:

$$H(s) = \left. \frac{V_s(s)}{V(s)} \right|_{CIN} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (10.134)$$

La tensión de salida buscada es, teniendo en cuenta las Ecs. (10.133 y 10.134):

$$V_s(s) = H(s) V(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{V}{s} \frac{1 - e^{-zS}}{1 - e^{-Ts}}$$

$$\therefore V_s(s) = \frac{V}{s + \frac{1}{RC}} \frac{1 - e^{-zS}}{1 - e^{-Ts}} \quad (10.135)$$

Nótese que la Ec. (10.135) tiene infinitos polos, ya que los correspondientes a la excitación son los valores de s para los cuales:

$$1 - e^{-Ts} = 0$$

$$\therefore e^{-Ts} = +1$$

que se satisface para:

$$s = \pm j \frac{2K\pi}{T} \text{ con } K = 0, 1, 2, \dots$$

10.11.2)

Hallar la expresión de $v_C(t)$ y representarla gráficamente para el circuito de la Fig. 10.40:

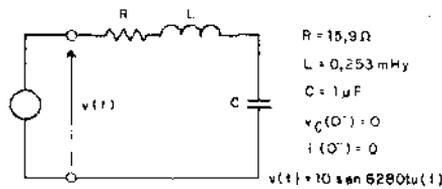


Fig. 10.40

Solución:

En la Fig. 10.41 se ha dibujado el circuito transformado, que no incluye generadores de condiciones iniciales, por ser estas nulas. La función $H(s)$ resulta:

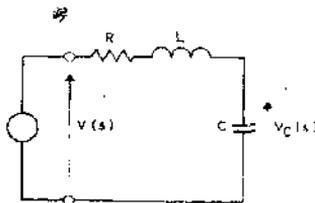


Fig. 10.41

$$H(s) = \left. \frac{V_C(s)}{V(s)} \right|_{\text{CIN}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

y reemplazando valores:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{0,253 \cdot 10^{-3} H \cdot 10^{-6} F} \\
 &= \frac{1}{s^2 + \frac{15,9}{0,253 \cdot 10^{-3} H} s + \frac{1}{0,253 \cdot 10^{-3} H \cdot 10^{-6} F}} \\
 \therefore H(s) &= \frac{3,95 \cdot 10^9}{s^2 + 6,28 \cdot 10^4 s + 3,95 \cdot 10^9} \quad (10.136)
 \end{aligned}$$

La excitación transformada es:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \mathcal{L} [10 \operatorname{sen} 6280 t \cdot u(t)] = 10 \frac{6280}{s^2 + 6280^2} \\
 \therefore V(s) &= \frac{6,28 \cdot 10^4}{s^2 + 3,94 \cdot 10^7} \quad (10.137)
 \end{aligned}$$

La tensión transformada sobre el capacitor es:

$$V_C(s) = H(s) \cdot V(s) \quad (10.138)$$

Reemplazando las Ecs. (10.136) y (10.137) en la Ec. (10.138) resulta:

$$\begin{aligned}
 V_C(s) &= \frac{3,95 \cdot 10^9}{s^2 + 6,28 \cdot 10^4 s + 3,95 \cdot 10^9} \cdot \frac{6,28 \cdot 10^4}{s^2 + 3,94 \cdot 10^7} \\
 \therefore V_C(s) &= \frac{2,48 \cdot 10^{14}}{(s^2 + 3,94 \cdot 10^7) (s^2 + 6,28 \cdot 10^4 s + 3,95 \cdot 10^9)} \quad (10.139)
 \end{aligned}$$

Los polos de $V_C(s)$ surgen de:

$$s^2 + 3,94 \cdot 10^7 = 0 \therefore p_{1,2} = \pm \sqrt{-3,94 \cdot 10^7} = \pm j 6,28 \cdot 10^3$$

$$\text{y } s^2 + 6,28 \cdot 10^4 s + 3,95 \cdot 10^9 = 0$$

$$\therefore p_{3,4} = -\frac{6,28 \cdot 10^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6,28 \cdot 10^4}{2}\right)^2 - 3,95 \cdot 10^9}$$

resultando:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= + j \ 6280 \\ p_2 &= - j \ 6280 \\ p_3 &= - 3,14 \cdot 10^4 + j \ 5,44 \cdot 10^4 \\ p_4 &= - 3,14 \cdot 10^4 - j \ 5,44 \cdot 10^4 \end{aligned} \right\} \quad (10.140)$$

teniendo en cuenta los valores dados por las Ecs.(10.140), la Ec. (10.139) puede escribirse:

$$V_c(s) = \frac{2,48 \cdot 10^{14}}{(s - j6280)(s + j6280)[s + (3,14 \cdot 10^4 - j5,44 \cdot 10^4)]} \cdot \frac{1}{[s + (3,14 \cdot 10^4 + j5,44 \cdot 10^4)]} \quad (10.141)$$

Como todos los polos son simples, se emplearán las Ecs. (10.36) y (10.51) para antitransformar $V_c(s)$. Esto es:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_c(s)] = \sum_{i=1}^4 K_i e^{p_i t} u(t) \quad (10.36)$$

$$\text{donde } K_i = \text{Res} [V_c(s)]_{s=p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i) V_c(s)] \quad (10.51)$$

Cálculo de los residuos:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow (j6280)} \left[(s - j6280) \frac{2,48 \cdot 10^{14}}{(s - j6280)(s + j6280)(s^2 + 6,28 \cdot 10^4 s + 3,95 \cdot 10^9)} \right]$$

$$\therefore K_1 = - (0,506 + j5,02) \quad (10.142)$$

Como p_1 y p_2 son conjugados, K_1 y K_2 también lo serán:

$$\therefore K_2 = - (0,506 - j5,02) \quad (10.143)$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow (-3,14 \cdot 10^4 + j 5,44 \cdot 10^4)} \left\{ \frac{\left[s + (3,14 \cdot 10^4 - j 5,44 \cdot 10^4) \right] \cdot 2,48 \cdot 10^{14}}{(s^2 + 3,44 \cdot 10^7) [(s + (3,14 \cdot 10^4 - j 5,44 \cdot 10^4)) (s + (3,14 \cdot 10^4 + j 5,44 \cdot 10^4))]} \right\} \quad (10.144)$$

$$\therefore K_3 = 0,504 + j 0,285$$

y análogamente, por ser p_3 y p_4 conjugados:

$$K_4 = 0,504 - j 0,285 \quad (10.145)$$

Reemplazando las Ecs. (10.140) y (10.145) en la Ec. (10.36) queda:

$$\begin{aligned} v_c(t) = & [-(0,506 + j 5,02) e^{j 6280 t} - (0,506 - j 5,02) e^{-j 6280 t} + \\ & + (0,504 + j 0,285) e^{(-3,14 + j 5,44) \cdot 10^4 t} + \\ & + (0,504 - j 0,285) e^{(-3,14 - j 5,44) \cdot 10^4 t}] u(t) \quad (10.146) \end{aligned}$$

Los dos primeros términos de la Ec. (10.146), que designaremos con $v'_c(t)$, pueden escribirse:

$$\begin{aligned} v'_c(t) = & -0,506 \cdot 2 \left(\frac{e^{-j 6280 t} + e^{j 6280 t}}{2} \right) - \\ & - j 5,02 \cdot 2 j \left(\frac{e^{j 6280 t} - e^{-j 6280 t}}{2 j} \right) \end{aligned}$$

y como $\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$ y $\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \operatorname{sen} x$

queda:

$$v'_c(t) = -1,01 \cos 6280 t + 10,0 \operatorname{sen} 6280 t$$

que puede escribirse:

$$V'c(t) = 10,0 \operatorname{sen}(6280 t - 0,1 \operatorname{rad}) \quad (10.147)$$

ya que $Vm \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = Vm \cos \beta \operatorname{sen} \omega t + Vm \operatorname{sen} \beta \cos \omega t$

donde $Vm = \sqrt{(Vm \cos \beta)^2 + (Vm \operatorname{sen} \beta)^2} = \sqrt{10,0^2 + 1,01^2} = 10,0$

$$y \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Vm \operatorname{sen} \beta}{Vm \cos \beta} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \beta) = \beta = -0,1 \operatorname{rad}$$

Análogamente, los dos últimos términos de la Ec. (10.146), que llamaremos $v''c(t)$, pueden escribirse:

$$\begin{aligned} V''c(t) &= e^{-3,14 \cdot 10^4 t} \left[0,504 \cdot 2 \frac{(e^{j5,44 \cdot 10^4 t} + e^{-j5,44 \cdot 10^4 t})}{2} + \right. \\ &\quad \left. + j0,285 \cdot 2j \frac{(e^{j5,44 \cdot 10^4 t} - e^{-j5,44 \cdot 10^4 t})}{2j} \right] = \\ &= e^{-3,14 \cdot 10^4 t} \left[1,01 \cos 5,44 \cdot 10^4 t - 0,57 \operatorname{sen} 5,44 \cdot 10^4 t \right] = \\ &= e^{-3,14 \cdot 10^4 t} \cdot 1,16 \operatorname{sen}(5,44 \cdot 10^4 t + 2,09 \operatorname{rad}) \quad (10.148) \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de $v'c(t)$ y $v''c(t)$ dados por las Ecs. (10.147) y (10.148) en la Ec. (10.146), se obtiene, finalmente:

$$\begin{aligned} Vc(t) &= \left[10,0 \operatorname{sen}(6280 t - 0,1 \operatorname{rad}) + \right. \\ &\quad \left. + 1,16 e^{-31400 t} \operatorname{sen}(54400 t + 2,09 \operatorname{rad}) \right] u(t) \quad (10.149) \end{aligned}$$

Nótese que el primer término de la Ec. (10.149) es la componente forzada de la respuesta transitoria, que puede hallarse fácilmente por asociación de impedancias, como se estudió en el Cap. 7 o bien mediante el procedimiento descrito en el párrafo 10.10. En efecto, siguiendo el método mencionado en segundo término resulta:

$$H(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} H(s) = \frac{3,95 \cdot 10^9}{-\omega^2 + 6,28 \cdot 10^4 j\omega + 3,95 \cdot 10^9}$$

y para $\omega = 6280$,

$$H(j6280) = 1 - j 0,1 = 1 \quad e^{-j 0,1 \text{ rad}}$$

El fasor armónico de la excitación es:

$$\dot{V}_m = 10 \quad e^{j 6280 t}$$

por lo que el fasor armónico de la componente forzada resulta:

$$\begin{aligned} \therefore \dot{V}_{cpm} &= H(j6280) \quad V_m = 1 \quad e^{-j 0,1 \text{ rad}} \quad 10 \quad e^{j 6280 t} = \\ &= 10 \quad e^{j (6280 t - 0,1)} \end{aligned}$$

y tomando la parte imaginaria, para obtener la respuesta temporal:

$$\begin{aligned} v_{cp}(t) &= Jm [V_{cpm}] = Jm \left[10 \quad e^{j (6280 t - 0,1)} \right] \\ \therefore v_{cp}(t) &= 10 \text{sen} (6280 - 0,1) \text{ volt} \end{aligned}$$

que coincide exactamente con el primer término de la Ec. (10.149).

El segundo término de la Ec. (10.149) es la componente libre o natural, que se extingue con una constante de tiempo.

$$\tau = \frac{1}{31400} = 3,18 \cdot 10^{-5} \text{ seg} = 0,318 \cdot 10^{-4} \text{ seg}$$

Nótese que en un método de resolución alternativo, para hallar la respuesta transitoria a una excitación senoidal consiste en:

- Hallar la componente forzada con el procedimiento del párrafo 10.10.
- Hallar la componente libre determinando los residuos de la respuesta transformada en los polos de la función $H(s)$ exclusivamente.
- Sumar los resultados hallados en a) y b).

En la Fig. 10.42 se ha representado la Ec. (10.149), mostrando las componentes y la respuesta total.

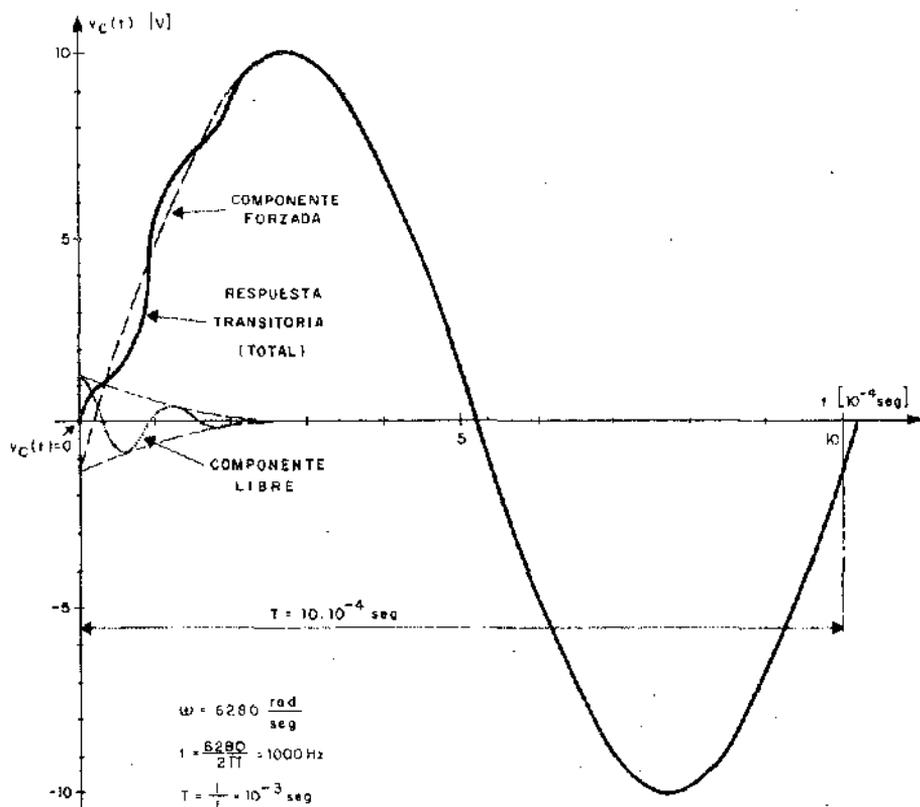


Fig. 10.42

10.11.3) Calcular las tensiones $v_p(t)$ y $v_s(t)$ del circuito de la Fig. 10.43 y representarlas gráficamente.

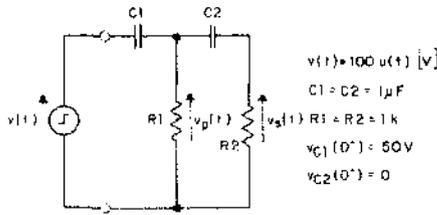


Fig. 10.43

Solución:

En la Fig. 10.44 se ha dibujado el circuito transformado correspondiente al de la Fig. 10.43. Como puede apreciarse, sólo incluye un generador de condiciones iniciales, pues $v_{C2}(0^-) = 0$. El circuito de la Fig. 10.44 ha sido redibujado en la Fig. 10.45, donde se han agrupado los dos generadores en uno solo:

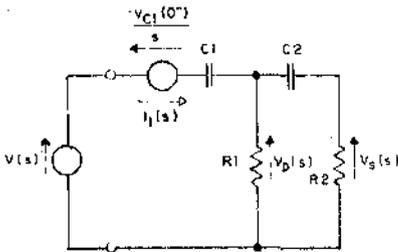


Fig. 10.44

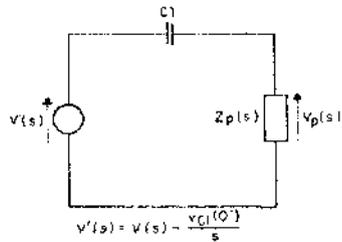


Fig. 10.45

$$V'(s) = V(s) - \frac{v_C(0^-)}{s} = \frac{100}{s} - \frac{50}{s} = \frac{50}{s} \quad (10.150)$$

y la configuración formada por R_1 , R_2 y C_2 ha sido caracterizada por su impedancia de excitación $Z_p(s)$.

Utilizando la relación de división de tensión puede escribirse:

$$V_p(s) = V'(s) \cdot \frac{Z_p(s)}{Z_p(s) + \frac{1}{sC_1}} \quad (10.151)$$

$Z_P(s)$ puede ser calculada agrupando immitancias:

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{s C_2} = 10^3 + \frac{1}{s \cdot 10^{-6}} = 10^3 + \frac{10^6}{s}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{1}{10^3 + \frac{10^6}{s}} = \frac{s}{10^3 s + 10^6} = 10^{-3} \frac{s}{s + 10^3}$$

$$Y_P(s) = \frac{1}{R_1} + Y_2(s) = \frac{1}{10^3} + 10^{-3} \frac{s}{s + 10^3} = 10^{-3} + 10^{-3} \frac{s}{s + 10^3}$$

$$\begin{aligned} Z_P(s) &= \frac{1}{Y_P(s)} = \frac{1}{10^{-3} + 10^{-3} \frac{s}{s + 10^3}} = \frac{s + 10^3}{10^{-3} s + 1 + 10^{-3} s} = \\ &= \frac{s + 10^3}{2 \cdot 10^{-3} s + 1} \end{aligned} \quad (10.152)$$

Reemplazando la Ec. (10.152) en la Ec. (10.151) y teniendo en cuenta la Ec. (10.150) resulta:

$$\begin{aligned} V_P(s) &= V'(s) \frac{\frac{s + 10^3}{2 \cdot 10^{-3} s + 1}}{\frac{s + 10^3}{2 \cdot 10^{-3} s + 1} + \frac{1}{s \cdot 10^{-6}}} = \frac{50}{s} \frac{s + 10^3}{s + 10^3 + 2 \cdot 10^3 + \frac{10^6}{s}} \\ \therefore V_P(s) &= 50 \frac{s + 10^3}{s^2 + 3 \cdot 10^3 s + 10^6} \end{aligned}$$

Los polos surgen de $s^2 + 3 \cdot 10^3 s + 10^6 = 0$

$$\therefore p_{1,2} = -\frac{3}{2} \cdot 10^3 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot 10^3\right)^2 - 10^6} = -1500 \pm 1118$$

$$\therefore p_1 = -382 \text{ y } p_2 = -2618$$

de modo que $V_P(s)$ puede escribirse:

$$V_P(s) = 50 \frac{s + 10^3}{(s + 382)(s + 2618)} \quad (10.153)$$

Para calcular $V_S(s)$ se utiliza nuevamente la relación de división de tensión, aplicándola a la configuración de la Fig. 10.46:

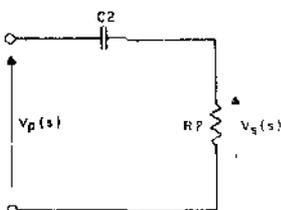


Fig. 10.46

$$V_S(s) = V_P(s) \frac{R_2}{R^2 + \frac{1}{sC}} = 50 \frac{s + 10^3}{(s + 382)(s + 2618)} \frac{10^3}{10^3 + \frac{1}{s \cdot 10^{-6}}}$$

$$\therefore V_S(s) = 50 \frac{s + 10^3}{(s + 382)(s + 2618)} \frac{10^3 s}{10^3 (s + 10^3)} = 50 \frac{s}{(s + 382)(s + 2618)} \quad (10.154)$$

Para hallar las respuestas temporales $V_P(t)$ y $V_S(t)$ se deben antitransformar las Ecs. (10.133) y (10.154). Como todos los polos son simples, se emplean las Ecs. (10.36) y (10.50):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s) e^{st}] = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t) \quad (10.36)$$

$$K_i = \text{Res} [F(s)]_{s = p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} \{ (s - p_i) F(s) \} \quad (10.51)$$

Para $v_P(t)$ resulta:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \text{Res} [V_P(s)]_{s = p_1} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow (-382)} (-382) \left[(s + 382) 50 \frac{s + 10^3}{(s + 382)(s + 2618)} \right] = 13,92 \\
 K_2 &= \text{Res} [V_P(s)]_{s = p_2} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow (-2618)} (-2618) \left[(s + 2618) 50 \frac{s + 10^3}{(s + 382)(s + 2618)} \right] = 36,18 \\
 \therefore v_P(t) &= 13,82 e^{-382 t} + 36,18 e^{-2618 t} \quad (10.155)
 \end{aligned}$$

Para $v_S(t)$ es:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \text{Res} [V_S(s)]_{s = p_1} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow (-382)} (-382) \left[(s + 382) 50 \frac{s}{(s + 382)(s + 2618)} \right] = -8,54 \\
 K_2 &= \text{Res} [V_S(s)]_{s = p_2} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow (-2618)} (-2618) \left[(s + 2618) 50 \frac{s}{(s + 382)(s + 2618)} \right] = 58,54 \\
 \therefore v_S(t) &= -8,54 e^{-382 t} + 58,54 e^{-2618 t} \quad (10.156)
 \end{aligned}$$

Nótese que las tensiones sobre R_1 y R_2 están gobernadas por las mismas frecuencias naturales, pues las constantes de tiempo de las componentes de $v_P(t)$ y $v_S(t)$ son iguales. Sin embargo se combinan con distintos signos debido a que el cero de $v_P(t)$ está en $s = 1000$ y el de $v_S(s)$ en $s = 0$.

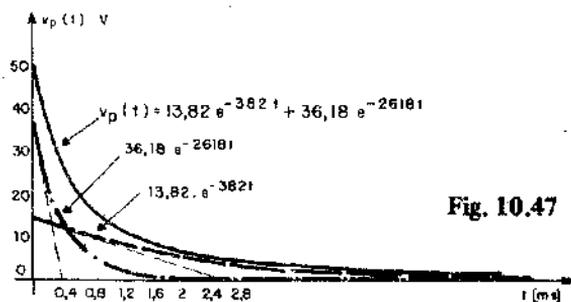


Fig. 10.47

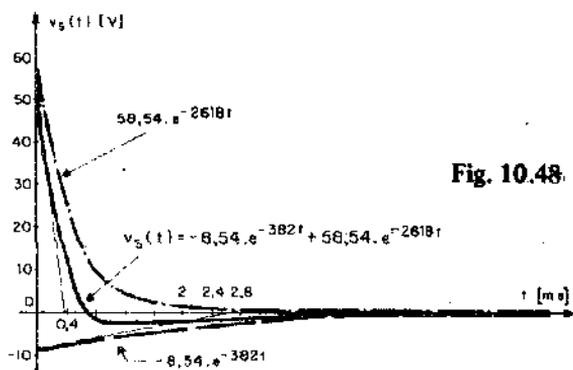


Fig. 10.48

La ecuación (10.155) ha sido representada en la Fig. 10.47 y la Ec. (10.156) en la Fig. 10.48, junto con sus respectivas componentes. Puede observarse que tanto $v_p(t)$ como $v_s(t)$ parten de un valor inicial igual a 50 V y tienden a cero con velocidades similares, pero con distintas leyes de variación. En efecto, $v_p(t)$ siempre positiva decrece monótonamente mientras que $v_s(t)$ lo hace más rápidamente al principio alcanzando un mínimo negativo para luego tender a cero con velocidad de variación similar a $v_p(t)$.

El valor inicial igual a 50 V., puede explicarse de la siguiente manera: al aplicar el escalón de 100 V como la tensión en los capacitores no puede variar en forma discontinua, 50 V son absorbidos por la condición inicial de $v_C(0)$ debiendo absorber el resto de la configuración $v_p(0) = 50$ V. De la misma manera, estos 50 V que se aplican bruscamente a la rama $R_2 - C_2$ caen íntegramente sobre R_2 pues $v_{C_1}(0) = 0$ y no puede variar en forma discontinua.

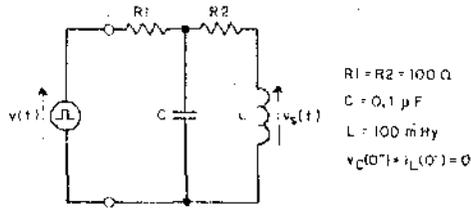


Fig. 10.49

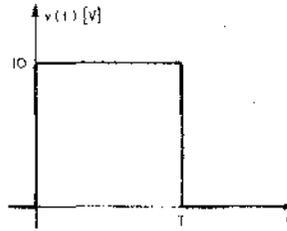


Fig. 10.50

10.11.4) Hallar la tensión $v_s(t)$ sobre el inductor de la Fig. 10.49, cuando se lo excita con el pulso rectangular de la Fig. 10.50.

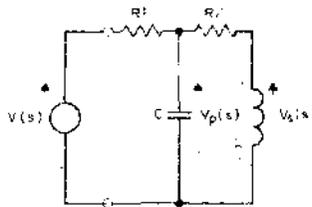


Fig. 10.51

En la Fig. 10.51 se ha dibujado el circuito transformado, que no incluye generadores de condiciones iniciales por ser éstas nulas.

Para calcular $V_s(s)$ se procederá como en el problema anterior:

$$Z_2(s) = R_2 + sL = 100 + 0,1s$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{1}{100 + 0,1 s}$$

$$Y_P(s) = s C + Y_2(s) = 10^{-7} s + \frac{1}{100 + 0,1 s}$$

$$Z_P(s) = \frac{1}{Y_P(s)} = \frac{1}{10^{-7} s + \frac{1}{100 + 0,1 s}} = \frac{100 + 0,1 s}{10^{-5} s + 10^{-8} s^2 + 1}$$

$$V_P(s) = V(s) \cdot \frac{Z_P(s)}{Z_P(s) + R_1} = V(s) \frac{\frac{100 + 0,1 s}{10^{-5} s + 10^{-8} s^2 + 1}}{\frac{100 + 0,1 s}{10^{-5} s + 10^{-8} s^2 + 1} + 100}$$

$$\therefore V_P(s) = V(s) \cdot \frac{100 + 0,1 s}{100 + 0,1 s + 10^{-3} s + 10^{-6} s^2 + 10^2} =$$

$$\therefore V_P(s) = V(s) \frac{0,1 (s + 1000)}{10^{-6} (s^2 + 1,01 \cdot 10^5 s + 2 \cdot 10^5)} \quad (10.157)$$

cuyos polos derivan de:

$$s^2 + 1,01 \cdot 10^5 s + 2 \cdot 10^5 = 0$$

$$\therefore p_{1;2} = -\frac{1,01 \cdot 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,01 \cdot 10^5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 10^5} = \begin{matrix} \Rightarrow -2000 \\ \Rightarrow -99000 \end{matrix}$$

Teniendo en cuenta los valores de los dos polos, la Ec. (10.157) puede escribirse:

$$V_P(s) = V(s) \cdot 10^5 \frac{(s + 1000)}{(s + 2000)(s + 99000)} \quad (10.158)$$

En la Fig. 10.50 puede verse que:

$$V(t) = 10 u(t) - 10 u(t - T)$$

cuya transformada de Laplace resulta, teniendo en cuenta la Ec. (10.26):

$$V(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s} e^{-sT} = \frac{10}{s} \left(1 - e^{-sT} \right) \quad (10.159)$$

Reemplazando la Ec. (10.159) en la Ec. (10.158) queda:

$$V_P(s) = \frac{10}{s} \left(1 - e^{-sT} \right) 10^5 \frac{(s + 1000)}{(s + 2000)(s + 99000)} \quad (10.160)$$

La tensión sobre el inductor es:

$$V_S(s) = V_P(s) \frac{sL}{R_2 + sL} \quad (10.161)$$

Reemplazando en la Ec. (10.161), la Ec. (10.160), se obtiene:

$$V_S(s) = \frac{10^6}{s} \left(1 - e^{-sT} \right) \frac{s + 1000}{(s + 2000)(s + 99000)} \frac{0,1 s}{100 + 0,1 s}$$

$$\therefore V_S(s) = \frac{10^6}{s} \left(1 - e^{-sT} \right) \frac{s + 1000}{(s + 2000)(s + 99000)} \frac{s}{s + 1000}$$

resultando finalmente:

$$V_S(s) = \frac{10^6}{(s + 2000)(s + 99000)} - \frac{10^6 e^{-sT}}{(s + 2000)(s + 99000)} \quad (10.162)$$

Antitrasformando el primer término de la Ec. (10.162) resulta:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10^6}{(s + 2000)(s + 99000)} \right] = \sum_{i=1}^2 K_i e^{p_i t} u(t)$$

donde,

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow (-2000)} \left[(s + 2000) \cdot \frac{10^6}{(s + 2000)(s + 99000)} \right] = 10,3$$

y

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow (-99000)} \left[(s + 99000) \frac{10^6}{(s + 2000)(s + 99000)} \right] = -10,3$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10^6}{(s + 2000)(s + 99000)} \right] = \left[10,3 e^{-2000 t} - 10,3 e^{-99000 t} \right] u(t) \quad (10.163)$$

Comparando los dos términos de la Ec. (10.162), teniendo en cuenta la propiedad del desplazamiento temporal dada por la Ec. (10.26) y el resultado hallado en la Ec. (10.163) resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10^6 \cdot e^{-sT}}{(s + 2000)(s + 99000)} \right] &= \\ &= - \left[10,3 \cdot e^{-2000(t-T)} - 10,3 \cdot e^{-99000(t-T)} \right] u(t-T) \quad (10.164) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (10.163) y (10.164) resulta:

$$\begin{aligned} v_s(t) &= 10,3 \left[e^{-2000 t} - e^{-99000 t} \right] u(t) - \\ &- 10,3 \left[e^{-2000(t-T)} - e^{-99000(t-T)} \right] u(t-T) \quad (10.165) \end{aligned}$$

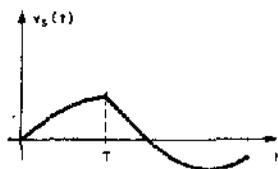


Fig. 10.52

En la Fig. 10.52 se ha representado aproximadamente la Ec. (10.165). Nótese que para el juego de valores del problema se tienen dos polos reales distintos para $V_s(s)$ de modo que se está en el régimen sobreamortiguado.

Si fueran R_1 mayor y R_2 menor, podría resultar:

$$(R_1 R_2 C + L)^2 < 4 (R_1 + R_2) R_1 L C$$

y los polos serían complejos conjugados, entrando en el régimen sub-amortiguado.

10.11.5) Resolver el problema anterior aplicando el teorema de convolución, tomando como datos la excitación,

$$V(t) = 10 u(t) - 10 u(t-T) \quad (10.166)$$

y la función operacional del circuito:

$$H(s) = \left. \frac{V_S(s)}{V(s)} \right|_{CIV} = 10^5 \frac{s}{(s + 2000)(s + 99000)} \quad (10.167)$$

Antitrasformando la Ec. (10.167) mediante una tabla de pares de transformadas obtendremos la respuesta indicativa:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = \left(-2,06 \cdot 10^3 e^{-2000t} + 1,02 \cdot 10^5 e^{-99000t} \right) u(t) \quad (10.168)$$

La Ec. (10.91) puede escribirse, en este caso, teniendo en cuenta la Ec. (10.75):

$$V_S(t) = h(t) * v(t) = \int_0^t h(t-\tau) v(\tau) d\tau \quad (10.169)$$

Reemplazando en la Ec. (10.169) los valores de $h(t)$ y $v(t)$ dados por las Ecs. (10.168) y (10.66) resulta:

$$v_S(t) = \int_0^t \left[-2,06 \cdot 10^3 e^{-2000(t-\tau)} + 1,02 \cdot 10^5 e^{-99999\tau} \right] \cdot [10 u(\tau) - 10 u(\tau-T)] d\tau \quad (10.170)$$

La Ec. (10.170) es válida para $t > 0$.

Desarrollando el producto y calculando los integrales se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_S(t) &= - \int_0^t 2,06 \cdot 10^4 e^{-2000 \tau} e^{+2000 \tau} u(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t 1,02 \cdot 10^6 e^{-99000 \tau} e^{+99000 \tau} u(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^t 2,06 \cdot 10^4 e^{-2000 \tau} e^{+2000 \tau} u(\tau - T) d\tau - \\
 &- \int_0^t 1,02 \cdot 10^6 e^{-99000 \tau} e^{+99000 \tau} u(\tau - T) d\tau = \\
 &= - 2,06 \cdot 10^4 e^{-2000 t} \int_0^t e^{2000 \tau} u(\tau) d\tau + \\
 &+ 1,02 \cdot 10^6 e^{-99000 t} \int_0^t e^{99000 \tau} u(\tau) d\tau + \\
 &+ 2,06 \cdot 10^4 e^{-2000 t} \int_0^t e^{2000 \tau} u(\tau - T) d\tau - \\
 &- 1,02 \cdot 10^6 e^{-99000 t} \int_0^t e^{99000 \tau} u(\tau - T) d\tau = \\
 &= - 10,3 e^{-2000 t} \left[e^{2000 \tau} \right] u(t) + 10,3 e^{-99000 t} \left[e^{99000 \tau} \right]_0^t u(t) + \\
 &+ 10,3 e^{-2000 t} \left[e^{2000 \tau} \right] u(t - T) - 10,3 e^{-99000 t} \left[e^{99000 \tau} \right]_T^t u(t - T)
 \end{aligned}$$

Finalmente, desarrollando, simplificando y ordenando se llega a:

$$\begin{aligned}
 V_S(t) &= 10,3 \left[e^{-2000 t} - e^{-99000 t} \right] u(t) - \\
 &- 10,3 \left[e^{-2000 (t - T)} - e^{-99000 (t - T)} \right] u(t - T) \quad (10.171)
 \end{aligned}$$

que coincide con la Ec. (10.165) antes detallada.

10.11.6) Hallar y graficar $v_p(t)$ y $v_s(t)$ para el circuito de la Fig. (10.43), con condiciones iniciales nulas. Cuando se lo excita con una tensión rampa.

$$v(t) = 120 \rho(t) \quad (10.172)$$

Utilizar las integrales de Duhamel, partiendo del conocimiento de las respuestas al escalón unitario.

$$v_{pu}(t) = \left(0,2764 e^{-382 t} + 0,7236 e^{-2618 t} \right) u(t) \quad (10.173)$$

$$v_{su}(t) = \left(-0,1708 e^{-382 t} + 1,171 e^{-2618 t} \right) u(t) \quad (10.174)$$

Según la Ec. (10.172) es:

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ y \quad v'(t) = 120 \end{array} \right\} \quad (10.175)$$

En consecuencia, se adopta la Ec. (10.117) por ser la que permite obtener el resultado más fácilmente:

$$r(t) = e_x(0) r_u(t) + \int e_x'(t-\tau) r_u(\tau) d\tau \quad (10.117)$$

Reemplazando las Ecs. (10.173) y (10.175) en la Ec. (10.117), se obtiene:

$$v_P(t) = 0 + \int_0^t 120 \left(0,2764 e^{-382 \tau} + 0,7236 e^{-2618 \tau} \right) u(\tau) d\tau$$

$$\therefore v_P(t) = \left\{ -86,8 \cdot 10^{-3} e^{-382 \tau} \Big|_0^t - 33,2 \cdot 10^{-3} e^{-2618 \tau} \Big|_0^t \right\} u(t)$$

resultando,

$$v_P(t) = \left[-86,8 \left(e^{-382 t} - 1 \right) - 33,2 \left(e^{-2618 t} - 1 \right) \right] 10^{-3} u(t)$$

y operando:

$$v_P(t) = \left[120 - 86,8 e^{-382 t} - 33,2 e^{-2618 t} \right] 10^{-3} u(t) \quad (10.176)$$

Reemplazando las Ecs. (10.174) y (10.175) en la Ec. (10.117), resulta:

$$v_S(t) = 0 + \int_0^t 120 \left(-0,1708 e^{-382 \tau} + 1,171 e^{-2618 \tau} \right) u(\tau) d\tau$$

$$\therefore v_S(t) = \left[53,7 \cdot 10^{-3} \left(e^{-382 t} - 1 \right) - 53,7 \cdot 10^{-3} \left(e^{-2618 t} - 1 \right) \right] u(t)$$

y finalmente,

$$V_S(t) = 53,7 \cdot 10^{-3} \left(e^{-382 t} - e^{-2618 t} \right) u(t) \quad (10.177)$$

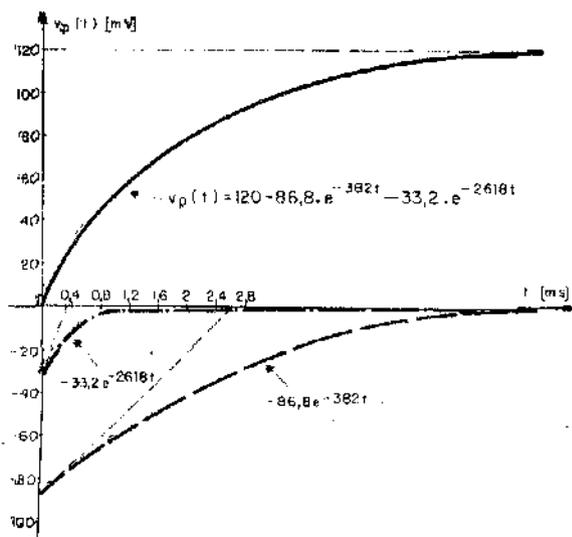


Fig. 10.53

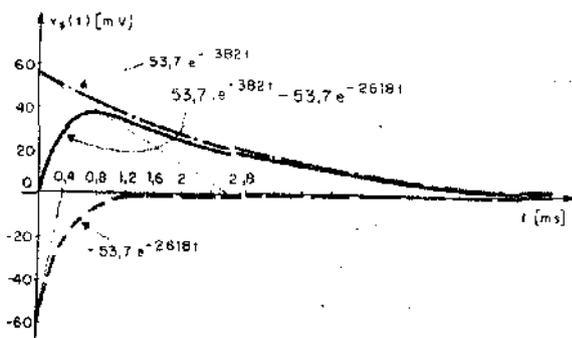


Fig. 10.54

La Ec. (10.176) ha sido representada en la Fig. 10.53 y la Ec. (10.177) en la Fig. 10.54, incluyendo las componentes respectivas.

Nótese que $v_p(t)$ tiende a un valor constante igual a 120 mV y $v_s(t)$ a cero. Esto es debido a que al alcanzar el régimen forzado, $v_{C_1}(t)$ crece linealmente, lo que implica la circulación de una corriente constante C_1 .

Esta corriente pasa íntegramente por R_1 , pues al hacerse $v_p(t)$ constante, la rama $R_2 C_2$ se comporta igual que en la activación de un circuito $R - C$ serie. Esto es, una vez que C_2 se cargó a la tensión permanente $v_p(t) = 120 \text{ mV}$, no circula más corriente por R_2 , resultando $v_s(t) = 0$.

10.12 Problemas propuestos

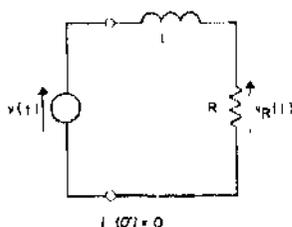


Fig. 10.55

10.12.1) Hallar las respuestas $v_s(t)$ del circuito de la Fig. 10.55, cuando se lo excite con las tensiones siguientes:

a) $v(t) = u(t)$	<i>Resultados:</i>	a) $v_{su}(t) = (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
b) $v(t) = \delta(t)$		b) $v_{s\delta}(t) = h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$

10.12.2) Hallar la respuesta $v_s(t)$ del circuito del problema 10.12.1, cuando se lo excita con el pulso de la Fig. 10.50. Emplear el teorema de convolución, en base a la respuesta al impulso unitario.

Resultado:

$$v_s(t) = V \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] u(t) - V \left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T)} \right] u(t-T)$$

10.12.3) Hallar la respuesta $v_S(t)$ del circuito del problema 10.12.1, cuando se lo excita con el pulso triangular de la Fig. 10.56. Utilizar la integral de Duhamel de la Ec. (10.119) y la respuesta al escalón unitario.

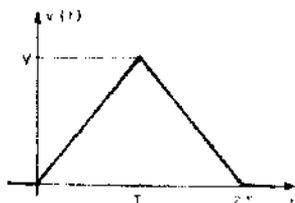


Fig. 10.56

Resultado:

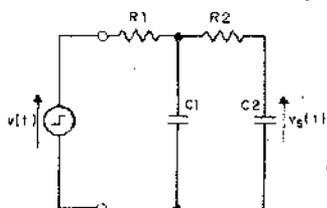
$$v_S(t) = \left[\frac{V}{T} \left(t - \frac{L}{R} \right) + \frac{V}{T} \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \right] u(t) -$$

$$- \left[\frac{2V}{T} \left(t - T - \frac{L}{R} \right) + \frac{2V}{T} \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L} (t - T)} \right] u(t - T) +$$

$$+ \left[\frac{V}{T} \left(t - 2T - \frac{L}{R} \right) + \frac{V}{T} \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L} (t - 2T)} \right] u(t - 2T)$$

10.12.4) Para el circuito de la Fig. 10.57, hallar:

- La tensión transformada $V_S(s)$.
- La respuesta temporal $v_S(t)$.



$R1 = 150 \Omega$
 $R2 = 600 \Omega$
 $C1 = 1,5 \mu F$
 $C2 = 0,5 \mu F$
 $v_{C1}(0^-) = v_{C2}(0^-) = 0$
 $v(t) = 90 u(t) \text{ V}$

Fig. 10.57

Resultados:

$$a) V_S(s) = \frac{4}{3} \cdot 10^9 \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-4}} \right) \left(s + \frac{1}{1,5 \cdot 10^{-4}} \right)}$$

$$b) V_S(t) = \left[90 - 135 e^{-\frac{t}{4,5 \cdot 10^{-4}}} + 45 e^{-\frac{t}{1,5 \cdot 10^{-4}}} \right] u(t)$$

10.12.5) Para el circuito de la Fig. 10.58, calcular:

- La corriente transformada $I_2(s)$.
- La corriente $i_2(t)$.
- La componente permanente $i_{2p}(t)$.

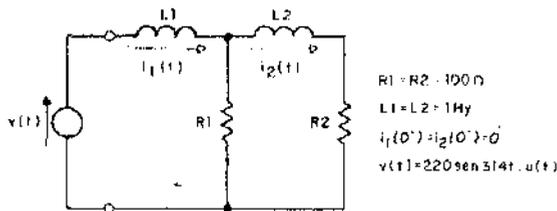


Fig. 10.58

Resultados:

$$a) I_2(s) = \frac{6,91 \cdot 10^6}{[s^2 + (314)^2] (s + 3,20) (s + 227)}$$

$$b) i_2(t) = \left[-0,181 \text{ sen } (314t + 0,63 \text{ rad}) + 0,319 e^{-3,20t} - 0,206 e^{-227t} \right] u(t) \text{ Amper}$$

$$c) i_{2p}(t) = -0,181 \cdot \text{sen } (314t + 0,63 \text{ rad}) \text{ Amper}$$

Análisis de las funciones operacionales de los circuitos en base a las configuraciones de polos y ceros

11.1) **Introducción:** En el Cap. 10 se vio que un modelo circuital idealizado puede ser totalmente caracterizado trabajando en el dominio de frecuencia compleja mediante las funciones operacionales $H(s)$ de excitación o de transferencia, para dipolos y cuadripolos, respectivamente.

En este capítulo se muestra que toda la información sobre las funciones $H(s)$ y $R(s)$ está contenida en los valores de los polos, los ceros y la constante de escala A_0 de las mismas. Esta información será presentada gráficamente, en las llamadas configuraciones o constelaciones de polos y ceros. Se estudiará la correlación entre la ubicación de los polos y ceros y la forma de las componentes de la respuesta temporal. Luego se introducirá el método para el cálculo de los residuos en los polos, midiendo sobre la configuración de polos y ceros de $R(s)$. Se analizarán criterios para determinar la importancia relativa de cada residuo y se completará el estudio de la respuesta temporal con un análisis general de la respuesta de sistemas de primer y segundo orden.

Se mostrará luego la forma de obtener las respuestas de frecuencia de amplitud y fase a partir de la configuración de polos y ceros, así como la correlación entre algunas constelaciones típicas y sus respuestas frecuenciales asociadas.

Finalmente, se introducirán los gráficos de Bode, para obtener las respuestas asintóticas de frecuencia.

11.2) **Configuraciones de polos y ceros:** En este libro se analizan los modelos circuitales de constantes concentradas, lineales e invariantes en el tiempo. Estos circuitos están descritos por funciones operacionales $H(s)$ racionales. Como las excitaciones transformadas $E_x(s)$ también son, en general, cocientes de polinomios, las respuestas transformadas $R(s)$ al igual que $H(s)$ están constituidas por funciones de la forma:

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (11.1)$$

que puede escribirse, sacando factor común a_m en el numerador y b_n en el denominador, para que los términos de mayor grado tengan coeficiente unitario:

$$F(s) = \frac{a_m}{b_n} \frac{s^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} s^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{a_m} s + \frac{a_0}{a_m}}{s^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} s^{n-1} + \dots + \frac{b_1}{b_n} s + \frac{b_0}{b_n}} \quad (11.2)$$

o también, llamando $\frac{a_m}{b_n} = A_0$ y expresando los polinomios como productos de factores:

$$F(s) = A_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_k)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_l)\dots(s-p_n)} \quad (11.3)$$

Donde z_K son los ceros de la función, p_i los polos y A_0 un factor de escala. Para que A_0 tenga el valor correcto, antes de hallar los polos y los ceros (raíces de los polinomios del denominador y el numerador, respectivamente) debe operarse algebraicamente de modo que no existan términos con exponentes negativos para s y que los coeficientes de los términos de mayor grado sean unitarios.

Ejemplo:

$$\text{Sea } F(s) = 5 \frac{4s + 24 + 32 \frac{1}{s}}{2s^2 + 8s + 6} \quad (11.4)$$

multiplicando numerador y denominador por s resulta:

$$F(s) = 5 \frac{4s^2 + 24s + 32}{2s^3 + 8s^2 + 6s} \quad (11.5)$$

sacando factor 4 en el numerador y 2 en el denominador se obtiene:

$$F(s) = 10 \frac{s^2 + 6s + 8}{s^3 + 4s^2 + 3s} \quad (11.6)$$

Las raíces del polinomio del numerador son $z_1 = -2$ y $z_2 = -4$ mientras que las del denominador resultan $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ y $p_3 = -3$, pudiendo escribirse:

$$F(s) = 10 \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)} \quad \text{CORRECTO} \quad (11.7)$$

Nótese que si inadvertidamente se buscan las raíces de los polinomios en la Ec. (11.5), se llega a la ecuación errónea:

$$F(s) = 5 \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)} \quad \text{INCORRECTO} \quad (11.8)$$

Finalmente, si por error se anularan los polinomios del numerador y denominador de la Ec. (11.4), tal como están, se llegaría a:

$$F(s) = 5 \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} \quad \text{INCORRECTO} \quad (11.9)$$

Volviendo a la Ec. (11.3), puede apreciarse que, salvo el factor de escala A_0 , que afecta la amplitud, pero no la forma de la respuesta, toda la información sobre $F(s)$ está contenida en los valores de los polos y los ceros de la función. Esto sugiere la conveniencia de representar dichos polos y ceros en el plano complejo para facilitar el análisis de la influencia que tienen sobre la respuesta. En la Fig. 11.1 se ha representado la configuración o constelación de polos y ceros de la Ec. (11.7). Los ceros se representan con un círculo y los polos con una x .

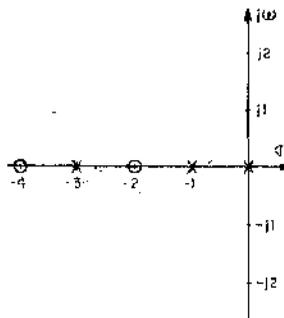


Fig. 11.1

Cuando dos polos o dos ceros de la Ec. (11.3) tienen el mismo valor, se dice que son polos o ceros dobles. Análogamente se dice que son triples, cuádruples o en general de orden de multiplicidad q , si se repiten 3, 4 o q veces respectivamente. Así, una función como la dada por la Ec. (11.10), se representa como se muestra en la Fig. 11.2:

$$F(s) = 8 \frac{(s+1)^3}{s^2 [s+(2-j1)][s+(2+j1)]} \quad (11.10)$$

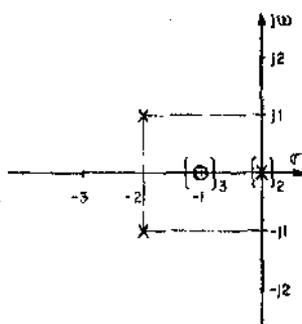


Fig. 11.2

Además de los polos y ceros explícitos ya definidos, si el grado del polinomio del numerador m , es mayor que el denominador n , existirán ceros implícitos en el infinito.

Si en cambio es $m < n$, existirán polos implícitos en el infinito. Si se consideran los polos y ceros explícitos e implícitos, el número total de polos es igual al número total de ceros.

Ejemplo:

La función $F(s) = 3 \frac{s+1}{(s+2)^2 (s+3)}$ tiene un cero simple en $z_1 = -1$, un polo doble en $p_1 = -2$ y otro simple en $p_2 = -3$. Además posee un cero de orden 2 en el infinito, ya que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} 3 \frac{(s+1)}{(s+2)^2 (s+3)} \cong \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s^2 s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2}$$

Según se vio en el Cap. 10:

$$R(s) = H(s) E_x(s) \quad (11.11)$$

De modo que la configuración de polos y ceros de la respuesta transformada $R(s)$ queda constituida en base a las contribuciones de las constelaciones de la función operacional del circuito $H(s)$ y la excitación transformada $E_x(s)$, como se muestra en la Fig. 11.3.

Puede apreciarse que el polo doble en el origen de la excitación, se convierte en un polo simple, pues $H(s)$ posee un cero en el origen que lo cancela parcialmente.

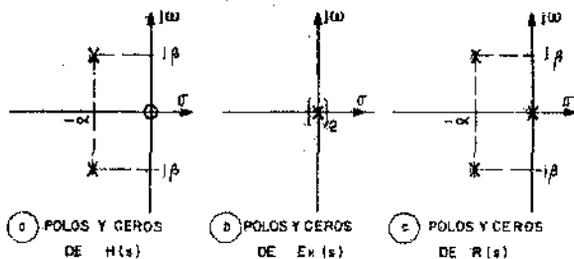


Fig. 11.3

Existen ciertas *restricciones* respecto de las ubicaciones de los polos y ceros de la función circuital $H(s)$ que serán estudiadas en primer término para las *inmitancias de excitación*.

- a) Las funciones $Z(s)$ e $Y(s)$ son de la forma expresada por la Ec. (11.1), con *todos* sus coeficientes reales y positivos, por ser combinaciones de los parámetros circuitales.

Una función de variable compleja que es real cuando la variable independiente s lo es, se denomina *función real*. Para estas funciones se cumple que:

$$F(s^*) = F^*(s) \quad (11.11)$$

Esto es, si para un valor s la función vale $F(s)$, para el valor conjugado s^* la función toma el valor conjugado $F^*(s)$. Debido a esta propiedad, los polos y los ceros de las inmitancias, de excitación, son reales o aparecen de a pares conjugados.

- b) Los modelos circuitales constituidos por elementos pasivos, excitados por una señal de amplitud finita deben dar respuestas acotadas. En consecuencia, no pueden poseer polos con parte real positiva. Como los polos de $Z(s)$ son los ceros de $Y(s)$ y viceversa, se deduce que las inmitancias de excitación tienen todos sus polos y ceros con componentes real negativa. Esto es, ubicados en el semiplano izquierdo o como límite sobre el eje $j\omega$.

En el párrafo 11.3 se verá que los polos con componentes real negativa dan respuestas crecientes con el tiempo.

- c) Para que la respuesta tenga acotadas las ordenadas, en el caso de existir polos y ceros sobre el eje $j\omega$, éstos deben ser simples. En efecto, los polos de orden superior a uno, ubicados sobre el eje $j\omega$ dan lugar a respuestas crecientes con el tiempo.

En efecto, la función transformada:

$$F(s) = A_0 \frac{s}{(s + j\beta)^2 (s - j\beta)^2} = A_0 \frac{s}{[s^2 + \beta^2]^2}$$

da lugar a la siguiente función temporal:

$$f(t) = \frac{A_0}{2\beta} t \operatorname{sen} \beta t$$

cuya amplitud crece linealmente con el tiempo.

- d) Los polos y ceros en el infinito, implícitos en las inmitancias de excitación, sólo pueden ser simples. Esto se deduce del comportamiento de los dipolos pasivos para frecuencias muy altas y muy bajas. En efecto, cuando la frecuencia tiende a infinito en la Ec. (11.1), resulta:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \cong \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m s^m}{b_n s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_n} s^{m-n} \quad (11.12)$$

Si $m - n = +1$ la Ec. (11.12) queda:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_n} s$$

que corresponde a una impedancia en la que la componente inductiva es preponderante $Z(s) = L_e s$ o una admitancia en la que la componente capacitiva es la más importante $Y(s) = C_e s$.

Si $m - n = -1$ la Ec. (11.12) queda:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{b_n}{a_m} s}$$

que corresponde a una impedancia en la que es preponderante la componente capacitiva $Z(s) = \frac{1}{C_e s}$ o una admitancia en la que la componente inductiva es la más importante $Y(s) = \frac{1}{L_e s}$

Finalmente, si $m - n = 0$, la Ec. (11.12) queda:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_n}$$

que corresponde a una inmitancia resistiva en la que las componentes reactivas no existen o han sido cortocircuitadas por capacitores conectados en paralelos o dejadas a circuito abierto por inductores conectados en serie $Z(s) = R_e$ o $Y(s) = G_e$.

En resumen, los grados del numerador m y del denominador n , deben ser iguales o diferir en una unidad. Esto implica que no existan polos o ceros implícitos en el infinito ($m - n = 0$) o que exista un cero simple en el infinito ($m - n = 1$), o un polo simple en el infinito ($m - n = -1$).

Análogamente, cuando la frecuencia tiende a cero, la Ec. (11.1) se reduce a:

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cong \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0} \quad (11.13)$$

En la Ec. (11.13) pueden darse las siguientes alternativas:

$$* \text{ Si } a_0 = 0 \therefore \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cong \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_1}{b_0} s$$

que corresponde a: $Z(s) = L_e s$ ó $Y(s) = C_e s$

$$* \text{ Si } b_0 = 0 \therefore \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cong \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{b_1}{a_0} s}$$

que corresponde a: $Z(s) = \frac{1}{C_e s}$ ó $Y(s) = \frac{1}{L_e s}$

$$* \text{ si } a_0 \neq 0 \text{ y } b_0 \neq 0 \therefore \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \cong \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_0}{b_0}$$

que corresponde a: $Z(s) = R_e$ ó $Y(s) = G_e$.

Para el caso de las funciones de transferencia $Z_T(s)$, $Y_T(s)$, $A_V(s)$, y $A_I(s)$, las restricciones son las siguientes:

- Ⓒ a) Las funciones de transferencia son de la forma dada por la Ec. (11.1), con todos los coeficientes positivos. En consecuencia son funciones reales. Los polos y ceros son reales o aparecen a pares conjugados.
- b) Para que la respuesta esté acotada, los polos deben tener la componente real negativa o, como caso límite, nula. Esto es, deben encontrarse en el

semiplano izquierdo o en el eje $j\omega$. Los ceros pueden encontrarse en todo el plano complejo, pues la recíproca de la función de transferencia no es una función circuial como en el caso de las immitancias.

Cuando $H(s)$ tiene todos los ceros en el semiplano izquierdo, se denomina función de fase mínima, por las razones que se verán en el párrafo 11.9.

- c) Para que la respuesta tenga sus ordenadas acotadas, en caso de existir polos sobre el eje $j\omega$, éstos deben ser simples.

No hay restricciones respecto de la multiplicidad de los ceros.

- d) Para las trasmitancias de tensión y corriente, el grado del polinomio del numerador debe ser menor o igual al del denominador:

$$m \leq n$$

- e) Para las immitancias de transferencia, el grado de polinomio del numerador debe ser igual o menor al del denominador más uno.

$$m \leq n + 1$$

11.3 Configuraciones típicas de polos y ceros de $R(s)$ y respuestas temporales asociadas

En esta sección se analizarán configuraciones elementales de polos y ceros, hallando sus respuestas temporales correspondientes, con el fin de lograr una familiarización con el tema, que permita predecir el comportamiento de un circuito por simple inspección de su constelación de polos y ceros de la respuesta trasformada $R(s)$.

11.3.1) **Polo doble en el origen:** En la Fig. 11.4.a) se muestra la configuración de polos y ceros. La respuesta trasformada que corresponde a dicha configuración, es obviamente:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{s^2} \quad (11.14)$$

Donde el valor de A_0 no es conocido, pues no queda consignado en el gráfico de polos y ceros. No obstante, su valor no afecta la forma de la respuesta, por tratarse de una constante. De acuerdo a la tabla de la Fig. 10.13, resulta que:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = A_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = A_0 \rho(t) \quad (11.15)$$

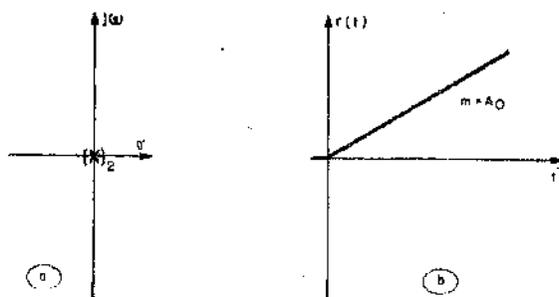


Fig. 11.4

Resulta entonces que, a un polo doble en el origen, le corresponde una rampa de pendiente A_0 en el dominio del tiempo, como se muestra en la Fig. 11.4.b). En este caso existe un polo doble sobre el eje $j\omega$, pues se trata de $R(s)$, ya que como se vio, $H(s)$ sólo puede tener polos simples sobre dicho eje para los circuitos pasivos.

11.3.2) Polo simple en el origen: La configuración de polos y ceros es la mostrada en la Fig. 11.5.a) y la respuesta transformada resulta:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{s} \quad (11.16)$$

Cuya antitransformada es:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = A_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = A_0 u(t) \quad (11.17)$$

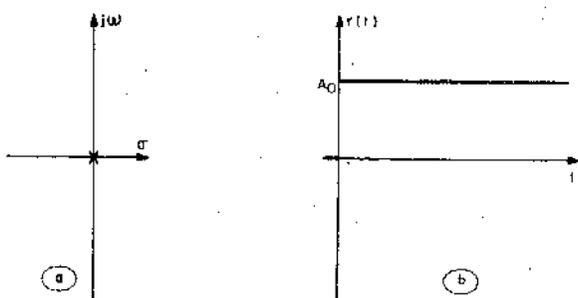


Fig. 11.5

En consecuencia, a un polo simple en el origen, le corresponde un escalón de amplitud A_0 , como el mostrado en la Fig. 11.5.b).

11.3.3) **No existen polos ni ceros:** En este caso la respuesta transformada es:

$$R(s) = A_0 \quad (11.18)$$

y la respuesta temporal:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = A_0 \mathcal{L}^{-1} [1] = A_0 \delta(t) \quad (11.19)$$

De modo que la respuesta temporal que corresponde a una configuración sin polos ni ceros es un impulso de fuerza A_0 , como se muestra en la Fig. 11.6. Nótese que cada reducción en el orden de multiplicidad del polo equivale a una derivación temporal.

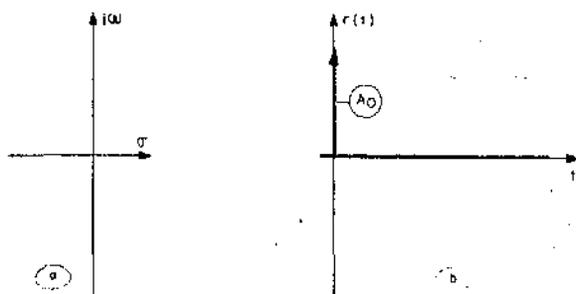


Fig. 11.6

11.3.4) **Polo real negativo:** La configuración de polos y ceros es la mostrada en la Fig. 11.7.a). La respuesta transformada es:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{s + \alpha} \quad (11.20)$$

Antitrasformando se obtiene la respuesta temporal dada por la Ec. (11.21), que se encuentra representada en la Fig. 11.7.b).

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = A_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \alpha} \right] = A_0 e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.21)$$

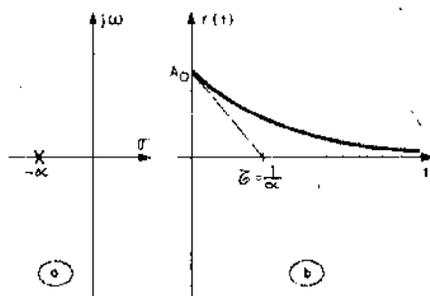


Fig. 11.7

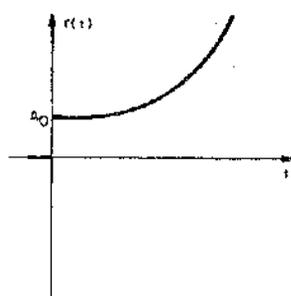


Fig. 11.8

Comparando el factor $e^{-\alpha t}$ de la Ec. (11.21) con $e^{-\frac{t}{\tau}}$ puede inferirse que la constante de tiempo τ de la respuesta es la recíproca de la distancia del polo al origen. Esto es:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (11.22)$$

En consecuencia, cuanto más cerca del origen está el polo, más lentamente cae la respuesta.

En el límite, cuando el polo llega al origen, la constante de tiempo se hace infinita, resultando el escalón de la Fig. 11.5.b).

Nótese que un polo real positivo daría lugar a una exponencial creciente como la de la Ec. (11.23) que se halla representada en la Fig. 11.8:

$$r(t) = A_0 e^{+\alpha t} u(t) \quad (11.23)$$

En este caso, la respuesta crece indefinidamente. En consecuencia, podría tenerse respuesta sin excitación. Cuando esto se produce se dice que el circuito es *inestable*.

Los circuitos pasivos no pueden presentar este comportamiento. En consecuencia, no pueden poseer polos con parte real positiva.

11.3.5) **Polos imaginarios conjugados:** La configuración de polos y ceros es la mostrada en la Fig. 11.9.a).

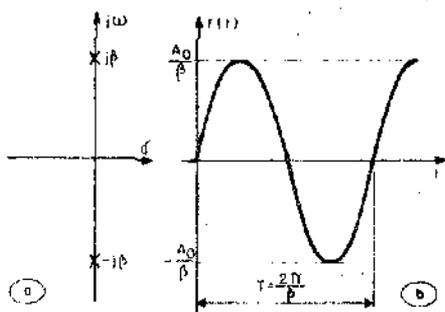


Fig. 11.9

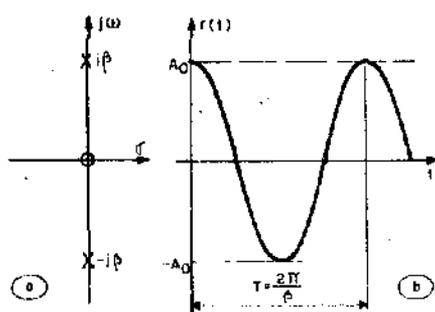


Fig. 11.10

La respuesta transformada resulta:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{(s + j\beta)(s - j\beta)} \quad (11.24)$$

que puede escribirse:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{s^2 + \beta^2} = \frac{A_0}{\beta} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \quad (11.25)$$

Antitrasformando la Ec. (11.25) se obtiene:

$$r(t) = \frac{A_0}{\beta} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \right] = \frac{A_0}{\beta} \operatorname{sen} \beta t u(t) \quad (11.26)$$

que se encuentra representada en la Fig. 11.9.b). donde la amplitud vale $\frac{A_0}{\beta}$ y la pulsación $\omega = \beta$. En consecuencia, cuanto más cercanos al origen están los polos, más baja es la frecuencia de la senoide. En el límite, cuando los dos polos conjugados se encuentran en el origen, el período se hace infinito y el polo doble da lugar a una rampa, como se vio en la Fig. 11.4.

Si además de los polos imaginarios conjugados existe un cero en el origen, como se ve en la Fig. 11.10.a), la respuesta transformada resulta:

$$R(s) = A_0 \frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad (11.27)$$

y la respuesta temporal:

$$r(t) = A_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \beta^2} \right] = A_0 \cos \beta t u(t) \quad (11.28)$$

Comparando las Ecs. (11.26) y (11.28), se ve que la inclusión del cero afecta la amplitud y la fase, pero no la forma de la señal. Si se hacen tender los polos al origen, al llegar a él, uno de los polos se cancela con el cero, quedando un polo simple que da lugar a un escalón como el mostrado en la Fig. 11.5. Por lo tanto, el coseno decrece cada vez menos hasta que en el límite da lugar a un escalón.

11.3.6) **Polos complejos conjugados con parte real negativa:** En la Fig. 11.11 se muestra una configuración de polos y ceros con dos polos complejos conjugados con su componente real negativa $(-\alpha)$ y un cero en $(-\alpha)$. La respuesta transformada resulta:

$$R(s) = A_0 \frac{(s + \alpha)}{[s + (\alpha - j\beta)] [s + (\alpha + j\beta)]} \quad (11.29)$$

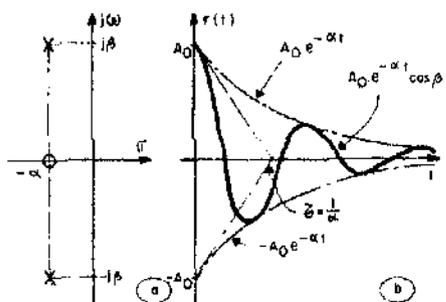


Fig. 11.11

que puede escribirse:

$$R(s) = A_0 \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (11.30)$$

cuya antitransformada es:

$$r(t) = A_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t u(t) \quad (11.31)$$

La Ec. (11.31) es una oscilación cosenoidal, cuya amplitud $A_0 e^{-\alpha t}$ decrece exponencialmente con una constante de amortiguamiento absoluta α .

Las oscilaciones tienen por envolventes a $\pm A_0 e^{-\alpha t}$ y por pseudo período a:

$$T_a = \frac{2\pi}{\beta}$$

siendo la pulsación de las mismas $\omega = \beta$.

La Ec. (11.31) se encuentra representada en la Fig. 11.11.b).

Si no existiera el cero de la Fig. 11.11.a), la respuesta tendría la forma de:

$$r(t) = \frac{A_0}{\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t u(t) \quad (11.32)$$

La Ec. (11.31) y la Fig. 11.11 muestran que la amplitud de las oscilaciones se amortigua tanto más lentamente cuanto más cercanos al eje $j\omega$ se encuentran los polos. En el límite, si estos quedan sobre dicho eje, se tienen las oscilaciones de amplitud constante de la Fig. 11.10. La frecuencia de las oscilaciones aumenta con la distancia de los polos al eje real.

Nótese que esta respuesta corresponde al régimen sub-amortiguado estudiado en el Cap. 5.

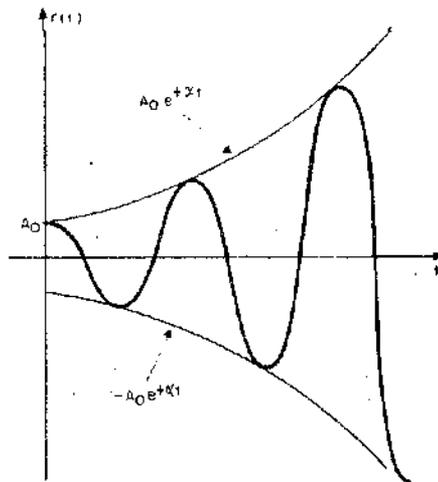


Fig. 11.12

Si la parte real de los polos fuera positiva la Ec. (11.31) resultaría:

$$r(t) = A_0 e^{+\alpha t} \cos \beta t u(t) \quad (11.33)$$

y las oscilaciones serían de amplitud creciente indefinidamente, como se muestra en la Fig. 11.12. Ya se aclaró anteriormente que este caso no puede darse cuando los circuitos son pasivos.

11.3.7) **Polo doble negativo:** El diagrama de polos y ceros es el representado en la Fig. 11.13.a). La respuesta transformada resulta:

$$R(s) = A_0 \frac{1}{(s + \alpha)^2} \quad (11.34)$$

y la respuesta temporal, obtenida antitransformando la Ec. (11.34):

$$r(t) = A_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] = A_0 e^{-\alpha t} \rho(t) \quad (11.35)$$

La Ec. (11.35) se encuentra representada en la Fig. 11.13.b) y corresponde al régimen de amortiguamiento crítico estudiado en el Cap. 5.

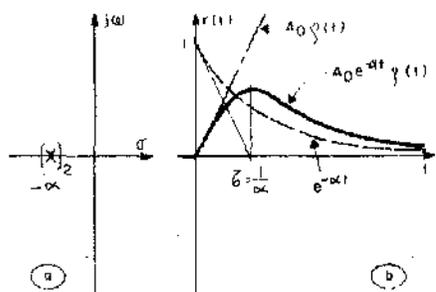


Fig. 11.13

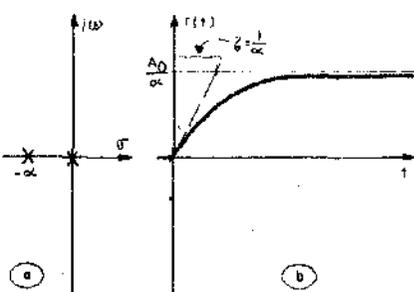


Fig. 11.14

11.3.8) **Un polo real negativo y otro en el origen:** La configuración de polos y ceros se muestra en la Fig. 11.14.a) y la respuesta transformada en la Ec. (11.36):

$$R(s) = A_0 \frac{1}{s(s + \alpha)} \quad (11.36)$$

antitransformando se obtiene:

$$r(t) = \frac{A_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

que se representa en la Fig. 11.14.b) y corresponde a la carga de un capacitor y otras respuestas análogas estudiadas en el Cap. 4. Nótese que este caso es equivalente a la superposición de los desarrollados en los puntos 11.3.2 y 11.3.4. Esto es, se trata de la suma algebraica de un escalón debido al polo en el origen y una exponencial decreciente debido al polo real negativo.

11.3.9) **Dos polos reales negativos:** En la Fig. 11.15.a) se muestra la configuración de polos y ceros y en la Ec. (11.37) la respuesta transformada.

$$R(s) = A_0 \frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (11.37)$$

Antitransformando se obtiene:

$$r(t) = \frac{A_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})$$

cuya representación gráfica se encuentra en la Fig. 11.15.b). Nótese que se trata de la respuesta típica correspondiente al régimen sobreamortiguado estudiado en el Cap. 5.

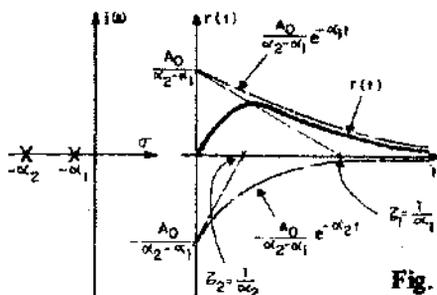


Fig. 11.15

Esto resulta razonable si se recuerda que, como se mostró en el párrafo 10.8, los polos de $H(s)$ son las raíces de la ecuación característica.

Obsérvese que la configuración estudiada en el apartado 11.3.8 es un caso particular de la estudiada en éste, para el límite en que $\alpha_1 = 0$. En estas condiciones la exponencial superior se convierte en un escalón y el máximo es alcanzado para $t \rightarrow \infty$. Esto se ve claramente comparando las Figs. 11.14 y 11.15.

11.3.10) **Análisis cualitativo de configuraciones de polos y ceros más amplias:** Cuando se tiene una configuración de polos y ceros más general, la respuesta está constituida por la superposición de las respuestas correspondientes a cada una de las configuraciones elementales estudiadas en los apartados 11.3.1 a 11.3.7, como se vio en 11.3.8 y 11.3.9. Así por ejemplo, para la constelación de la Fig. 11.16, puede afirmarse que la respuesta temporal estará constituida por la suma algebraica de un escalón, dos señales cosenoidales de pulsaciones $\omega_2 = \beta_2$ y $\omega_3 = \beta_3$, una exponencial decreciente con constante de tiempo $\tau_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ y

una oscilación amortiguada con $\tau_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ y pseudo período $T_a = \frac{2\pi}{\beta_1}$

La importancia relativa de cada componente dependerá del valor del residuo en cada polo, el que es función de la ubicación de todos los polos y los ceros. Estos últimos no dan lugar a la aparición de componentes, pero contribuyen a definir las amplitudes y las fases de las mismas.

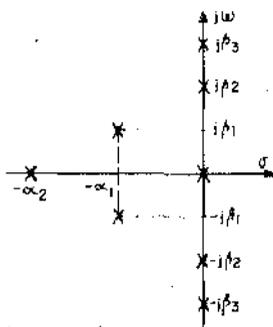


Fig.11.16.

11.4 Obtención de la respuesta temporal a partir de la configuración de polos y ceros de $R(s)$

Sea una respuesta transformada:

$$R(s) = H(s) E_X(s)$$

constituida por un cociente de polinomios del tipo de la Ec. (11.3), en la cual todos los polos y ceros son simples.

$$R(s) = A_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_k) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_l) \cdots (s - p_n)} \quad (11.38)$$

La Ec. (11.38) puede ser expandida en fracciones simples. Si $n > m$ resulta:

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \tag{11.39}$$

donde K_i es el residuo de $R(s)$ calculado en el polo p_i .

La respuesta temporal se obtiene antitransformando la Ec. (11.39). Según se vio en el Cap. 10 resulta:

$$r(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) \tag{10.36}$$

Los valores de las constantes K_i se calculan mediante la Ec. (10.51):

$$K_i = \text{Res} [R(s)]_{s=p_i} = \lim_{s \rightarrow p_i} \{ (s - p_i) R(s) \} \tag{10.51}$$

Sustituyendo la Ec. (11.38) en la Ec. (10.51) resulta:

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[(s - p_i) A_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_k) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_i) \cdots (s - p_n)} \right]$$

Simplificando y llevando al límite queda:

$$K_i = A_0 \frac{(p_i - z_1)(p_i - z_2) \cdots (p_i - z_k) \cdots (p_i - z_m)}{(p_i - p_1)(p_i - p_2) \cdots (p_i - p_n)} \tag{11.40}$$

En la Fig. 11.17 puede verse que los factores $(p_i - z_k)$ del numerador, son los fasores dirigidos desde cada cero al polo en el cual se calculó el residuo.

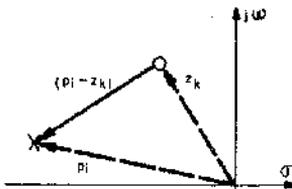


Fig. 11.17

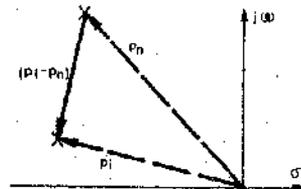


Fig. 11.18

Análogamente, la Fig. 11.18 muestra que los factores $(p_i - p_n)$ del denominador son los fasores dirigidos desde cada polo a aquél en el cual se calcula el residuo.

En consecuencia, la Ec. (11.40) puede ser expresada:

$$K_i = A_0 \frac{\prod_{k=1}^m \text{fasores dirigidos desde cada cero al polo } p_i}{\prod_{l=1}^n \text{fasores dirigidos desde cada polo hasta } p_i} \quad (11.41)$$

cabe destacar que si no existen ceros, el numerador vale 1. Los polos y ceros en el infinito no se computan especialmente, pues ya están implícitamente en la Ec. (11.41).

Ejemplo:

Hallar la respuesta temporal del circuito cuya constelación de polos y ceros de la respuesta transformada $R(s)$ se representa en la Fig. 11.19.a).

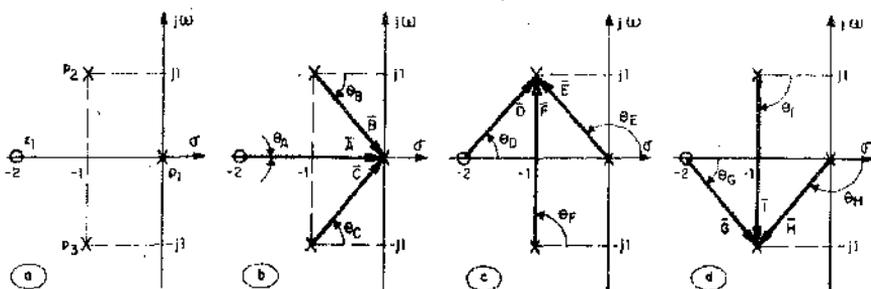


Fig. 11.19

La configuración incluye los siguientes:

- ceros: uno en $z_1 = -2$
- polos: tres en $p_1 = 0$
- $p_2 = -1 + j1$
- $p_3 = -1 - j1$

En consecuencia hay un cero doble en el infinito.

El cálculo de los residuos en los polos es el siguiente:

de acuerdo a la Fig. 11.19.b), y la Ec. (11.41), el residuo en p_1 vale:

$$K_1 = A_0 \frac{\bar{A}}{B \bar{C}} = A_0 \frac{2 e^{j0}}{\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \sqrt{2} e^{j45^\circ}} = A_0 \quad (11.42)$$

Según la Fig. 11.19.c) y la Ec. (11.41), el residuo en p_2 es:

$$K_2 = A_0 \frac{\bar{D}}{\bar{E} \bar{F}} = A_0 \frac{\sqrt{2} e^{j 45^\circ}}{\sqrt{2} e^{j 135^\circ} 2 e^{j 90^\circ}} = \frac{A_0}{2} e^{-j 180^\circ} = -\frac{A_0}{2} \quad (11.43)$$

En base a la Fig. 11.19.d) y la Ec. (11.41), el residuo en p_3 resulta:

$$K_3 = A_0 \frac{\bar{G}}{\bar{H} \bar{I}} = A_0 \frac{\sqrt{2} e^{-j 45^\circ}}{\sqrt{2} e^{-j 135^\circ} 2 e^{-j 90^\circ}} = \frac{A_0}{2} e^{j 180^\circ} = -\frac{A_0}{2} \quad (11.44)$$

Finalmente, reemplazando los valores de los polos y los residuos en la Ec. (10.36), se obtiene la respuesta temporal buscada:

$$r(t) = \left[A_0 e^{0t} - \frac{A_0}{2} e^{(-1+j1)t} - \frac{A_0}{2} e^{(-1-j1)t} \right] u(t)$$

que puede escribirse:

$$r(t) = A_0 u(t) - A_0 e^{-t} \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right) u(t)$$

o también:

$$r(t) = A_0 u(t) - A_0 e^{-t} \cos t u(t) \quad (11.45)$$

que incluye un escalón debido al polo en el origen y una oscilación cosenoidal de pulsación $\omega = 1$ y constante absoluta de amortiguamiento $\alpha = 1$.

Nótese si al calcular K_3 se hubieran tomado todos los argumentos de los fasores en sentido positivo el resultado final hubiera sido el mismo. En efecto si:

$$K_3 = A_0 \frac{\bar{G}}{\bar{H} \bar{I}} = A_0 \frac{\sqrt{2} e^{j 315^\circ}}{\sqrt{2} e^{j 225^\circ} 2 e^{j 270^\circ}} = \frac{A_0}{2} e^{-j 180^\circ} = -\frac{A_0}{2}$$

11.5 Influencia de la ubicación de los polos y los ceros sobre el valor de los residuos

11.5.1) **Polos complejos conjugados:** Considérese una respuesta transformada $R(s)$ como la de la Ec. (11.46), que incluye un par de polos complejos conjugados:

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_1(s) [s - (\alpha + j\beta)] [s - (\alpha - j\beta)]} \quad (11.46)$$

El residuo en el polo $p_1 = \alpha + j\beta$ vale:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow (\alpha + j\beta)} \left\{ [s - (\alpha + j\beta)] \frac{N(s)}{D_1(s) [s - (\alpha + j\beta)] [s - (\alpha - j\beta)]} \right\}$$

Simplificando y llevando al límite:

$$K_1 = \frac{N(\alpha + j\beta)}{D_1(\alpha + j\beta) j 2\beta} \quad (11.47)$$

Análogamente, el residuo en el polo conjugado $p_2 = \alpha - j\beta$ resulta:

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow (\alpha - j\beta)} \left\{ [s - (\alpha - j\beta)] \frac{N(s)}{D_1(s) [s - (\alpha + j\beta)] [s - (\alpha - j\beta)]} \right\}$$

operando queda:

$$K_2 = \frac{N(\alpha - j\beta)}{D_1(\alpha - j\beta) (-j 2\beta)} \quad (11.48)$$

Comparando las Ecs. (11.47) y (11.48) se concluye que los residuos en dos polos complejos conjugados, tienen valores conjugados.

11.5.2) **Polo próximo a un cero:** En la Fig. 11.20 se muestra una configuración de polos y ceros, en la que existe un cero z_k próximo al polo p_i en el que se está calculando el residuo. K_i resultará, de acuerdo a la Ec. (11.41):

$$K_i = A_0 \frac{\overline{A} \text{ Producto fasores dirigidos de los ceros restantes al Polo } p_i}{\text{Producto fasores dirigidos de los Polos a } p_i} \quad (11.49)$$

Puesto que \bar{A} tendrá un módulo pequeño debido a la proximidad de z_k y p_i , puede afirmarse que el residuo en un polo próximo a un cero tiene un valor pequeño. En el límite, cuando el cero y el polo se superponen, se cancelan mutuamente.

11.5.3) **Polo próximo a otro polo:** En la Fig. 11.21 se muestra la configuración y en la Ec. (11.50) el residuo en p_i .

$$K_i = A_0 \frac{\text{Producto de los fasores dirigidos desde cada cero al Polo } p_i}{\bar{B} \text{ Producto de los fasores dirigidos desde los Polos restantes a } p_i} \quad (11.50)$$

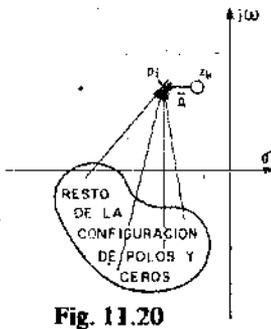


Fig. 11.20

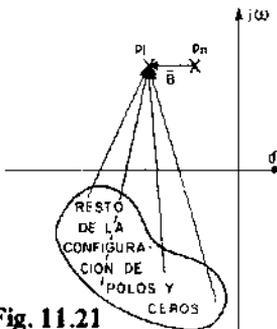


Fig. 11.21

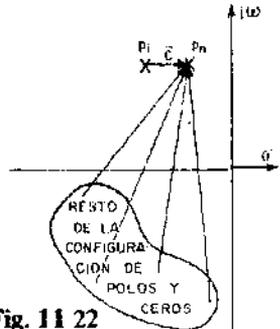


Fig. 11.22

Como el fador \bar{B} tiene un módulo pequeño y se encuentra en el denominador, el valor del residuo será elevado. No debe extrapolarse esta conclusión al caso de polos dobles, para los cuales no es aplicable esta metodología.

Es interesante destacar que si se calcula el residuo en el polo p_n como los restantes fasores casi no se alteran, debido a la proximidad de p_i y p_n mientras que $\bar{C} = -\bar{B}$ resulta que los residuos en dos polos muy próximos entre sí son de valor absoluto aproximadamente igual y signo opuesto. Esto es, según la Ec. (11.50), la Fig. 11.21 y la Fig. 11.22:

$$K_n \cong -K_i$$

11.5.4) **Polo alejado del resto de la configuración:** En la Fig. 11.23 se muestra una configuración de polos y ceros en la cual existe un polo p_i alejado del resto de la constelación. El residuo en dicho polo resulta, para el ejemplo considerado:

$$K_i = A_0 \frac{\bar{A} \bar{B}}{\bar{C} \bar{D} \bar{E}}$$

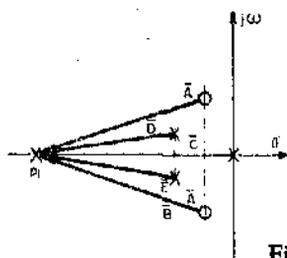


Fig. 11.23

Como todos los fasores tienen módulos de valor elevado, debido a la lejanía de p_i resulta que si el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, el residuo en un polo alejado del resto de la configuración, tiene un valor pequeño.

Está claro que si $n > m$ y el polo p_i está próximo al resto de la configuración, K_i tendrá un valor importante.

11.6 Respuestas indicativas típicas de los sistemas de primer y segundo orden

En el párrafo 10.9.5, se introdujo la respuesta indicativa y se mencionó que ella describe las componentes libres de la respuesta transitoria. En efecto,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)]$$

es la respuesta del circuito a un impulso unitario y depende solamente de la configuración circuital.

En este apartado se estudiarán las respuestas indicativas típicas de primer y segundo orden. Esto es, los que tienen el polinomio del denominador de $H(s)$ de primer y segundo grado, respectivamente.

11.6.1) Sistemas de primer orden: En este caso, el grado de denominador es $n = 1$. En el párrafo 11.2 se vio que para las immitancias de excitación ($m = 1$) sólo puede tomar los valores $-1, 0$ ó $+1$.

En consecuencia, siendo $n = 1$, m sólo puede valer $0, 1$ ó 2 .

Para las trasmittancias de tensión o corriente debe ser $m \leq n$. Como $n = 1$, resulta que m puede tomar los valores 0 ó 1 .

Por último, para las immitancias de trasferencias, debe cumplirse que $m \leq n + 1$, de modo que m puede valer $0, 1$ ó 2 .

En consecuencia, $H(s)$ puede tomar alguna de las formas siguientes:

$$\text{para } m = 0 \quad H(s) = A_0 \frac{1}{s - p_1} \quad (11.51)$$

$$\text{para } m = 1 \quad H(s) = A_0 \frac{s - z_1}{s - p_1} \quad (11.52)$$

$$\text{para } m = 2 \quad H(s) = A_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s - p_1} \quad (11.53)$$

Siendo p_1 un polo simple, debe ser necesariamente real y por corresponder a un circuito pasivo, negativo. Esto es:

$$p_1 = -\alpha \quad (11.54)$$

Antitrasformando la Ec. (11.51) y teniendo en cuenta la Ec. (11.54), resulta:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = A_0 e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.55)$$

Antitrasformando la Ec. (11.52) y recordando la (11.54) se obtiene:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = -(\alpha + z_1) A_0 e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.56)$$

z_1 debe ser real. Si es una inmitancia de excitación será negativa, resultando $z_1 = -\alpha_1$ y en consecuencia:

$$h(t) = (\alpha_1 - \alpha) A_0 e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.57)$$

El signo $h(t)$ depende de los valores relativos α_1 y α y del signo de A_0 .

Finalmente, antitrasformando la Ec. (11.53) y tomando en consideración la Ec. (11.54) se llega a:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = A_0 (\alpha - z_1) (\alpha + z_2) e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.58)$$

Si $z_1 = -\alpha_1$ y $z_2 = -\alpha_2$ resulta:

$$h(t) = A_0 (\alpha - \alpha_1) (\alpha - \alpha_2) e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.59)$$

Si $z_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$ y $z_2 = -\alpha_1 - j\beta_1$ queda:

$$h(t) = A_0 [(\alpha - \alpha_1)^2 + \beta_1^2] e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.60)$$

Las Ecs. (11.54) a (11.60), pueden ser expresadas como muestra la Ec. (11.61), que resume la forma de la componente libre de todos los sistemas de primer orden:

$$r_{hn}(t) = K e^{-\alpha t} u(t) \quad (11.61)$$

Donde K es una constante cuyo valor depende de A_0 , α y los ceros existentes. La Ec. (11.61) tiene una constante de tiempo $\tau = \frac{1}{\alpha}$ y puede ser normalizada como indica la Ec. (11.62):

$$r_{hn}(t_n) = e^{-t_n} \text{ para } t_n > 0 \quad (11.62)$$

expresión esta que fue detalladamente estudiada en el Cap. 4.

11.6.2) Sistemas de segundo orden: En este caso, el polinomio del denominador es de 2do. grado. Esto es, $n = 2$. Un análisis similar al efectuado para los sistemas de primer orden, muestra que m puede valer 0, 1, 2 o 3. No obstante, según se vio, los ceros afectan el valor y el signo de los residuos pero no la forma de las componentes. En consecuencia, para un análisis general, no es necesario explicitarlos, bastando con escribir:

$$H(s) = A_0 \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (11.63)$$

Por tratarse de un circuito pasivo, p_1 y p_2 estarán en el semiplano izquierdo, o bien, si no hay elementos disipativos sobre el eje $j\omega$.

Existen tres casos posibles para los valores de los polos:

- a) p_1 y p_2 son complejos conjugados.
- b) p_1 y p_2 son reales e iguales.
- c) p_1 y p_2 son reales y distintos.

Puesto que los polos son las raíces de la ecuación característica, estos casos se corresponden con los estudiados en el Cap. 5. En lo que sigue se resumen las características sobresalientes de cada uno.

11.6.2.1) **Régimen sub-amortiguado:** Si p_1 y p_2 son complejos conjugados, puede escribirse:

$$p_1 = -\alpha + j\beta$$

$$p_2 = -\alpha - j\beta$$

La Ec. (11.63) queda entonces:

$$H(s) = A_0 \frac{N(s)}{[s + (\alpha - j\beta)][s + (\alpha + j\beta)]} \quad (11.64)$$

La Ec. (11.64) conduce a una respuesta temporal del tipo:

$$h(t) = [K_1 e^{-(\alpha - j\beta)t} + K_2 e^{-(\alpha + j\beta)t}] u(t) \quad (11.65)$$

Donde K_1 y K_2 son constantes cuyos valores dependen de los polos y los ceros. La Ec. (11.65) puede ser expresada:

$$r_n(t) = h(t) = K e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t + \varphi) u(t) \quad (11.66)$$

Donde se aprecia claramente la forma de oscilaciones amortiguadas de la componente libre correspondiente al caso en estudio.

La Fig. 11.11 muestra el caso particular en el que existe un solo cero en $(-\alpha)$ y φ resulta igual a $\frac{\pi}{2}$. La pulsación de las oscilaciones libres con amortiguamiento vale, como se vio en el Cap. 5 para $\gamma < 1$.

$$\omega_a = \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (11.67)$$

donde: ω_0 es la pulsación de las oscilaciones libres sin amortiguamiento.

$\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0}$ es la constante de amortiguamiento relativa o normalizada.

y α es la constante de amortiguamiento absoluta, siendo su inversa la constante de tiempo de la envolvente de las oscilaciones.

El cambio del número o la ubicación de los ceros, modifica la amplitud K y la fase φ de la respuesta. Para $t = 0$ la Ec. (11.66) se reduce a:

$$r_h(0) = K \text{sen } \varphi$$

11.6.2.2) Régimen de amortiguamiento crítico: Los polos son reales e iguales. Esto es:

$$p_1 = p_2 = -\alpha \quad (11.68)$$

Reemplazando (11.68) en (11.63) queda:

$$H(s) = A_0 \frac{N(s)}{(s + \alpha)^2} \quad (11.69)$$

La Ec. (11.69) conduce a una respuesta temporal del tipo:

$$r_h(t) = h(t) = [K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}] u(t) \quad (11.70)$$

donde K_1 y K_2 son constantes cuyos valores dependen de los polos y los ceros incluidos en la configuración.

La Ec. (11.70) corresponde al caso de amortiguamiento crítico estudiada en el Cap. 5 para $\gamma = 1$.

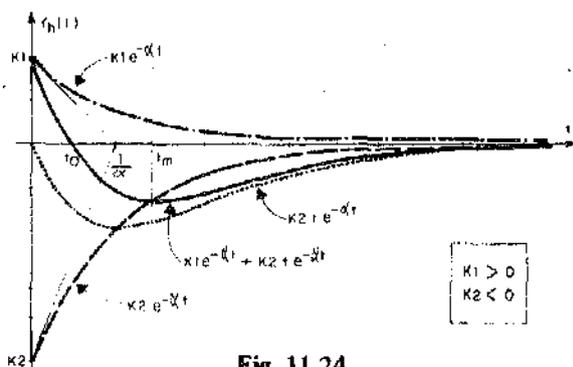


Fig. 11.24

La forma de la curva de $r_h(t)$ depende de los valores particulares de K_1 y K_2 . Si K_1 y K_2 son de distinto signo, la curva corta el eje de tiempos y posee un punto extremal, como muestra la Fig. 11.24. Si K_1 y K_2 tienen el mismo signo, la curva no corta al eje de tiempos y puede o no tener un punto extremal, según se ve en las Figs. 11.25 y 11.26.

Finalmente, si $K_1 = 0$, la curva parte de cero y presenta un punto extremal, como se aprecia en la Fig. 11.13. En efecto, anulando la Ec. (11.70) se obtiene el tiempo t_0 para el cual la curva corta el eje horizontal:

$$t_0 = -\frac{K_1}{K_2} \quad (11.71)$$

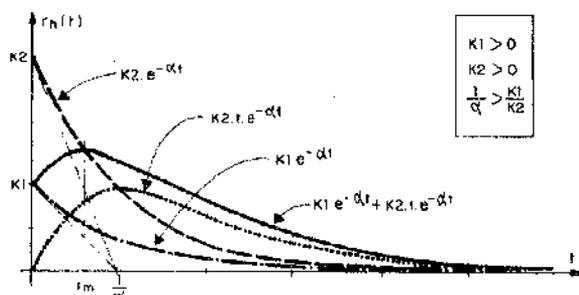


Fig. 11.25

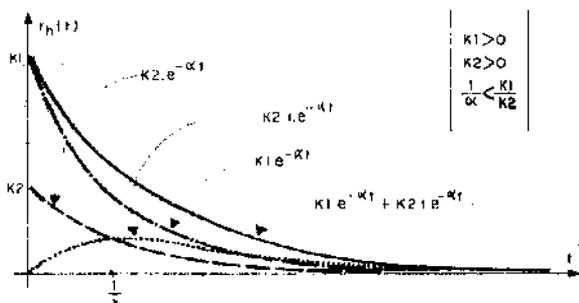


Fig. 11.26

La Ec. (11.71) muestra que si $K_1 = 0$, la curva parte de cero y para que $t_0 > 0$ deben tener K_1 y K_2 signos opuestos.

Si se deriva la Ec. (11.70) y se iguala a cero el resultado, se obtiene el tiempo t_m para el cual se produce el punto extremal:

$$t_m = \frac{1}{\alpha} - \frac{K_1}{K_2} \quad (11.72)$$

La Ec. (11.72) muestra que si $K_1 = 0$ o si K_1 y K_2 tienen signos opuestos, siempre existe punto extremal. Si en cambio K_1 y K_2 tienen el mismo signo, sólo existirá un punto extremal si $\frac{1}{\alpha} > \frac{K_1}{K_2}$

11.6.2.3) **Regimen sobreamortiguado:** En este caso, siendo p_1 y p_2 reales, negativos y distintos, podemos escribir:

$$p_1 = -\alpha_1 \quad ; \quad p_2 = -\alpha_2$$

de modo que la Ec. (11.64) queda:

$$H(s) = A_0 \frac{N(s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (11.73)$$

La Ec. (11.73) conduce a una respuesta temporal del tipo:

$$r_h(t) = h(t) = [K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}] u(t) \quad (11.74)$$

donde K_1 y K_2 son constantes cuyos valores dependen de los polos y los ceros incluidos en la configuración.

La Ec. (11.74) corresponde al régimen sobreamortiguado que se estudió en el Cap. 5 para $\gamma > 1$.

La forma de la curva de $r_h(t)$ depende de los valores relativos de K_1 y K_2 , α_1 y α_2 . Para determinar si la curva corta el eje de los tiempos, anulamos la Ec. (11.74), resultando:

$$\begin{aligned} K_1 e^{-\alpha_1 t_0} + K_2 e^{-\alpha_2 t_0} &= 0 \\ \therefore -\frac{K_1}{K_2} &= e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t_0} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos naturales y despejando el tiempo, se obtiene:

$$t_0 = \frac{\ln \left[-\frac{K_1}{K_2} \right]}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (11.75)$$

En consecuencia, si $\frac{K_1}{K_2} > 0$, la curva no corta el eje t .

Si por el contrario $\frac{K_1}{K_2} < 0$, la Ec. (11.75) puede escribirse:

$$t_0 = \frac{\ln |K_1| - \ln |K_2|}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (11.76)$$

Según la cual la curva corta el eje de tiempos, para $t > 0$ siempre que $|K_1| > |K_2|$ y $\alpha_1 > \alpha_2$ o ambas desigualdades a la inversa.

Interesa saber además si $r_h(t)$ presenta algún punto extremal. Para investigarlo, se deriva la Ec. (11.69) y se anula el resultado.

$$\frac{d_h(t)}{dt} = -\alpha_1 K_1 e^{-\alpha_1 t_m} - \alpha_2 K_2 e^{-\alpha_2 t_m} = 0$$

$$\therefore -\frac{\alpha_1 K_1}{\alpha_2 K_2} = e^{(\alpha_1 - \alpha_2) t_m}$$

Tomando Logaritmos naturales y despejando el tiempo se obtiene:

$$t_m = \frac{\ln \left[\frac{\alpha_1 K_1}{\alpha_2 K_2} \right]}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (11.77)$$

α_1 y α_2 son ambos positivos, pues ya se contempló su signo por separado.

En consecuencia, si $\frac{K_1}{K_2} > 0$ no existe punto extremal. Si en cambio, es $\frac{K_1}{K_2} < 0$, la Ec. (11.77) puede escribirse:

$$t_m = \frac{\ln |\alpha_1 K_1| - \ln |\alpha_2 K_2|}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\ln \alpha_1 + \ln |K_1/K_2| - \ln \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (11.78)$$

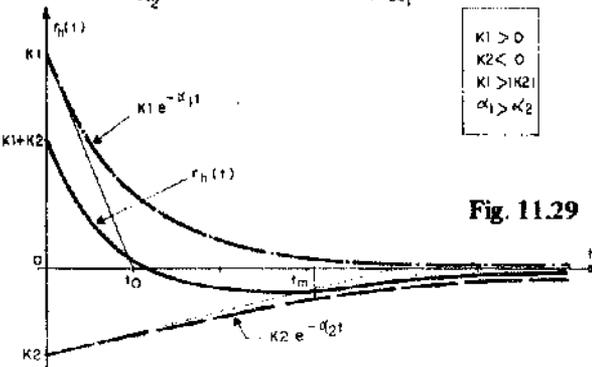
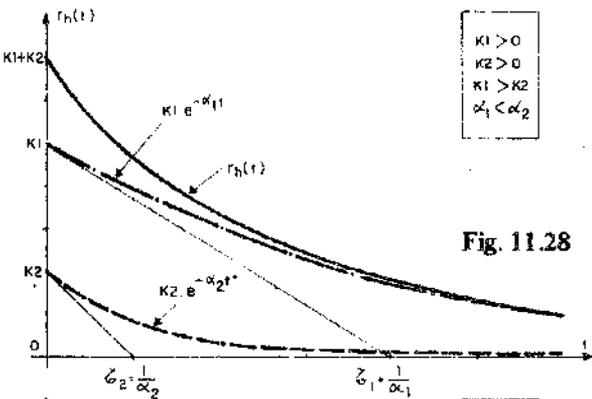
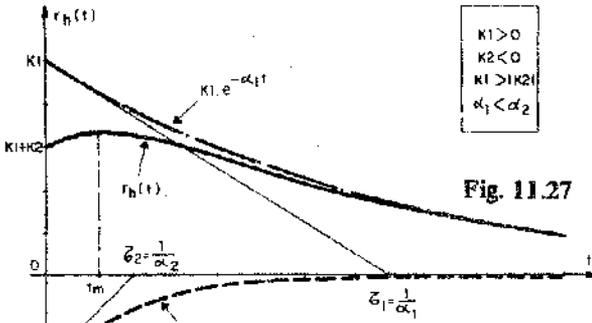
Según la Ec. (11.78), para que exista un punto extremal en la curva de $r_h(t)$ debe cumplirse simultáneamente que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln \alpha_1 + \ln \left| \frac{K_1}{K_2} \right| > \ln \alpha_2 \\ \alpha_1 > \alpha_2 \end{array} \right. \quad \circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln \alpha_1 + \ln \left| \frac{K_1}{K_2} \right| < \ln \alpha_2 \\ \alpha_1 < \alpha_2 \end{array} \right.$$

Finalmente, si $\frac{K_1}{K_2} = -1$ siempre se presenta un punto extremal.

En las Figs. 11.27 a 11.29 inclusive, se muestran los tres casos típicos correspondientes al régimen sobreamortiguado. En la Fig. 11.27 existe un punto extremal y la curva no corta al eje t . En la Fig. 11.28 no existe punto extremal ni se corta al eje t . En la Fig. 11.29, existe punto extremal y la curva cambia de signo en t_0 .

En las tres figuras precitadas puede verse que si los valores de α_1 y α_2 no son muy próximos, a partir del momento en que se extingue la componente de menor



constante de tiempo (mayor α), la respuesta natural $r_h(t)$ se hace coincidente con la otra componente y el sistema se comporta como si fuera de primer orden.

Finalmente, en la Fig. 11.15 se muestra el caso de una configuración que no incluye ceros y que por tener $K_1 = -K_2$ da lugar a una curva que parte del origen ($t_0 = 0$).

11.7 Obtención de la respuesta frecuencial a partir de la configuración de polos y ceros de $H(s)$

En este párrafo se utilizará la configuración de polos y ceros de $H(s)$ para estudiar las modificaciones que experimenta la respuesta de un circuito excitado por una señal senoidal, en régimen permanente, cuando varía la frecuencia de la excitación, manteniendo constante su amplitud y su fase.

Considérese una función operacional $H(s)$ constituida por un cociente de polinomios como el mostrado en la Ec. (11.3). Esto es:

$$H(s) = A_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_k) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_l) \cdots (s - p_n)} \quad (11.79)$$

En régimen senoidal permanente, la Ec. (11.79) se convierte en:

$$H(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} H(s) = A_0 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_k) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_l) \cdots (j\omega - p_n)} \quad (11.80)$$

Los fasores complejos eficaces de la excitación y la respuesta, están vinculados a través de la expresión:

$$R(j\omega) = H(j\omega) E_x(j\omega) \quad (11.81)$$

Por tratarse de una igualdad de funciones de variable compleja, la Ec. (11.81) puede ser desdoblada en dos igualdades reales, una para el módulo y otra para la fase. Esto es:

$$R(\omega) = H(\omega) E_x(\omega) \quad (11.82)$$

$$\text{y } \arg R(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg E_x(j\omega) \quad (11.83)$$

Las Ecs. (11.82) y (11.83) muestran que si varía la frecuencia de la excitación, manteniendo su amplitud $E_x(\omega)$ y su fase $\arg E_x(j\omega)$ constantes, las formas de las curvas de respuesta de amplitud $R(\omega)$ y de fase $\arg R(j\omega)$, serán respectivamente las de $H(\omega)$ y $\arg H(j\omega)$. En consecuencia, bastará con estudiar las variaciones del módulo y el argumento de la Ec. (11.80) con la frecuencia

La Fig. 11.30.a) muestra que los factores de la forma $(j\omega - z_k)$, son los fasores dirigidos desde cero genérico z_k al punto del eje $j\omega$ correspondiente a la pulsación ω considerada.

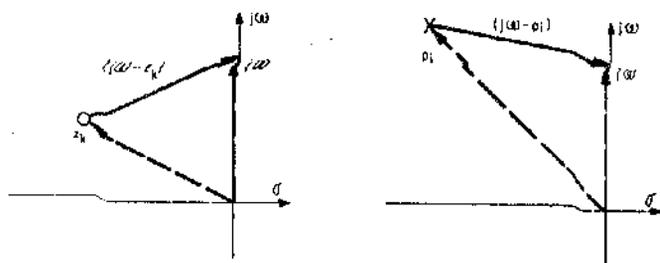


Fig. 11.30

Análogamente, en la Fig. (11.30.b) se observa que los factores de la forma $(j\omega - p_i)$ son los fasores dirigidos desde el polo genérico p_i al punto del eje $j\omega$ considerado. En consecuencia la Ec. (11.80) puede ser expresada:

$$H(j\omega) = A_0 \frac{\prod_{k=1}^m \text{Fasores dirigidos desde cada cero hasta el punto del eje } j\omega \text{ considerado}}{\prod_{i=1}^n \text{Fasores dirigidos desde cada Polo hasta el punto del eje } j\omega \text{ considerado}} \quad (11.84)$$

Finalmente, desdoblado la Ec. (11.84), se obtienen las expresiones (11.85) y (11.86) para la determinación de las respuestas de frecuencias de amplitud y fase, respectivamente, a partir de la configuración de polos y ceros.

$$H(\omega) = A_0 \frac{\prod_{k=1}^m \text{módulos de los fasores dirigidos desde cada cero hasta el punto } j\omega \text{ considerado}}{\prod_{i=1}^n \text{módulos de los fasores dirigidos desde cada polo hasta el punto } j\omega \text{ considerado}} \quad (11.85)$$

$$\theta(\omega) = \text{Arg } H(j\omega) = \sum_{k=1}^m \text{argumentos de los fasores dirigidos desde cada cero hasta el punto } j\omega \text{ considerado} - \sum_{i=1}^n \text{argumentos de los fasores dirigidos desde cada polo hasta el punto } j\omega \text{ considerado} \quad (11.86)$$

Si no existen ceros, el numerador de la Ec. (11.85) vale 1. Los polos y los ceros en el infinito no se computan pues ya están implícitos en las ecuaciones. El sentido positivo para el cómputo de los ángulos es el mostrado en la Fig. 11.31.

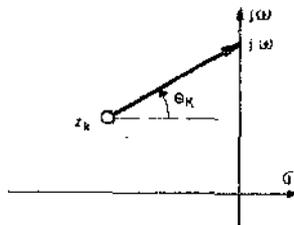


Fig. 11.31

Ejemplo 1:

La Fig. 11.32.b) es la configuración de polos y ceros de la transmitancia de tensiones, del circuito de la Fig. 11.32.a), siendo $A_0 = 1$.

Calcular los valores de las respuestas de amplitud y fase para $\omega = 0; 0,5; 1; 2; 5 e \infty$. Con los valores obtenidos representar gráficamente las curvas de respuesta de frecuencia de amplitud y fase.

Se utilizan las expresiones 11.85 y 11.86. Para $\omega = 0$, la Fig. 11.32.c) muestra los fasores intervinientes. Resulta:

$$H(0) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} = 0 \text{ ya que } |\bar{A}| = 0 \text{ por existir un cero en } \omega = 0$$

$$\theta(0) = \theta_A - \theta_B = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$$

Nótese que para $\omega = 0$ es $\theta_A = 90^\circ$. En efecto, la Fig. 11.32.d) muestra que, para todo $\omega > 0$ es $\theta_A = \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, en el límite, cuando $\omega \rightarrow 0$, $\theta_1 = 90^\circ$. Además se observan los fasores intervinientes para $\omega = 0,5$. Aplicando las Ecs. (11.85) y (11.86) se obtiene:

$$H(0,5) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} = 1 \frac{0,5}{\sqrt{2} \cdot 0,5} = 0,707$$

$$y \quad \theta(0,5) = \theta_A - \theta_B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

En forma similar se procede para $\omega = 2$ y $\omega = 5$, midiendo sobre la gráfica de polos y ceros los módulos y los ángulos de los fasores involucrados. Los valores se encuentran en el cuadro de la Fig. 11.33.a).

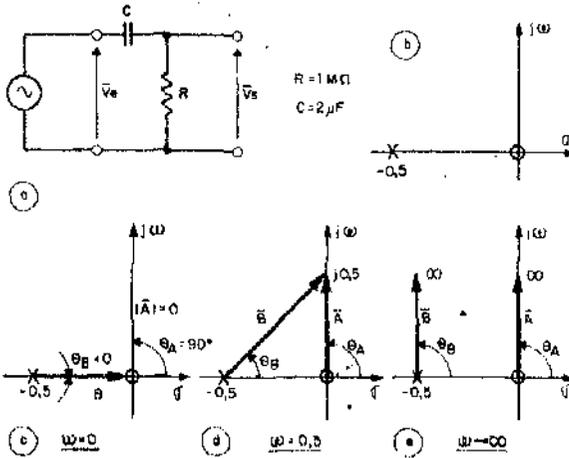


Fig. 11.32

Finalmente, para $\omega \rightarrow \infty$, la Fig. 11.32.e) muestra que los módulos de \bar{A} y \bar{B} son infinitos del mismo orden, de modo que:

$$H(\infty) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}|} = A_0 = 1$$

y
$$\theta(\infty) = \theta_A - \theta_B = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

Representando gráficamente los valores de $H(\omega)$ y $\theta(\omega)$ se obtienen las respuestas de frecuencia de amplitud y fase de las Figs. 11.33.b) y 11.33.c).

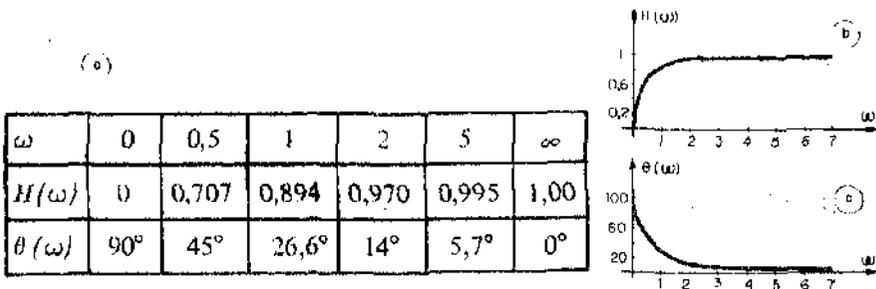


Fig. 11.33

Ejemplo 2:

La Fig. 11.34.b) es la configuración de los polos y ceros de la admitancia de excitación del circuito de la Fig. 11.34.a). Sabiendo que $A_0 = 0,58$ determinar las componentes polares de la admitancia para $\omega = 0; 1000$ e infinito. Analizar detalladamente las distintas formas en que se pueden medir los argumentos de los fasores. Comparar los resultados con los reales obtenidos a través de un análisis cualitativo para $\omega = 0$ e infinito.

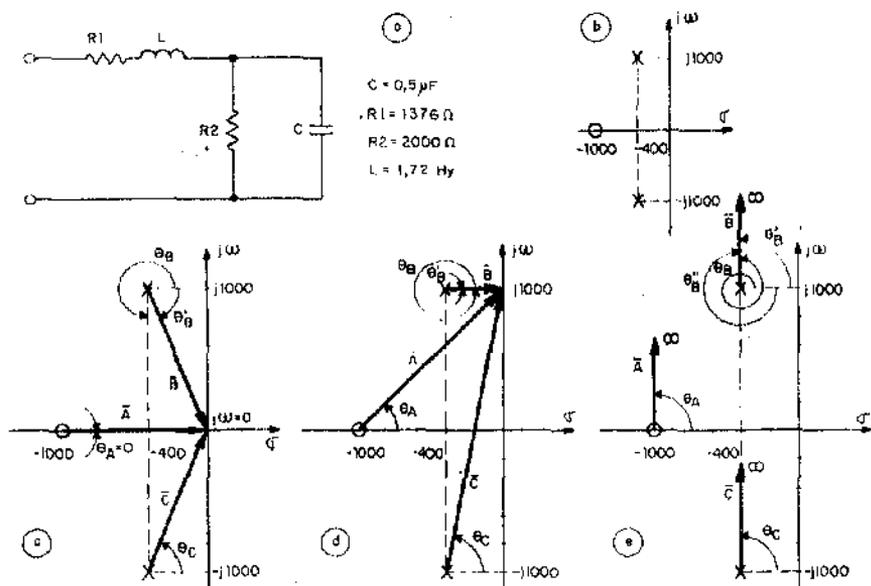


Fig. 11.34

Para calcular las respuestas de amplitud y fases $\omega = 0$, introducimos los fasores de la Fig. 11.34.c) en las expresiones 11.85 y 11.86. Para el módulo resulta:

$$Y(0) = H(0) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}| |\bar{C}|} = 0,58 \frac{1000}{1080 \cdot 1080} = 4,97 \cdot 10^{-4} \text{ S}$$

Para la fase se puede escribir:

$$\varphi_Y(0) = \theta(\bar{0}) = \theta_A - (\theta_B + \theta_C) = 0 - (292^\circ + 68^\circ) = -360^\circ$$

pero si en lugar de medirse el argumento de B en sentido positivo, se toma θ'_B , resulta:

$$\varphi_Y(\omega) = \theta(\omega) = 0 - (-68^\circ + 68^\circ) = 0^\circ$$

Cabe entonces preguntarse: ¿cuál de los dos resultados es el correcto? La respuesta es: matemáticamente ambos, pues el argumento de $H(j\omega)$ es una función multiforme que se encuentra sobre una superficie de Riemann. Esto es:

$$\theta(\omega) = \theta_0(\omega) + K 2\pi \text{ con } K = 0, 1, 2, \dots$$

En consecuencia, como los argumentos hallados difieren en 360° , están definiendo el mismo punto, pero considerado en dos hojas del plano múltiple de Riemann. Cabe entonces formularse una nueva pregunta: ¿con qué criterio elegir el valor? Si se trata de un circuito particular, un análisis cualitativo para $\omega = 0$ o $\omega = \infty$ puede dar la respuesta. Por ejemplo, para el circuito de la Fig. 11.34.a), cuando $\omega \rightarrow 0$, $X_C \rightarrow \infty$ y se convierte en un circuito abierto, mientras que $X_L \rightarrow 0$ resultando un cortocircuito. En consecuencia, $Y(0) = \frac{1}{R_1 + R_2}$ y por lo tanto físicamente debe ser $\varphi_Y(0) = 0$.

Si se trata en cambio de un desarrollo general, al no tratar con un circuito específico que permita el análisis cualitativo es conveniente usar el resultado que simplifique el desarrollo. Así por ejemplo, algunos teoremas se simplifican notablemente si se elige una superficie de Riemann de manera que el argumento de $H(j\omega)$ sea una función impar. Esto es:

$$\theta(-\omega) = \theta(\omega)$$

El cálculo para $\omega = 1000$ se efectúa reemplazando los valores de los fasores de la Fig. 11.34.d) en las expresiones 11.85 y 11.86. Resultando:

$$Y(1000) = H(1000) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}| |\bar{C}|} = 0,58 \frac{\sqrt{2}}{400} \frac{1000}{2040} = 10^{-3} S$$

Para el argumento puede escribirse:

$$\varphi_Y(1000) = \theta(1000) = \theta_A - (\theta_B + \theta_C) = 45^\circ - (360^\circ + 79^\circ) = -394^\circ$$

o bien:

$$\varphi_Y(1000) = \theta(1000) = \theta_A - (\theta'_B + \theta_C) = 45^\circ - (0^\circ + 79^\circ) = -34^\circ$$

Si tenemos en cuenta que el argumento de una admitancia de excitación puede variar entre $+\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, resulta claro que el valor adecuado, desde el punto de vista circuital es el segundo. Comparando las Figs. 11.34.c) y 11.34.d), se ve que en ambos casos θ'_B se ha computado con un criterio de continuidad del argumento al variar ω , lo que equivale a mantenerse sobre la misma hoja de la superficie de Riemann.

Finalmente, para $\omega \rightarrow \infty$ de acuerdo a la Fig. 11.34.e) resulta para el módulo:

$$Y(\infty) = H(\infty) = A_0 \frac{|\bar{A}|}{|\bar{B}| |\bar{C}|} = 0$$

En efecto, como existen dos polos y un cero, existe un cero simple implícito en el infinito.

Para la fase puede escribirse:

$$\varphi_Y(\infty) = \theta(\infty) = \theta_A - (\theta_B + \theta_C) = 90^\circ - (450^\circ + 90^\circ) = -450^\circ$$

o bien:

$$\varphi_Y(\infty) = \theta(\infty) = \theta_A - (\theta'_B + \theta_C) = 90^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = -90^\circ$$

o también:

$$\varphi_Y(\infty) = \theta(\infty) = \theta_A - (\theta''_B + \theta_C) = 90^\circ - (-270^\circ + 90^\circ) = 270^\circ$$

donde las diferencias entre los tres argumentos son múltiplos enteros de 360° .

El análisis cualitativo del circuito de la Fig. 11.34.a) muestra que para $\omega \rightarrow 0$ $X_C \rightarrow 0$, cortocircuitando a R_2 , mientras que $X_L \rightarrow \infty$ de modo que la admitancia es inductiva pura y por lo tanto $\varphi_Y(\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Es interesante

destacar que si no existen polos o ceros sobre el eje $j\omega$, el argumento de $H(j\omega)$ no puede presentar discontinuidades. En consecuencia, una vez elegido el valor adecuado del argumento para un cierto valor de frecuencia, basta con efectuar el cómputo de los ángulos para los restantes valores de ω , de modo que no aparezcan discontinuidades en la curva del argumento de $H(j\omega)$. Esto es lo que resulta adoptando θ'_B en las Figs. 11.34.c, d y e.

11.8 Influencia de la ubicación de los polos y los ceros sobre las curvas de respuesta de frecuencia de amplitud y fase

En lo que sigue se analizará la forma en que afecta a las curvas de respuesta de amplitud y fase, la proximidad de los polos y los ceros, en un entorno de su zona de influencia.

11.8.1) Cero sobre el eje $j\omega$: La Fig. 11.35 muestra una configuración de polos y ceros que incluye un cero sobre el eje $j\omega$. En la Fig. 11.35.a) se muestran los fasores que intervienen para la determinación de las respuestas de frecuencia de amplitud y fase para una pulsación genérica $\omega_i < \beta$ mientras que la Fig. 11.35.b) muestra los mismos fasores para $\omega_s > \beta$. Si se toma un entorno suficientemente pequeño de ω alrededor de β , el único fador que experimenta modificaciones importantes es el \bar{A} , ya que los restantes mantienen sus módulos y argumentos sin alteraciones de consideración. La Ec. 11.85 queda:

$$H(\omega) = A_0 \frac{|\bar{A}| \left\{ \begin{array}{l} \text{Producto de los módulos de los fasores desde} \\ \text{los restantes ceros al punto } j\omega \text{ considerado} \end{array} \right\}}{\prod_{i=1}^n \text{módulos de los fasores dirigidos desde} \\ \text{los polos al punto } j\omega \text{ considerado}} \quad (11.87)$$

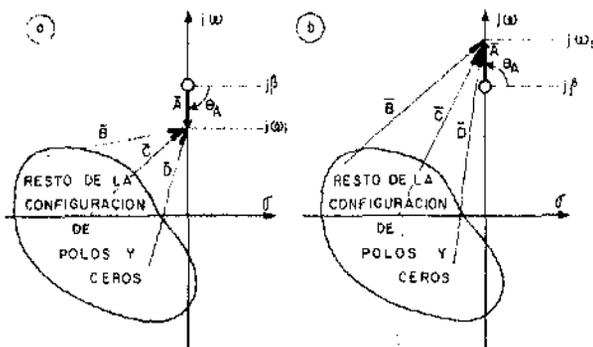


Fig. 11.35

Por las razones precitadas, en un entorno alrededor de $\omega = \beta$, las variaciones de $H(\omega)$ son producidas por las modificaciones de $|\bar{A}|$, el que llega a anularse

cuando $\omega = \beta$ y crece rápidamente para valores menores o mayores de ω , dando lugar a la curva de la Fig. 11.36.a).

La Ec. (11.86) resulta:

$$\theta(\omega) = \theta_A + \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{argumentos de los restantes fasores dirigidos} \\ \text{de los ceros al punto } j\omega \text{ considerado} \end{array} \right\} - \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \text{argumentos fasores dirigidos desde cada} \\ \text{polo al punto } j\omega \text{ considerado} \end{array} \right\} \quad (11.88)$$

donde las variaciones de $\theta(\omega)$ dependen fundamentalmente de las modificaciones de θ_A . Este último ángulo vale -90° para todo $\omega < \beta$ y $+90^\circ$ para todo $\omega > \beta$.

En consecuencia, la curva del argumento $\theta(\omega)$ presenta una discontinuidad de primer orden, con un salto de $+180^\circ$ para $\omega = \beta$, como se ve en la Fig. 11.36.b).

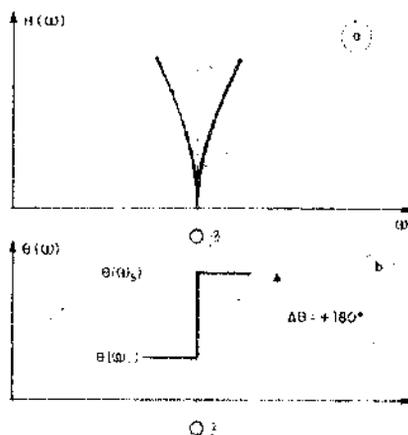


Fig. 11.36

11.8.2) Polo sobre el eje $j\omega$. La Fig. 44.37 muestra una configuración de polos y ceros que incluye un polo sobre el eje $j\omega$, para $\omega = \beta$. Razonando como

en el caso anterior se encuentra que las variaciones de las respuestas de amplitud y fase están gobernadas por el fasor N . en efecto:

$$H(\omega) = A_0 \frac{\prod_{k=1}^m \text{módulos de los fasores dirigidos desde cada cero al punto } j\omega \text{ considerado}}{\bar{N} \left\{ \begin{array}{l} \text{producto de los módulos de los restantes fasores} \\ \text{dirigidos desde cada polo al punto } j\omega \text{ considerado.} \end{array} \right.} \quad (11.89)$$

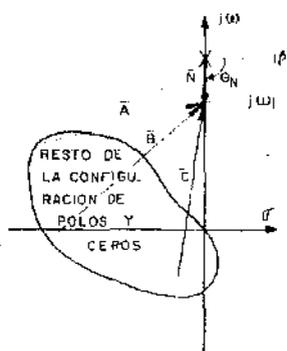


Fig. 11.37

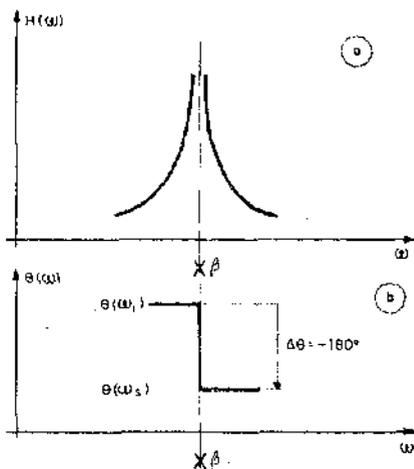


Fig. 11.38

Cuando $\omega = \beta$, $|\bar{N}| = 0$ y por lo tanto $H(\omega)$ se hace infinitamente grande. Para $\omega > \beta$ ó $\omega < \beta$, $|\bar{N}|$ aumenta rápidamente, dando lugar a la curva de la Fig. 11.38.a).

En cuanto a la fase, resulta:

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^m \text{argumentos fasores dirigidos desde cada cero al punto } j\omega \text{ considerado}$$

$$\left[\theta_N + \text{suma argumentos fasores restantes dirigidos desde cada Polo al punto } j\omega \text{ considerado} \right] \quad (11.90)$$

Para $\omega_i < \beta$ es $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y para todo $\omega_i > \beta$ resulta $\theta_N = +\frac{\pi}{2}$, de modo que $\theta(\omega)$ presenta un salto de -180° debido al signo menor que afecta a θ_N

11.8.3) Cero próximo al eje $j\omega$ con componente real negativa: La Fig. 11.39 muestra una configuración de polos y ceros que incluye un cero con parte real negativa, próximo al eje $j\omega$.

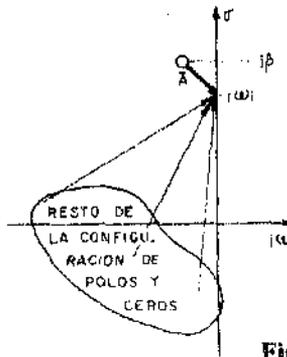


Fig. 11.39

Comparando con la Fig. 11.35, se observa que existe una gran similitud. En efecto, las variaciones del módulo y la fase de $H(j\omega)$ dependen fundamentalmente del fasor \bar{A} , siendo válidas las expresiones 11.87 y 11.88. Como el módulo de \bar{A} se hace mínimo para $\omega = \beta$, pero no llega a nularse, la curva de $H(\omega)$ presenta un mínimo, como se puede ver en la Fig. 11.40.a). En cuanto a la fase, sufre una variación muy rápida en las proximidades de $\omega = \beta$, pero sin llegar a presentar una discontinuidad, como muestra la Fig. 11.40.b). Cuanto más próximo a $j\omega$ se encuentra el cero, más abruptas son las variaciones de las curvas.

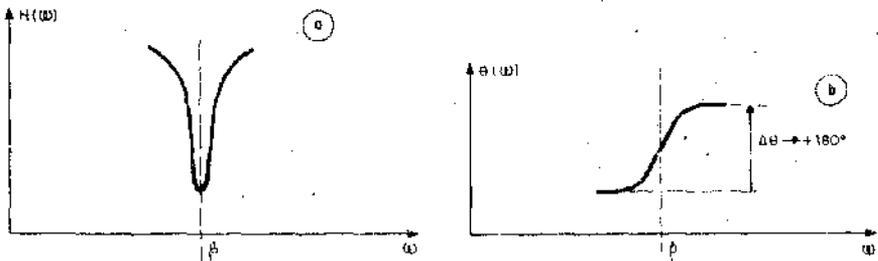


Fig. 11.40

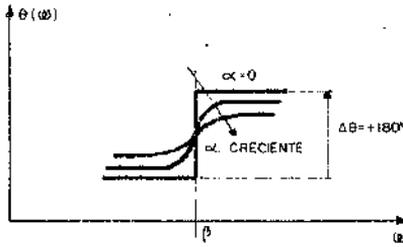


Fig. 11.41

En efecto la Fig. 11.41 muestra el efecto de α sobre $\theta(\omega)$. En el límite, cuando el cero queda sobre el eje $j\omega$, las curvas presentan las discontinuidades de la Fig. 11.36. El cómputo de $\theta_A(0)$ y $\theta_A(\infty)$ puede hacerse de distinta forma, como se ve en la Fig. 11.42, resultando:

$$\Delta\theta_m = \theta(\infty) - \theta(0) \equiv \theta_A(\infty) - \theta_A(0) \approx 90^\circ - (-90^\circ) = 180^\circ$$

o bien $\Delta\theta_m = \theta(\infty) - \theta(0) = \theta'_A(\infty) - \theta'_A(0) \approx 450^\circ - 270^\circ = 180^\circ$

Es importante mantenerse sobre la misma hoja de la superficie de Riemann para los dos valores, de modo que la curva no presente discontinuidades, pues no tiene polos ni ceros sobre el eje $j\omega$ para $\omega = \beta$.

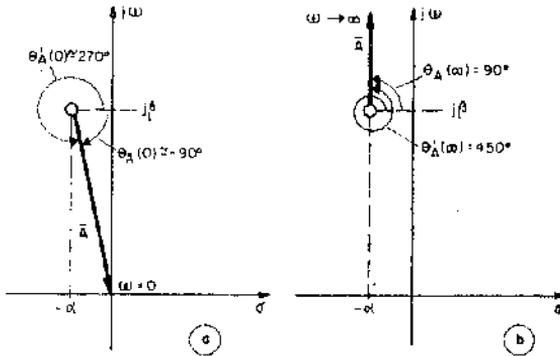


Fig. 11.42

11.8.4) Polo próximo al eje $j\omega$ con componente real negativa: Un análisis similar al efectuado para los casos anteriores, muestra que para una con-

figuración como la de la Fig. 11.43, se obtienen respuestas de amplitud y fase en un entorno de $\omega = \beta$, como las mostradas en la Fig. 11.44.

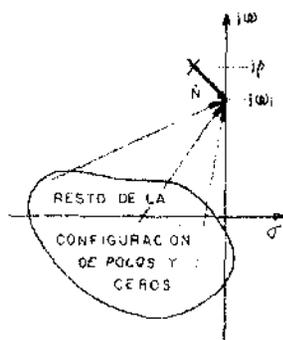


Fig. 11.43

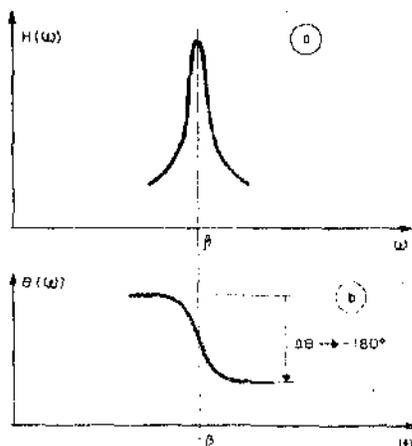


Fig. 11.44

11.9 Configuraciones particulares de polos y ceros y respuestas de frecuencia asociadas

En el apartado anterior se vio que la presencia de polos y ceros próximos al eje $j\omega$ producen variaciones bruscas de las respuestas de amplitud y fase. Si por el contrario, se tienen polos y ceros con componentes reales mayores que las imaginarias, las curvas presentan variaciones más suaves. Además los polos producen elevaciones de la curva de respuesta de amplitud y descensos de la de fase, mientras que los ceros producen un efecto contrario. La analogía de la membrana elástica, que se introducirá en lo que sigue, ayuda a imaginar el tipo de respuesta que corresponde a cada configuración. Con estos métodos y elementos de análisis, se estudiarán las respuestas de algunos circuitos y configuraciones típicas de polos y ceros.

11.9.1) **Analogía de la membrana elástica:** Siendo $s = \sigma + j\omega$ una variable compleja, para representar $H(s)$ se necesitan tres ejes, resultando una superficie en el espacio tridimensional. Si se toma la configuración de polos y ceros de la Fig. 11.45, la representación de $H(s)$ resulta una superficie como la mostrada parcialmente en la Fig. 11.46. Para $s = 0$, $H(s)$ tiene un cero y

por lo tanto se anula. Para $s = -\alpha + j\beta$, $H(s)$ tiene un polo y en consecuencia su ordenada se hace infinitamente grande. La superficie ha sido representada para valores de σ comprendidos entre σ_0 y $-\sigma_1$, y $j\omega > 0$. La Fig. 11.46 muestra también que la intersección de la superficie de $H(s)$ con el plano $\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$ determina una línea $H(\sigma_0 + j\omega)$.

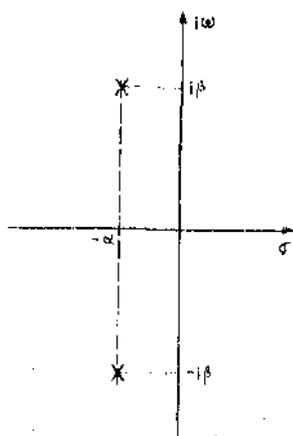


Fig. 11.45

La Fig. 11.47 muestra la misma superficie de la Fig. 11.46, pero poniendo en evidencia la intersección de $H(s)$ con el plano $\sigma = 0$, cuyas ordenadas, medidas verticalmente desde el eje $j\omega$, corresponden a la respuesta de frecuencia de amplitud, como se la representa en la Fig. 11.48 en el plano $\sigma = 0$.

La descripción efectuada sugiere la utilización del siguiente modelo analógico, de carácter cualitativo, para imaginar la influencia de los polos y los ceros sobre la respuesta de frecuencia.

Se dispone una membrana elástica estirada sobre la superficie de un tablero de dibujo, manteniéndola tensada desde sus bordes. Luego se marcan sobre la membrana los ejes σ y $j\omega$ con el origen en el centro de la misma. Se trazan líneas paralelas al eje $j\omega$, marcándose los polos y los ceros. Donde hay un cero, se fija la membrana a la mesa con una chinchete. Donde hay un polo se levanta la membrana con una varilla fina. El resultado será la obtención de una superficie de forma aproximada a la de $H(s)$. La forma de la línea correspondiente al eje $j\omega$, referida al plano del tablero, nos dará, en forma cualitativa, el aspecto de la respuesta de frecuencia de amplitud.

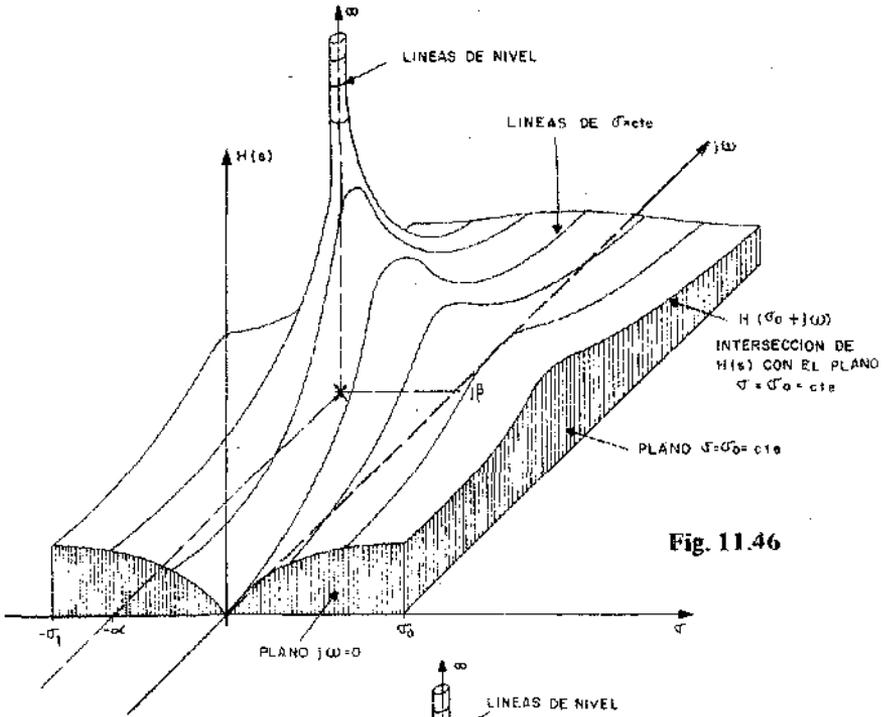


Fig. 11.46

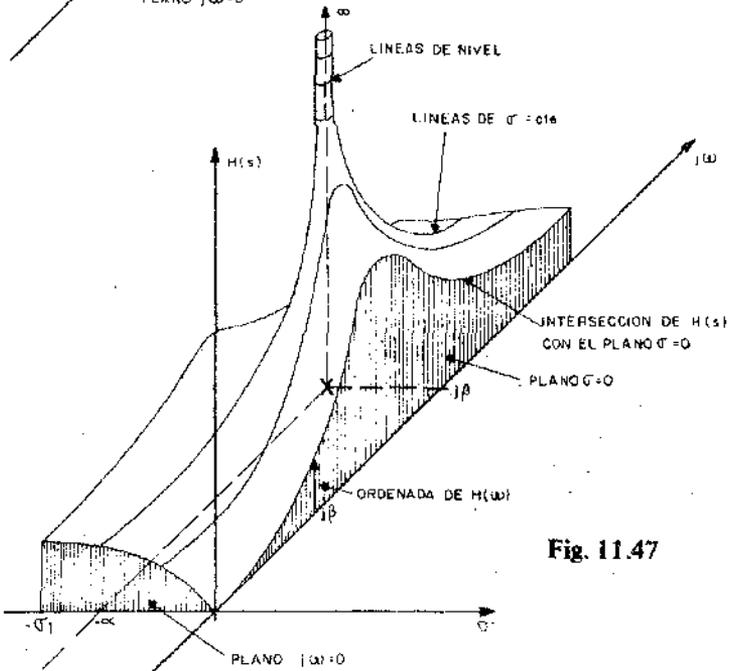


Fig. 11.47

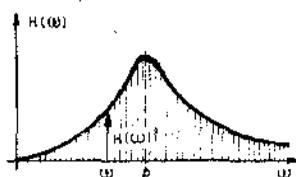


Fig. 11.48

11.9.2) **Cero en el origen:** El diagrama de los polos y ceros está representado en la Fig. 11.49.a), pudiendo corresponder, por ejemplo a la impedancia de excitación de un inductor $Z(s) = sL$.

Para $\omega = 0$, resulta $H(0) = 0$ pues existe un cero en el origen. Para todo valor de $\omega > 0$, $|\bar{A}|$ crece linealmente y con el lo hace $H(\omega) = A_0 |\bar{A}|$, dando lugar a la curva de la Fig. 11.49.b).

En cuanto al argumento, en la Fig. 11.49.a) se ve que vale $+\frac{\pi}{2}$ para todo $\omega > 0$, dando lugar a la respuesta de la Fig. 11.49.c).

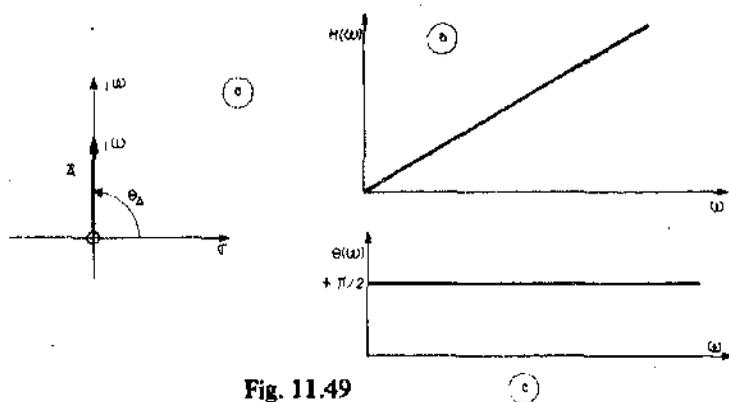


Fig. 11.49

11.9.3) **Polo en el origen:** Esta configuración puede corresponder, por ejemplo, a la impedancia de un capacitor $Z(s) = \frac{1}{sC}$ y se la muestra en la Fig. 11.50.a). Puesto que:

$$H(\omega) = A_0 \frac{1}{|\bar{A}|}$$

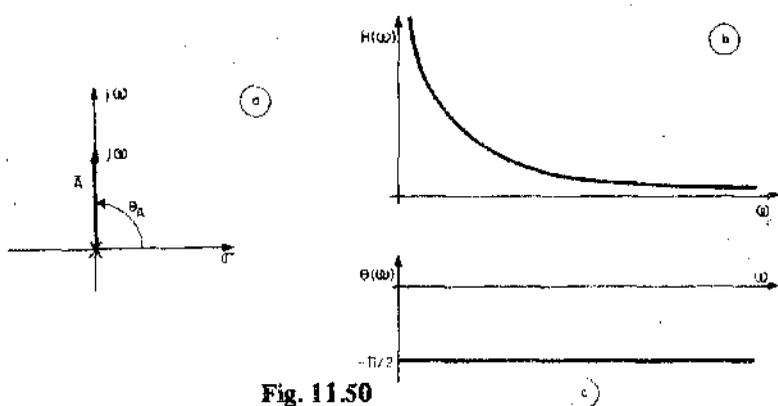


Fig. 11.50

Al crecer ω y por lo tanto $|\bar{A}|$ linealmente, $H(\omega)$ decrece hiperbólicamente, según se ve en la Fig. 11.50.b), donde el polo en el origen hace que la respuesta sea infinita para $\omega = 0$. En cuanto a la fase, resulta:

$$\theta(\omega) = 0 - \theta_A = -\frac{\pi}{2} = cte$$

como muestra la Fig. 11.50.c).

11.9.4) No existen polos ni ceros: Esta transferencia corresponde a un circuito resistivo puro, siendo:

$$H(\omega) = A_0 = cte$$

$$\theta(\omega) = 0 - 0 = 0$$

Según se ve en la Fig. 11.51).

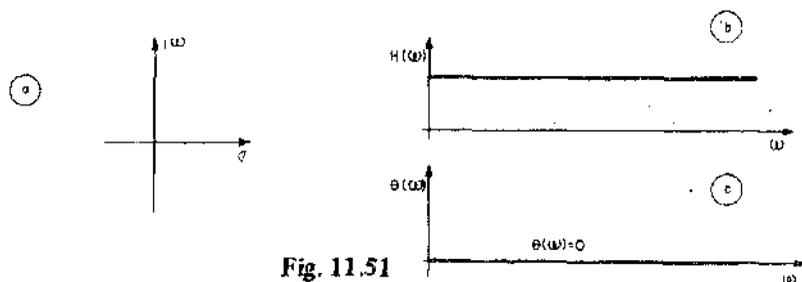


Fig. 11.51

11.9.5) **Polo real negativo:**, Esta configuración puede corresponder al circuito de la Fig. 11.52.a), para el cual la trasmittancia de tensiones vale:

$$H(s) = A_v(s) = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{L} \frac{R}{s + \frac{R}{L}}$$

En la Fig. 11.52.b) se aprecia la configuración y el fasor \bar{A} correspondiente a una pulsación ω genérica. Como $|\bar{A}|$ toma su mínimo valor para $\omega = 0$ y crece monótonamente con ω resulta que:

$$H(\omega) = A_0 \frac{1}{|\bar{A}|}$$

parte del valor $\frac{A_0}{A_{min}}$ tiende a cero al aumentar ω , como muestra la Fig. 11.52.c).

En cuanto a la fase, θ_A aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$ cuando ω lo hace de cero a infinito hasta que:

$$\theta(\omega) = 0 - \theta_A$$

resulta el gráfico de la Fig. 11.52.d). Nótese que esta configuración corresponde a un filtro pasabajos.

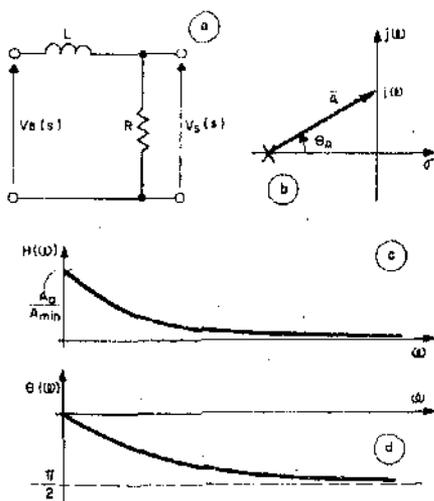


Fig. 11.52

11.9.6) **Cero en el origen y polo real negativo:** Este caso se desarrolló en el ejemplo 1 del parágrafo 11.7 y se muestra en las Figs. 11.32 y 11.33. Corresponde a un filtro pasaaltos.

11.0.7) **Cero en el origen y par de polos complejos conjugados:** Esta configuración puede corresponder, por ejemplo a la transmitancia de tensiones del circuito de la Fig. 11.53.a). En efecto:

$$H(s) = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} \approx \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

donde si $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ en el denominador aparecen dos polos complejos conjugados, resultando la configuración de la Fig. 11.53.b).

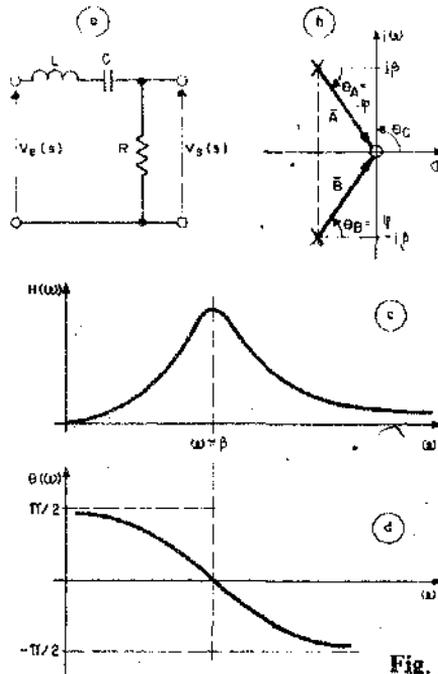


Fig. 11.53

$H(\omega)$ se anula para $\omega = 0$ pues existe un cero en el origen y para $\omega \rightarrow \infty$ pues hay un cero implícito en el infinito (existen dos polos y un

cero). Además presenta un máximo para $\omega \approx \beta$ pues existe un polo próximo al eje $j\omega$. La curva de $H(\omega)$ se muestra en la Fig. 11.53.c) y corresponde a un filtro pasabanda como el estudiado al introducir la analogía de la membrana elástica en las Figs. 11.45 a 11.48 inclusive.

En cuanto a la respuesta de fase, para $\omega = 0$ es:

$$\theta(0) = \theta_c - (\theta_A + \theta_B) = 90^\circ - (-\varphi + \varphi) = 90^\circ$$

y para $\omega \rightarrow \infty$:

$$\theta(\infty) = \theta_c - (\theta_A + \theta_B) = 90^\circ - (90 + 90) = -90^\circ$$

Para $\omega \approx \beta$, $\theta(\omega)$ se anula dando lugar a la curva de la Fig. 11.53.d).

11.9.8) **Par de polos complejos conjugados:** Esta configuración, mostrada en la Fig. 11.54.b), puede corresponder por ejemplo, a la transmitancia de tensiones del circuito de la Fig. 11.54.a). En efecto:

$$H(s) = A_v(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

que para $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ da dos polos complejos conjugados.

Para $\omega = 0$, la curva de $H(\omega)$ parte del valor de:

$$H(0) = A_0 \frac{1}{|\bar{A}| |\bar{B}|} = A_0 \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{A_0}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Para ω próximo a β pasa por un máximo debido al polo próximo al eje $j\omega$. Finalmente, para $\omega \rightarrow \infty$ la curva tiende a cero pues existe un cero implícito de 2do. orden en el punto impropio. La Fig. 11.54.c) muestra la forma de $H(\omega)$. La fase vale, para $\omega = 0$.

$$\theta(0) = -(\theta_A + \theta_B) = -(-\varphi + \varphi) = 0$$

Para $\omega \rightarrow \infty$ es:

$$\theta(\infty) = -(\theta_A + \theta_B) = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

En la Fig. 11.54.d) se muestra la curva de $\theta(\omega)$.

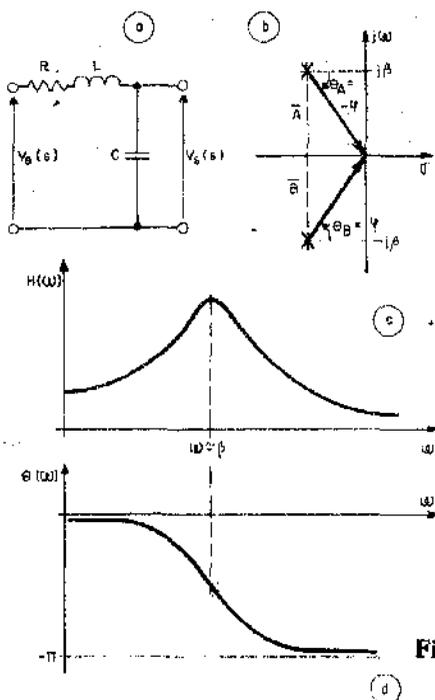


Fig. 11.54

11.9.9) Pares de polos complejos conjugados y ceros imaginarios conjugados: Esta configuración, mostrada en la Fig. 11.55.b), puede corresponder, por ejemplo a la transmitancia de tensiones del circuito de la Fig. 11.55.a) ya que:

$$H(s) = A_v(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\text{con: } \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

La curva de $H(\omega)$ es mostrada en la Fig. 11.55.c). Presenta un cero para $\omega = \beta_Z$ y un máximo en las proximidades de $\omega = \beta_P$.

Para $\omega \rightarrow \infty$, $H(\infty) \rightarrow A_0 = 1$ pues no existen polos ni ceros implícitos.

La curva de $\theta(\omega)$, presenta una discontinuidad de primer orden para $\omega = \beta_Z$ debido al cero sobre el eje $j\omega$ y una variación continua rápida para ω máximo a β_P , debida al polo próximo al eje $j\omega$. Para $\omega \rightarrow \infty$ es:

$$\theta(\infty) = (\theta_A + \theta_B) - (\theta_C + \theta_D) = 90 + 90 - (90 + 90) = 0$$

y para $\omega = 0$

$$\theta(0) = (-90 + 90) - (-\varphi + \varphi) = 0$$

La curva es la mostrada en la Fig. 11.55.d).

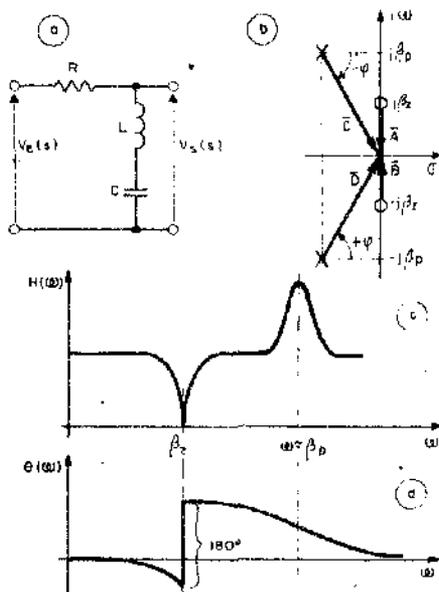


Fig. 11.55

11.9.10) **Cero en el origen y par de polos reales negativos:** En la Fig. 11.56.b) se muestra la configuración de polos y ceros que puede corresponder a un amplificador con acoplamiento R-C o al circuito de la Fig. 11.56.a). En efecto, la transmitancia de tensiones de este es:

$$H(s) = A_v(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \Big|_{CNV} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1}{1 + Z_1(s) Y_2(s)}$$

$$\begin{aligned} \therefore H(s) &= \frac{1}{1 + \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) \left(\frac{1}{R} + sC_2\right)} = \\ &= \frac{1}{R_1 C_2} \frac{s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2}\right) s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \end{aligned}$$

que para $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) > \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}$ tiene dos polos reales negativos.

Para $\omega = 0$ es $H(0) = 0$ pues hay un cero en el origen. Para $\omega \rightarrow \infty$ es $H(\infty) = 0$ pues hay un cero implícito de primer orden en el punto impropio. La respuesta es una combinación de las mostradas en las Figs. 11.33.b) y 11.52.c) y está representada en la Fig. 11.56.c).

La fase es, para $\omega = 0$

$$\theta(0) = \theta_A - (\theta_B + \theta_C) = 90^\circ - (0 + 0) = 90^\circ$$

y para $\omega \rightarrow \infty$

$$\theta(\infty) = \theta_A - (\theta_B + \theta_C) = 90^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = -90^\circ$$

Para algunos valores intermedios de ω es:

$$(\theta_B + \theta_C) \approx \theta_A$$

La curva de $\theta(\omega)$ es la representada en la Fig. 11.56.d). Es una combinación de las correspondientes a las Figs. 11.33.c) y 11.52.d).

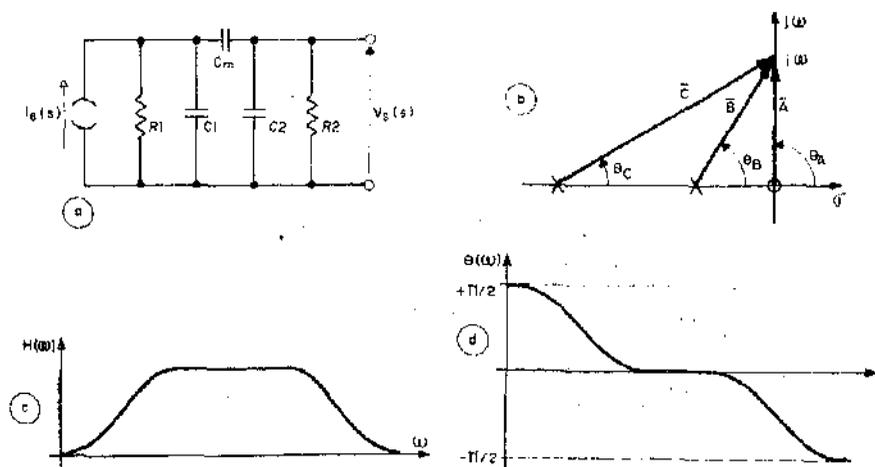


Fig. 11.56

11.9.11) **Funciones de amplitud constante:** Son las funciones en las cuales los ceros son la imagen especular de los polos, respecto del eje $j\omega$, como la configuración mostrada en la Fig. 11.57.a). Estas configuraciones deben corresponder a funciones de transferencia para que sus ceros puedan estar en el semiplano derecho. Los polos estarán en el semiplano izquierdo si el circuito es pasivo. En la figura precitada puede verse que los fasores dirigidos desde los ceros al punto $j\omega$ considerado, tienen módulos que se corresponden con los de los fasores dirigidos desde los polos al punto $j\omega$ considerado. En consecuencia, la aplicación de la Ec. (11.85) dará el valor:

$$H(\omega) = A_0$$

para todo ω como se muestra en la Fig. 11.57.b). De ahí su denominación de función de amplitud constante o pasatodo. Cabe destacar que la respuesta de fase presenta variaciones importantes a pesar de ser constante la de amplitud. Esta propiedad permite usar configuraciones de amplitud constante para efectuar correcciones de fase, sin alterar la respuesta de amplitud.

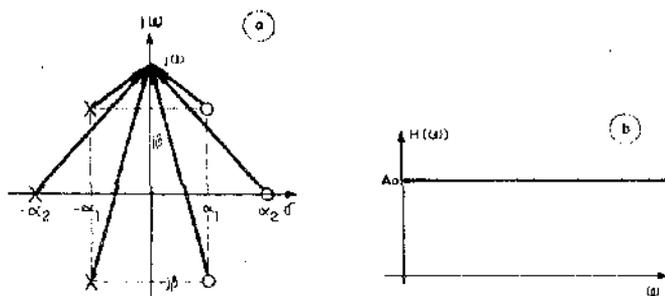


Fig. 11.57

11.9.12) **Funciones de fase mínima:** Según se ha visto, las funciones de transferencia pueden o no tener ceros en el semiplano derecho. Si se observan las configuraciones de la Fig. 11.58, se aprecia que para un cierto valor de ω , las respuestas de ambas son iguales, ya que:

$$|\bar{A}'| = |\bar{A}|$$

$$|\bar{B}'| = |\bar{B}|$$

$$|\bar{C}'| = |\bar{C}|$$

Sin embargo, no ocurre lo mismo con las respuestas de fase. Así pues, una respuesta de amplitud, puede tener varias respuestas de fase asociadas. Se denomina función de fase mínima a la que tiene todos los ceros en el semiplano izquierdo o sobre el eje $j\omega$, como la configuración de la Fig. 11.58.a. Las funciones que poseen por lo menos un cero en el semiplano derecho, como la de la Fig. 11.58.b, se denominan de fase no-mínima.

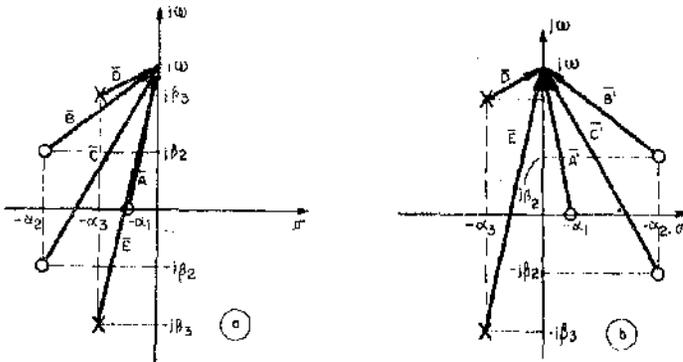


Fig. 11.58

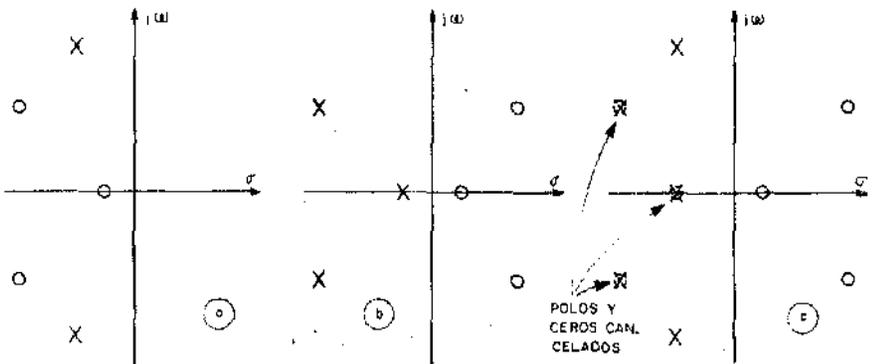


Fig. 11.59

Las funciones de fase mínima son muy importantes, pues en ellas existe una relación unívoca entre las respuestas de amplitud y de fase, permitiendo la determinación de la segunda cuando se conoce la primera. Las funciones de fase no-mínima pueden ser consideradas como el producto de una función de fase mínima y una pasatodo, de amplitud unitaria. Esto se muestra en la Fig. 11.59 y aclara la posibilidad de efectuar correcciones de fase sin modifi-

car la respuesta de amplitud, empleando funciones pasatodo. En las Figs. 11.60 y 11.61 se muestra una función de fase mínima y una de fase no-mínima y sus respuestas de frecuencia, suponiendo que los ángulos de los fasores se miden de modo que $\theta(\omega)$ resulte una función impar. Es interesante destacar que la configuración de polos y ceros correspondiente a la función de fase no-mínima tiene una fase algebraicamente menor que la de fase mínima. La inconsistencia de la denominación se debe a que fue introducida por Bode para una función de transferencia definida inversamente a lo que se acostumbra actualmente. Esto es:

$$H(s) = \left. \frac{V_e(s)}{V_s(s)} \right|_{CIN} \quad (\text{BODE})$$

en lugar de:

$$H(s) = \left. \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \right|_{CIN} \quad (\text{ACTUAL})$$

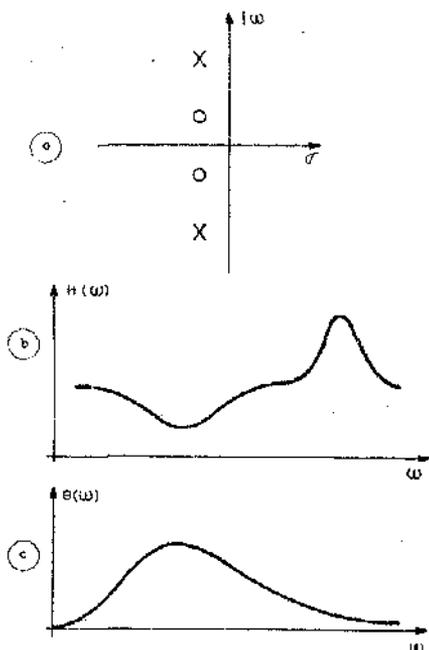


Fig. 11.60

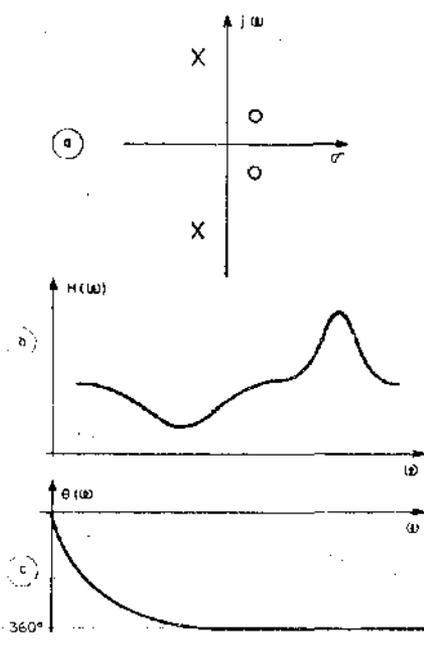


Fig. 11.61

Sin embargo, esto no tiene importancia alguna, pues lo fundamental no reside en que la fase sea o no mínima, sino en la posibilidad de determinar la respuesta de fase en función de la amplitud, en forma unívoca, para las funciones sin ceros en el semiplano derecho.

Si la función de transferencia es de fase mínima, el módulo de la variación total del argumento, cuando ω varía de cero a infinito, resulta menor que para la función de fase no-mínima correspondiente.

11.9.13) **Aproximaciones de Butterworth y Chebychef a la respuesta del filtro ideal:** La Fig. 11.62 muestra la respuesta de amplitud normalizada de un filtro pasabajos ideal. En ella existe una banda pasante comprendida entre $\omega = 0$ y la pulsación de corte superior ω_c . Dentro de la banda pasante, las señales de todas las frecuencias sufren la misma atenuación. Fuera de ella, las señales son suprimidas, impidiendo su paso.

Los filtros reales, tienen diferentes formas de respuesta de amplitud, según el criterio de aproximación a la curva ideal seguido. Dos criterios muy difundidos son:

- a) De máxima planicidad en la banda pasante, o de Butterworth.
- b) De igual ondulación en la banda pasante, o de Chebychef (Tchebycheff).

La aproximación de Butterworth surge de la expresión:

$$H(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (11.91)$$

donde A_0 es un factor de escala, ω es la pulsación considerada, ω_c la pulsación de corte superior y n un número entero. Cuanto más elevado es el valor de n mejor resulta la aproximación.

En la Ec. (11.91), para $\omega = \omega_c$ es, independientemente del valor de n :

$$H(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2}} = 0,707 A_0 \quad (11.92)$$

En la Fig. 11.63 se muestra la forma de la respuesta de amplitud para la aproximación de máxima planicidad.

Puede demostrarse que la configuración de polos y ceros de $H(s)$ no incluye ceros y tiene todos sus polos dispuestos en el semiplano izquierdo, equi-

espaçados sobre una circunferencia de radio unitario, como se muestra en la Fig. 11.65.a, para $n = 4$.

La aproximación de Chebychev, se obtiene a partir de la expresión:

$$H(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} \quad (11.93)$$

donde:

A_0 es una constante de escala.

ϵ es un factor que define la amplitud pico a pico de la ondulación dentro de la banda pasante.

$C_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ es el polinomio de Chebychev de orden n , donde n es un número entero. Cuanto mayor es el valor de n mejor es la aproximación.

En la Fig. 11.64 se muestra la respuesta de amplitud de una aproximación de Chebychev.

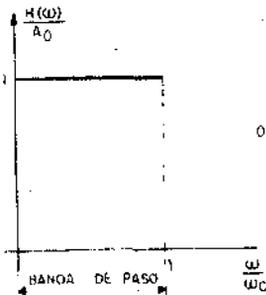


Fig. 11.62

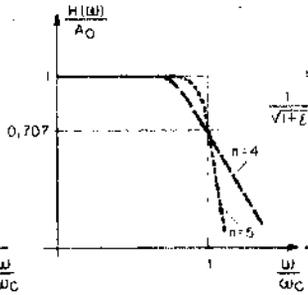


Fig. 11.63

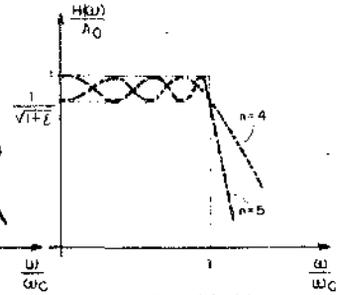


Fig. 11.64

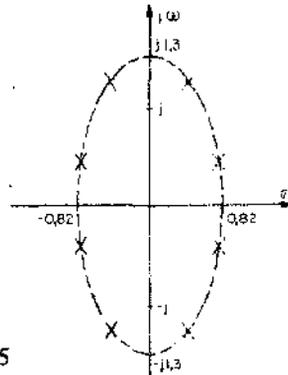
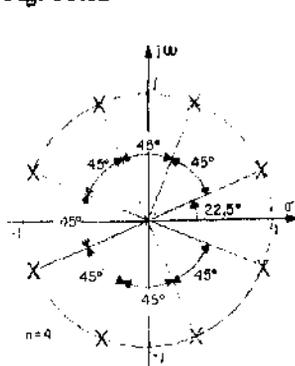


Fig. 11.65

Nótese que el número de puntos extremales de la ondulación es igual a n . $H(s)$ de Chebychev no tiene ceros y sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo, sobre una elipse cuyos focos están en $\pm j$, como se ve en la Fig. 11.65.b, para $n = 4$.

11.10 Gráficos logarítmicos asintóticos de Bode

11.10.1) **Planteo General:** Este método se basa en que el logaritmo natural de una variable compleja $A(j\omega) = A e^{j\theta_R}$, separa el módulo del argumento y conduce a gráficos logarítmicos en los que las componentes debidas a los polos y los ceros se suman, en lugar de multiplicarse. En efecto:

$$\ln A(j\omega) = \ln A(\omega) + j\theta_R(\omega) \quad (11.94)$$

donde $\ln A(\omega) = A(\omega)]_N$ es el módulo de la transmitancia expresada en nepers y $\theta_R(\omega)$ es el argumento expresado en radianes. El neper no resulta práctico como unidad, razón por la cual se emplea en su lugar el decibel, que se define en base al logaritmo decimal, como:

$$\begin{aligned} A(\omega)]_{dB} &= 20 \log A(\omega) = 20 \log e \ln A(\omega) = 8,68 \ln A(\omega) = \\ &= 8,68 A(\omega)]_N \end{aligned} \quad (11.95)$$

Análogamente, suele expresarse el argumento en grados. Esto es:

$$\theta(\omega) = 57,3 \frac{\text{grado}}{\text{radianes}} \theta_R(\omega) \text{ radianes} \quad (11.96)$$

En los gráficos de Bode se representan:

$$A_v(\omega)]_{dB} = f_1(\log \omega) \quad (11.97)$$

$$\text{y} \quad \theta(\omega) = f_2(\log \omega) \quad (11.98)$$

introduciendo algunas aproximaciones para simplificar la construcción.

Considérese una función transferencia:

$$H(s) = A_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_k) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_l) \cdots (s - p_n)} \quad (11.99)$$

que para régimen senoidal permanente se convierte en:

$$H(j\omega) = A_0 \times \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_K) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_l) \cdots (j\omega - p_n)} \quad (11.100)$$

Los factores del tipo $(j\omega - z_K)$ y $(j\omega - p_l)$ que intervienen en el numerador y el denominador de la Ec. (11.100), pueden tomar alguna de las formas siguientes:

~ Polo o cero real negativo simple:

$$F_1(j\omega) = (j\omega + \alpha) = \alpha \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha} \right) \quad (11.101)$$

~ Polo o cero real negativo de orden n :

$$F_2(j\omega + \alpha)^n = \alpha^n \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha} \right)^n \quad (11.102)$$

~ Par de polos complejos conjugados con componente real negativa:

$$F_3(j\omega) = [j\omega + (\alpha - j\beta)][j\omega + (\alpha + j\beta)] = -\omega^2 + j2\alpha\omega + (\alpha^2 + \beta^2)$$

Llamando a $\alpha^2 + \beta^2 = \omega_0^2$ y definiendo la constante de amortiguamiento relativa como en el Cap. 5, $\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0}$, resulta:

$$F_3(j\omega) = -\omega^2 + j2\gamma\omega_0\omega + \omega_0^2 = \omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j2\gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right] \quad (11.103)$$

~ Par de polos imaginarios conjugados:

es un caso particular del anterior, para $\gamma = 0$

$$F_4(j\omega) = (j\omega + j\beta)(j\omega - j\beta) = \omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

Considérese ahora un caso de la Ec. (11.100) que incluya todos los tipos de factores posibles, dejando los polos imaginarios conjugados como un caso particular de los complejos conjugados:

$$H(j\omega) = A_0 \frac{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)^m [j\omega + (\alpha_3 - j\beta_3)][j\omega + (\alpha_3 + j\beta_3)]}{(j\omega + \alpha_4)(j\omega + \alpha_5)^n [j\omega + (\alpha_6 - j\beta_6)][j\omega + (\alpha_6 + j\beta_6)]} \quad (11.104)$$

La Ec. (11.104) puede escribirse de acuerdo a las Ecs. (11.101) a (11.103) inclusive:

$$H(j\omega) = \frac{A_0 \alpha_1 \alpha_2^m \omega_{03}^2}{\alpha_4 \alpha_5^n \omega_{06}^2} \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_1}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_2}\right)^m \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}}\right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}}\right]}{\left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_4}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_5}\right)^n \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{06}}\right)^2 + j 2 \gamma_6 \frac{\omega}{\omega_{06}}\right]} \quad (11.105)$$

Resultando una nueva constante de escala K modificada por cada uno de los polos y ceros de distinta manera, según las características de estos. En efecto:

$$K = A_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2^m \omega_{03}^2}{\alpha_4 \alpha_5^n \omega_{06}^2} \quad (11.106)$$

De acuerdo a la Ec. (11.95) y teniendo en cuenta las Ecs. (11.105) y (11.106), la respuesta de amplitud, expresada en decibeles es:

$$\begin{aligned} H(\omega) \Big|_{dB} = & 20 \log |K| + 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_1} \right| + 20 m \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_2} \right| + \\ & + 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}}\right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right| - 20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_4} \right| - \\ & - 20 n \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_5} \right| - 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{06}}\right)^2 + j 2 \gamma_6 \frac{\omega}{\omega_{06}} \right| \end{aligned} \quad (11.107)$$

donde puede verse que los factores debidos a los polos sólo difieren de los correspondientes a los ceros del mismo tipo, en que están multiplicados por (-1) .

La respuesta de fase resulta:

$$\begin{aligned} \theta_R(\omega) = & \theta_K + \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_1} \right) + m \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_2} \right) + \\ & + \text{Arg} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}}\right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right] - \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_4} \right) - \\ & - n \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_5} \right) - \text{Arg} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{06}}\right)^2 + j 2 \gamma_6 \frac{\omega}{\omega_{06}} \right] \end{aligned} \quad (11.108)$$

donde $\theta_K = 0$ si K es positiva y $\theta_K = \pi$ si K es negativa.

También en este caso resulta que los argumentos de los factores correspondientes a los polos son iguales y de signo opuesto que los de los ceros de igual tipo. Si se quieren expresar los ángulos en grados, basta recordar la Ec. (11.96).

Como todos los términos quedan multiplicados por el factor de conversión, resulta indistinto expresar en la Ec. (11.108) todos los ángulos en grados o en radianes.

Para encontrar la forma de construir los gráficos de Bode, bastará con analizar por separado la influencia de cada uno de los términos de las Ecs. (11.107) y (11.108) y luego sumar los resultados para cada gráfico. El análisis será hecho en cada caso primero para el módulo y luego para el argumento.

11.10.2) **Término constante:** El primer término de la Ec. (11.107) es, de acuerdo a la Ec. (11.106):

$$20 \log |K| = 20 \log \left| A_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2^m \omega_{03}^2}{\alpha_4 \alpha_5^n \omega_{06}^2} \right| \quad (11.109)$$

La Ec. (11.109) muestra que el término constante es la expresión en decibels del factor de escala A_0 multiplicado por las constantes de atenuación de todos los ceros reales negativos elevados al orden de los mismos y los cuadrados de las pulsaciones naturales correspondientes en los ceros complejos conjugados, estando dividido por los mismos factores, debidos a los polos. Si se desarrolla, la Ec. (11.109) queda:

$$\begin{aligned} 20 \log |K| &= 20 \log |A_0| + 20 \log |\alpha_1| + 20 m \log |\alpha_2| + \\ &+ 40 \log |\omega_{03}| - 20 \log |\alpha_4| - 20 n \log |\alpha_5| - 40 \log |\omega_{06}| \end{aligned} \quad (11.110)$$

que permite expresar lo anterior de otra forma, ya que las contribuciones de los ceros son la adición de:

$20 m \log |\alpha_1|$ para ceros reales negativos de orden m .

$40 \log |\omega_{03}|$ para pares de ceros complejos conjugados.

En el caso de los polos, los términos son iguales pero de signo opuesto.

En cuanto a θ_K , como ya se dijo, será igual a 0 o 180°, según que su valor sea positivo o negativo, respectivamente.

En la Fig. 11.66 se representan gráficamente las componentes de las respuestas de amplitud y fase debidas a este término.

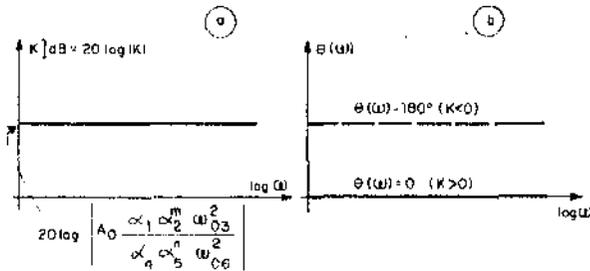


Fig. 11.66

11.10.3) **Cero real negativo simple:** Para hallar la componente de la respuesta de amplitud debida a un cero real negativo simple, hay que considerar el segundo factor de la Ec. (11.107).

$$\begin{aligned}
 F_1(\omega)]_{dB} &= 20 \log \left| 1 - j \frac{\omega}{\alpha_1} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2} = \\
 &= 10 \log \left\{ 1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(11.111)

Se suele utilizar una aproximación asintótica para dibujar la curva. Ella surge de analizar la Ec. (11.111) para ω tendiendo a cero e infinito.

Para $\omega \rightarrow 0$ es $1 \gg \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2$, resultando en la Ec. (11.111):

$$F_1(\omega)]_{dB} \underset{\omega \rightarrow 0}{\cong} 10 \log 1 = 0 \quad (11.112)$$

Para $\omega \rightarrow \infty$ es $1 \ll \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2$, por lo que la Ec. (11.111) queda:

$$F_1(\omega)]_{dB} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\cong} 10 \log \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2 = 20 \log \frac{\omega}{\alpha_1} = -20 \log \alpha_1 + 20 \log \omega \quad (11.113)$$

La Ec. (11.113) corresponde a una recta del tipo $y = y_0 + Mx$, donde:

$$y = F_1(\omega)]_{dB} \\ \omega \rightarrow \infty$$

$$y_0 = -20 \log \alpha_1$$

$$M = 20$$

$$x = \log \omega$$

La pendiente de la asíntota dada por la Ec. (11.113) es:

$$M = \frac{d F_1(\omega)]_{dB}}{d \log \omega} \cong \frac{d}{d \log \omega} \left[20 \log \frac{\omega}{\alpha_1} \right] = 20 \quad (11.114)$$

La Ec. (11.114) dice que a un incremento unitario $\Delta \log \omega$ le corresponde un aumento de 20 dB. Como:

$$\Delta \log \omega = \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$$

equivale a una relación $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$, llamada década, resulta que la pendiente puede expresarse:

$$M = 20 \frac{dB}{\text{década}}$$

También suele usarse una relación $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$, llamada octava, para la cual es:

$$\Delta \log \omega = \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = \log 2 = 0,3$$

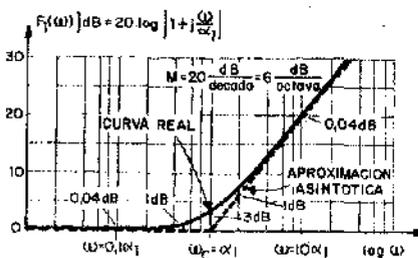
Tratándose de una recta, para un incremento $\Delta \log \omega = 0,3$, en lugar de 1 resultará:

$$\Delta F_1(\omega)]_{\Delta \log \omega = 0,3} = \Delta F_1(\omega)]_{\Delta \log \omega = 1} \cdot 0,3 = 20 \text{ dB} \cdot 0,3 = 6 \text{ dB}$$

Luego, la pendiente de la asíntota resulta:

$$M = 20 \frac{dB}{\text{década}} = 6 \frac{dB}{\text{octava}} \quad (11.115)$$

En la Fig. 11.67 se representa la curva y sus asíntotas.



$\frac{\omega}{\omega_c}$	Corrección a sumar a la aproximación asíntótica para pasar a la curva real de amplitud en dB.	Corrección a sumar a la aproximación asíntótica para pasar a la curva real en grados.
0,1	+ 0,04	+ 5,7
0,5	+ 1	- 4,9
1	+ 3	0
2	+ 1	+ 4,9
10	+ 0,04	- 5,7

Fig. 11.67

La intersección de las asíntotas se produce para $20 \log \frac{\omega}{\alpha_1} = 0$, resultando:

$$\omega_c = \alpha_1 \quad (11.116)$$

que se denomina entonces pulsación de quebradura o ruptura.

El máximo apartamiento entre la curva real y la aproximación asíntótica se produce para $\omega_c = \alpha_1$, resultando, de acuerdo a la Ec. (11.111).

$$F_1(\omega_c) \text{ dB} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1} \right)^2 \right] = 10 \log 2 = 3 \text{ dB}$$

Normalmente las asíntotas para ω igual a cero e infinito y el punto de la curva correspondiente a la pulsación de quebradura $\omega_c = \alpha_1$, bastan para trazar la curva real con suficiente aproximación. En caso contrario, se pueden corregir los errores para otros puntos. Por ejemplo, para $\frac{\omega}{\alpha_1} = 0,5$, el error es:

$$\epsilon = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2 \right] - 0 = 10 \log \left[1 + (0,5)^2 \right] = 0,969 \text{ dB} \cong 1 \text{ dB}$$

Análogamente para $\frac{\omega}{\alpha_1} = 2$, el error resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right)^2 \right] - 20 \log \left(\frac{\omega}{\alpha_1} \right) = 10 \log \left[1 + 2^2 \right] - \\ &- 20 \log 2 = 0,969 \text{ dB} \cong 1 \text{ dB} \end{aligned}$$

del mismo modo se obtienen los errores para $\frac{\omega}{\alpha_1} = 0,1$ y $\frac{\omega}{\alpha_1} = 10$ que resultan de 0,04 dB.

En la Fig. 11.67 se indican los errores y la curva real de la respuesta de amplitud.

Para completar el análisis de este término, se estudiará la respuesta de fase dada por el 2º factor de la Ec. (11.108). Esto es:

$$\theta_1(\omega) = \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_1} \right) = \text{arc tg} \frac{\omega}{\alpha_1} \quad (11.117)$$

La aproximación asintótica es:

Para $\omega \rightarrow 0$ es $\theta_1(0) = \text{arc tg} 0 = 0$

Para $\omega \rightarrow \infty$ es $\theta_1(\infty) = \text{arc tg} \infty = + 90^\circ$

Para $\omega = \alpha_1$ es $\theta_1(\alpha_1) = \text{arc tg} 1 = \frac{\pi}{4}$

La Fig. 11.68 muestra la curva de fase y su aproximación asintótica, completada en la parte central con una recta.

Asimismo se indican las correcciones para $\frac{\omega}{\alpha_1} = 0,1 ; 0,5 ; 2$ y 10.

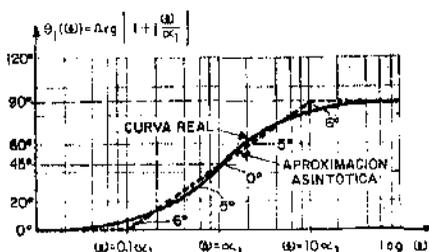


Fig. 11.68

11.10.4) Polo real negativo simple: El factor a considerar es el 5º de la Ec. (11.107):

$$F_2(\omega) \Big|_{dB} = -20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_4} \right| = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_4} \right)^2 \right] \quad (11.118)$$

Comparando la Ec. (11.118) con la Ec. (11.111), se ve que sólo difieren en el signo.

En consecuencia, la frecuencia angular de quebraduras será, en este caso:

$$\omega_c = \alpha_4$$

y las asíntotas serán el eje horizontal y una recta de pendiente negativa.

$$M = -20 \frac{dB}{\text{décadas}} = -6 \frac{dB}{\text{octava}}$$

que corta el eje horizontal para $\omega_c = \alpha_4$.

En la Fig. 11.69 se muestran la curva y la aproximación asintótica. Análogamente, el argumento dado por el 5º término de la Ec. (11.108) es:

$$\theta_4(\omega) = -\text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_1} \right) = -\text{arc tg} \frac{\omega}{\alpha_1}$$

que resulta de igual valor y signo opuesto al de la Ec. (11.117). En consecuencia, la respuesta de fase, será la imagen especular respecto del eje horizontal, de la representada en la Fig. 11.68, como se muestra en la Fig. 11.70.

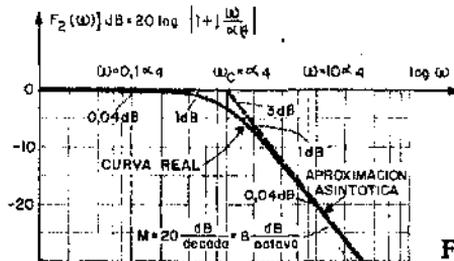


Fig. 11.69

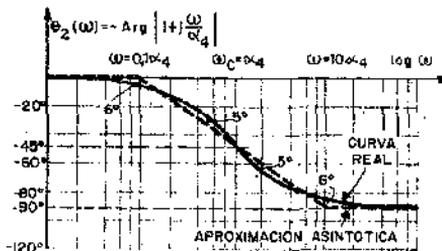


Fig. 11.70

11.10.5) **Ceros y polos reales negativos múltiples:** Para estudiar la respuesta de amplitud se deben analizar los términos 3° y 6° de la Ec. (11.107). Ellos son:

$$F_3(\omega) \Big|_{dB} = 20 m \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_2} \right| = 10 m \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_2} \right)^2 \right] \quad (11.119)$$

$$F_4(\omega) \Big|_{dB} = -20 n \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\alpha_5} \right| = -10 n \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_5} \right)^2 \right] \quad (11.120)$$

La Ec. (11.119) es igual a la Ec. (11.111), multiplicada por m , mientras que la Ec. (11.120) es igual a n veces la Ec. (11.118). En consecuencia, las respuestas de frecuencia de amplitud, serán similares a las representadas en las Figs. 11.67 y 11.69, pero con pendientes $m 20 \frac{dB}{decada}$ y $n 20 \frac{dB}{decada}$ respectivamente.

Los errores también se incrementan en las mismas proporciones, como se muestra en las Figs. 11.71 y 11.72.

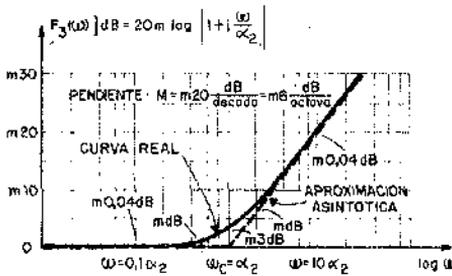


Fig. 11.71

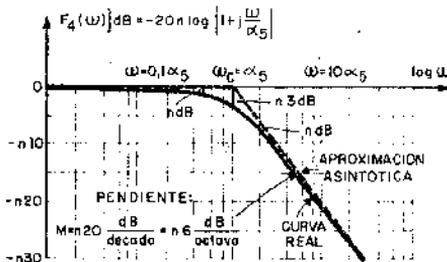


Fig. 11.72

Los argumentos están dados por los términos 3° y 6° de la Ec. (11.108). Son ellos:

$$\theta_3(\omega) = m \operatorname{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_2} \right) = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\alpha_2} \quad (11.121)$$

$$\theta_4(\omega) = -n \operatorname{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha_5} \right) = -n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\alpha_5} \quad (11.122)$$

Comparando la Ec. (11.121) con la Ec. (11.117), resulta evidente que la componente de la respuesta de fase debida a un cero real negativo de orden m es igual a la de un cero real negativo simple, con la misma pulsación ω_c de ruptura, multiplicada por m .

Análogamente, la componente de la respuesta de fase debida a un polo real negativo de orden n , se obtiene multiplicando por n la correspondiente a un polo real negativo simple con la misma pulsación de quebradura. Las curvas se obtendrán multiplicando las ordenadas de las Figs. 11.68 y 11.70 por m y n respectivamente.

Si se trabajara con funciones de fase no mínima, el cero podría estar a la derecha del eje $j\omega$. En ese caso, el factor de la Ec. (11.102) se convierte en:

$$(j\omega - \alpha)^m = \alpha^m \left(1 - j \frac{\omega}{\alpha} \right)^m \quad (11.123)$$

que conduce a la misma respuesta de amplitud que la Ec. (11.119):

$$F'_3(\omega) \Big|_{dB} = 20 m \log \left| 1 - j \frac{\omega}{\alpha} \right| = 10 m \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2 \right]$$

En cuanto al argumento, resulta:

$$\theta'_3 = m \operatorname{Arg} \left(1 - j \frac{\omega}{\alpha} \right) = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(- \frac{\omega}{\alpha} \right)$$

que tiene igual valor y signo opuesto al de la Ec. (11.121).

11.10.6) **Par de ceros complejos conjugados:** La componente de la respuesta de amplitud se obtiene analizando el 4° término de la Ec. (11.107):

$$\begin{aligned} F_5(\omega) \Big|_{dB} &= 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right| = \\ &= 10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (11.124)$$

La aproximación asintótica es:

$$\text{Para } \omega \rightarrow 0 \text{ es } 1 \gg \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \therefore F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{dB} \cong 10 \log 1 = 0$$

que coincide con el eje $\log \omega$.

$$\text{Para } \omega \rightarrow \infty \text{ es } 1 \ll \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty}^{dB} &\cong 10 \log \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^4 + 4 \gamma_3^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right] = \\ &= 10 \log \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 + 4 \gamma_3^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

y como $\left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \gg 4 \gamma_3^2$ resulta:

$$F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty}^{dB} = 10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^4 = -40 \log \omega_{03} + 40 \log \omega \quad (11.125)$$

La Ec. (11.125) es del tipo:

$$y = y_0 + Mx$$

de modo que en el par de ejes $y = F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty}^{dB}$, $x = \log \omega$ representa una recta de pendiente $M = 40 \frac{dB}{\text{década}}$, que corta el eje horizontal en una pulsación de quebraduras o ruptura,

$$\omega_c = \omega_{03} = \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

La corrección a sumar a la aproximación asintótica para pasar a la curva real es: para $\omega < \omega_{03}$

$$\begin{aligned} C' &= F_5(\omega) \Big|_{dB} - F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0}^{dB} = F_5(\omega) \Big|_{dB} = \\ &= 10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (11.126)$$

Mientras que, para $\omega > \omega_{03}$ es:

$$\begin{aligned}
 C'' &= F_5(\omega) \Big|_{dB} - F_5(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \\
 &= 10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right]^2 + \left(2\gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \right\} - \\
 &- 40 \log \frac{\omega}{\omega_{03}} \quad (11.127)
 \end{aligned}$$

Las Ecs. (11.126) y (11.127) nos muestran que el error es función de la constante de amortiguamiento relativa o normalizada.

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3}{\omega_{03}} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}$$

En la Fig. 11.73 se representa la aproximación asintótica y las curvas reales de la respuesta de amplitud, para $\gamma = 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,707$ y 1. En el cuadro de la Fig. 11.74 se dan los errores para distintos valores de γ y

$\frac{\omega}{\omega_0}$

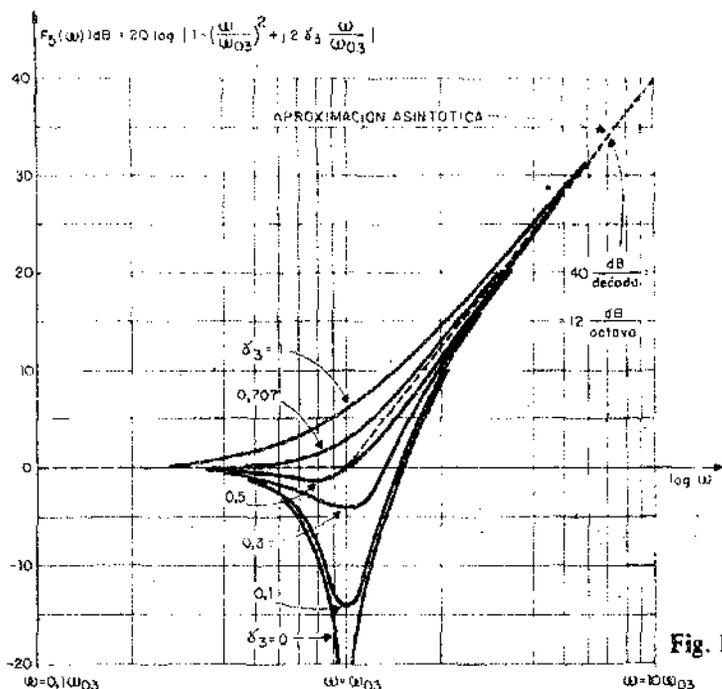


Fig. 11.73

$\frac{\omega}{\omega_c}$	γ	Corrección a sumar a la aproximación asintótica de amplitud para obtener la curva real, en dB.	Corrección a sumar a la aproximación asintótica de fase para obtener la curva real en grados.
0,5	0	- 2,5	0
	0,1	- 2,4	+ 7,59
	0,3	- 1,8	+ 21,8
	0,5	- 0,9	+ 33,7
	0,707	+ 0,3	+ 38,3
	1	+ 1,9	+ 53,1
1	0	- ∞	0
	0,1	- 14	0
	0,3	- 4,4	0
	0,5	0	0
	0,707	+ 3	0
	1	+ 6	0
2	0	- 2,5	0
	0,1	- 2,4	- 7,59
	0,3	- 1,8	- 21,8
	0,5	- 0,9	- 33,7
	0,707	+ 0,3	- 38,3
	1	+ 1,9	- 53,1

Fig. 11.74

La componente de la respuesta de fase surge de analizar el 4º término de la Ec. (11.108).

$$\theta_5(\omega) = \text{Arg} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} \right] = \text{arc tg} \frac{2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2} \quad (11.128)$$

Para $\omega \rightarrow 0$ es $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \ll 1$, de modo que:

$$\theta_5(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{arc tg} 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{03}} = 0$$

$\omega \rightarrow \infty$ es $\left(\frac{\omega}{\omega_{03}} \right)^2 \gg 1$, resultando:

$$\theta_5(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{arc tg} \left(- \frac{2 \gamma \omega_{03}}{\omega} \right) = 180^\circ$$

Para $\omega = \omega_0$ es:

$$\theta_5(\omega_0) = \text{arc tg} \frac{2 \gamma_3}{0} \Rightarrow 90^\circ$$

En la Fig. 11.75 se muestran las curvas de la respuesta de fase reales para $\gamma = 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,707$ y 1 y la aproximación asintótica con dos rectas horizontales de 0 y 180° y una vertical que pasa por $\omega_c = \omega_0$. En el cuadro de la Fig. 11.74, se dan los errores que se cometen al reemplazar la curva real por la aproximación asintótica.

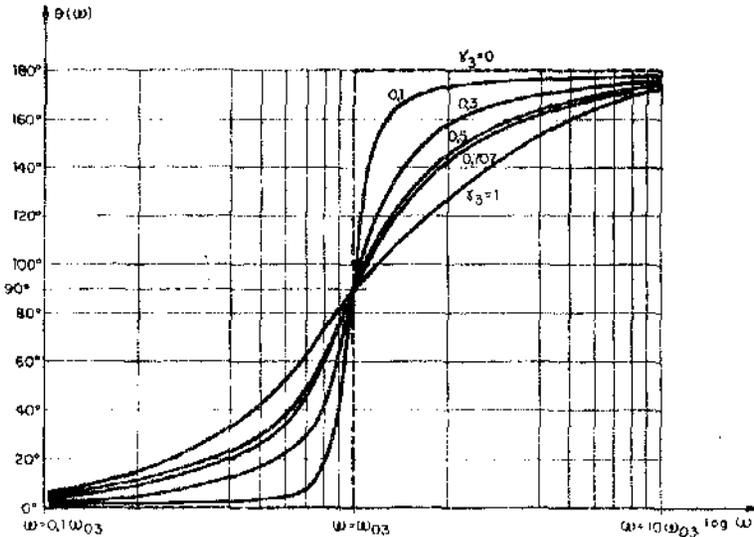


Fig. 11.75

Nótese que las respuestas de amplitud y fase para un par de ceros imaginarios conjugados se obtienen como caso particular para $\gamma = 0$, en las ecuaciones y los gráficos. Si se trabajara con funciones de fase no-mínima los ceros podrían aparecer en el semiplano derecho. En el caso, el factor a considerar en lugar del dado por la Ec. (11.103) sería:

$$\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - j 2\gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right]$$

que conduce a las siguientes respuestas de amplitud y fase:

$$\begin{aligned} F'_5(\omega) \Big|_{dB} &= 20 \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - j 2\gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right| = \\ &= 10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(2\gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (11.129)$$

$$\theta_5'(\omega) = \text{Arg} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - j 2 \gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right] = \text{arc tg} \left[- \frac{2 \gamma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] \quad (11.130)$$

La Ec. (11.129) coincide con la Ec. (11.124), mientras que la Ec. (11.130) sólo difiere de la Ec. (11.128) en el signo.

11.10.7) **Par de polos complejos conjugados:** Las respuestas de amplitud y fase están dadas, respectivamente por los últimos términos de las Ecs. (11.107) y (11.108):

$$F_6(\omega) \Big|_{dB} = - 20 \log \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{06}} \right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{06}} \right] \quad (11.131)$$

$$\theta_6(\omega) = - \text{Arg} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{06}} \right)^2 + j 2 \gamma_3 \frac{\omega}{\omega_{06}} \right] \quad (11.132)$$

Comparando la Ec. (11.131) con la Ec. (11.123) y la Ec. (11.132) con la Ec. (11.128) se ve que las componentes de las respuestas de frecuencia de amplitud y fase debidas al polo complejo conjugado, son iguales en valor y con el signo opuesto a las del cero complejo conjugado de igual γ y ω_0 , por lo que no se justifica el análisis y la representación gráfica.

También en este caso, para $\gamma = 0$ se obtienen las respuestas correspondientes a un par de polos imaginarios conjugados.

11.10.8) **Ceros y polos en el origen:** Si bien parece razonable tomar un cero o un polo en el origen como el caso particular para $\alpha = 0$ de un cero o un polo real negativo, el enfoque con que se ha encarado el desarrollo de los gráficos de Bode no lo permite. En efecto, la Ec. (11.101):

$$F(j\omega) = (j\omega + \alpha)^n = \alpha^n \left(1 + j \frac{\omega}{\alpha} \right)^n \quad (11.101)$$

muestra que al tomar $\alpha = 0$ en el último miembro aparece una operación no permitida. Por lo tanto, los ceros y los polos en el origen deben ser anali-

zados sin afectar el valor de la constante K , de las Ecs. (11.106) y (11.107), empleando los dos primeros miembros de la Ec. (11.101) con $\alpha = 0$. Esto es:

$$F(j\omega) = (j\omega + \alpha)^n = (j\omega)^n \quad (11.133)$$

Para el caso de un cero de orden m en el origen, las componentes de la respuesta de amplitud resultan:

$$F_7(\omega) \Big|_{dB} = 20 m \log |j\omega| = 20 m \log \omega \quad (11.134)$$

que es la ecuación de una recta. En efecto, si se denomina:

$$y = F_7(\omega) \Big|_{dB}$$

$$M = 20 m$$

$$x = \log \omega$$

resulta $y = Mx$

La recta corta al eje horizontal para $\omega = 1$ y tiene una pendiente. $M = 20 m \frac{dB}{\text{década}} = 6 m \frac{dB}{\text{octava}}$, como se muestra en la Fig. 11.76.

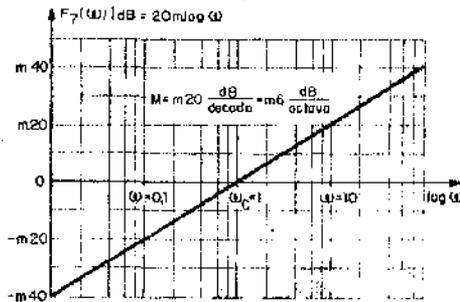


Fig. 11.76

En cuanto al argumento, su expresión es:

$$\theta_7(\omega) = \text{Arg}(j\omega)^n = m \cdot 90^\circ = \text{cte} \quad (11.135)$$

que se representa en la Fig. 11.77.

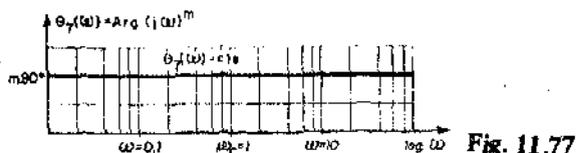
Para un polo en el origen de orden n es:

$$F_B(\omega) \Big|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega^n} \right| = -20n \log \omega \quad (11.136)$$

que sólo difiere de la Ec. (11.134) en el signo y:

$$\theta(\omega) = \text{Arg} \frac{1}{(j\omega)^n} = -n 90^\circ = \text{cte} \quad (11.137)$$

que corresponde a la Ec. (11.135) con el signo cambiado. En consecuencia, los gráficos serán los de las Figs. 11.76 y 11.77 con el signo de las ordenadas y la pendiente cambiados.



En la Fig. 11.78 se resumen todos los casos elementales analizados.

11.10.9) **Construcción de los gráficos asintóticos:** Para construir los gráficos de las respuestas de frecuencia de amplitud y fase, se procede de la siguiente manera:

- 1) Se trazan los ejes.
- 2) Se identifican las pulsaciones de quebradura en el eje horizontal.
- 3) Se calculan y representan en los gráficos de amplitud y fase, $\log |K|$ y $\text{Arg } K$, respectivamente. Recordar que si $K > 0$ es $\text{Arg } K = 0$ y para $\text{Arg } K < 0$ es $K = 180^\circ$.
- 4) Se representan las asintotas de las componentes correspondientes a los ceros y los polos.
- 5) Se suman las componentes.
- 6) Se agregan las correcciones y se trazan las curvas reales.

Nótese que los ceros producen quebraduras de la respuesta de amplitud en las pulsaciones de ruptura ω_c , en sentido antihorario, con variaciones de la pendiente de $n 20 \frac{dB}{\text{década}} = n 6 \frac{dB}{\text{octava}}$ donde n es el orden del cero. En el

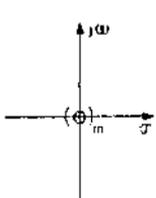
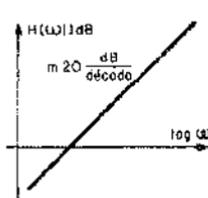
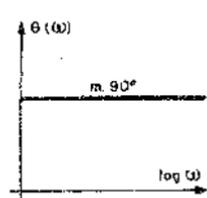
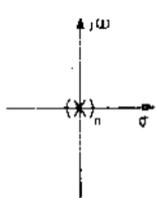
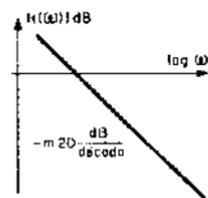
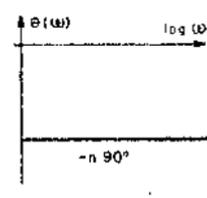
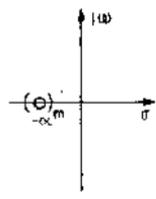
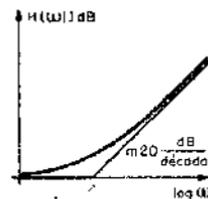
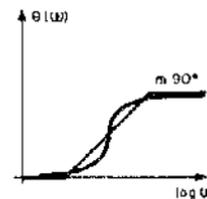
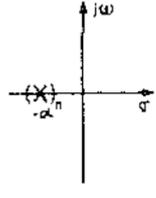
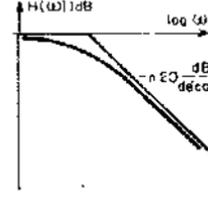
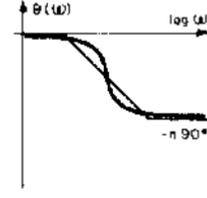
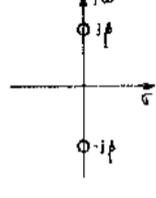
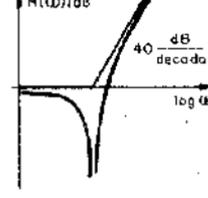
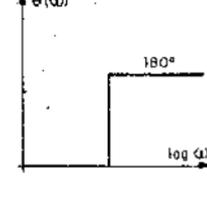
CONFIGURACION DE POLOS Y CEROS BASICA	EXPRESION	INFLUENCIA SOBRE K	RESPUESTA DE AMPLITUD	RESPUESTA DE FASE
	$(j\omega)^m$	NINGUNA		
	$(\frac{1}{j\omega})^n$	NINGUNA		
	$(j\omega + \alpha)^m$ $= \alpha^m (1 + j\frac{\omega}{\alpha})^m$	$K = K_0 \alpha^m$		
	$\frac{1}{(j\omega + \alpha)^n}$ $= \frac{1}{\alpha^n (1 + j\frac{\omega}{\alpha})^n}$	$K = \frac{K_0}{\alpha^n}$		
	$(j\omega + j\beta)(j\omega - j\beta)$ $= \beta^2 1 - (\frac{\omega}{\beta})^2 $ $= \omega_0^2 [1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]$	$K = K_0 \beta^2$		

Fig. 11.78

CONFIGURACION DE POLOS Y CEROS BASICA	EXPRESION	INFLUENCIA SOBRE K	RESPUESTA DE AMPLITUD	RESPUESTA DE FASE
	$\frac{1}{\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}$	$K = \frac{A_0}{\beta^2}$		
	$\frac{1}{\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j2\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]}$	$K = A_0 \omega_0^2$		
	$\frac{1}{\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j2\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]}$	$K = \frac{A_0}{\omega_0^2}$		
	$\frac{(\omega - \alpha)^m}{\alpha^m \left(1 - \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2 \right)^m}$	$K = A_0 \alpha^m$		
	$\frac{\omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2}{-12 \times \frac{\beta}{\omega_0}}$	$K = \frac{A_0}{\omega_0^2}$		

Fig. 11.78

caso de polos complejos conjugados o imaginarios conjugados debe tomarse $n = 2$.

Análogamente, los polos producen quebraduras en las pulsaciones de ruptura, en sentido horario, con variaciones de la pendiente de:

$$\left(-n \ 20 \frac{dB}{\text{década}} \right) = \left(-n \ 6 \frac{dB}{\text{octava}} \right)$$

En cuanto a la fase, la variación total por cada cero de orden n ubicado en el semiplano izquierdo es de $n \ 90^\circ$ y por cada polo ($-n \ 90^\circ$).

Ejemplo 1:

Dada la aproximación asintótica de amplitud de la Fig. 11.79 y sabiendo que es una función de fase mínima y no existen ceros ni polos conjugados, hallar la transmitancia $A_v(s)$:

En la Fig. 11.79 se han indicado los cambios de pendiente producidos en los puntos de quebradura. En base al signo y el valor de los cambios de pendiente, se han señalado sobre el eje $\log \omega$ las ubicaciones y los órdenes de los ceros y los polos. Teniendo en cuenta esa información, puede escribirse que:

$$A_v(s) \approx A_0 \frac{(s-0)^2 (s+10^2) (s+10^3) (s+8 \cdot 10^3)^2}{(s+10)^3 (s+2 \cdot 10^3)^3} \quad (11.138)$$

Para $\sigma = 0$, la Ec. (11.138) queda:

$$A_v(j\omega) = A_0 \frac{(j\omega)^2 (j\omega + 10^2) (j\omega + 10^3) (j\omega + 8 \cdot 10^3)^2}{(j\omega + 10)^3 (j\omega + 2 \cdot 10^3)^3}$$

cuyo módulo es:

$$|A_v(\omega)| = \left| A_0 \right| \frac{\omega^2 \sqrt{10^4 + \omega^2} \sqrt{10^6 + \omega^2} (\sqrt{8^2 \cdot 10^6 + \omega^2})^2}{(\sqrt{10^2 + \omega^2})^3 (\sqrt{4 \cdot 10^6 + \omega^2})^3} \quad (11.139)$$

En la Fig. 11.79 se ve que para $s = j1$ es $A_v(100)_{dB} = 0 \therefore A_v(100) = 1$
Reemplazando estos valores de A_v y ω en la Ec. (11.139) resulta:

$$1 = \left| A_0 \right| \frac{\sqrt{10^4 + 1} \sqrt{10^6 + 1} (\sqrt{64 \cdot 10^6 + 1})^2}{(\sqrt{10^2 + 1})^3 (\sqrt{4 \cdot 10^6 + 1})^3}$$

$$\therefore \left| A_0 \right| = 1,015 \cdot 10^{10}$$

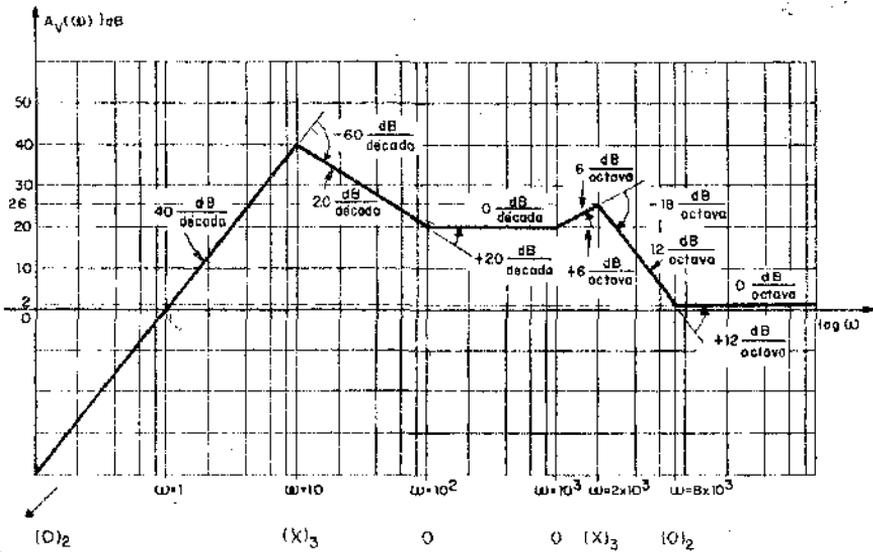


Fig. 11.79

En la Fig. 11.80 se muestra la configuración de polos y ceros de $A_v(s)$.

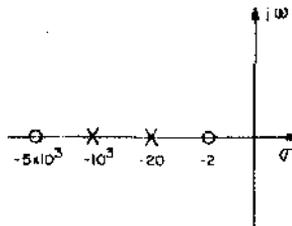


Fig. 11.80

Nótese que el conocimiento del módulo de la transmitancia permite reconstruir la función y por lo tanto obtener la fase.

Ejemplo 2:

Hallar los gráficos de Bode correspondientes a la siguiente transmitancia:

$$H(s) = 4 \frac{(s + 2)(s + 5 \cdot 10^3)}{(s + 20)(s + 10^3)} \quad (11.140)$$

En régimen senoidal permanente resulta:

$$H(j\omega) = 4 \frac{(j\omega + 2)(j\omega + 5 \cdot 10^3)}{(j\omega + 20)(j\omega + 10^3)}$$

que puede escribirse:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 4 \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3 \left(1 + j \frac{\omega}{2}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{5 \cdot 10^3}\right)}{20 \cdot 10^3 \left(1 + j \frac{\omega}{20}\right) \left(1 + j \frac{\omega}{10^3}\right)} = \\ &= 2 \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{5 \cdot 10^3}\right)}{\left(1 + j \frac{\omega}{20}\right) \left(1 + \frac{\omega}{10^3}\right)} \end{aligned} \quad (11.141)$$

La transmitancia dada por la Ec. (11.141) tiene una constante de escala ya modificada por los ceros y los polos de valor:

$$K = A_0 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4} = 4 \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 2$$

que contribuye a la respuesta de amplitud con un término constante:

$$K \Big|_{dB} = 20 \log |K| = 20 \log 2 = 6 \text{ dB}$$

Existen dos ceros reales negativos simples que introducen pulsaciones de quebradura $\omega_{c1} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y $\omega_{c4} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, con giros de $+6 \frac{\text{dB}}{\text{octava}} = 20 \frac{\text{dB}}{\text{década}}$ en la curva.

Además hay dos polos reales negativos simples que producirán giros de $\left(-6 \frac{\text{dB}}{\text{octava}}\right) = \left(-20 \frac{\text{dB}}{\text{década}}\right)$ para las pulsaciones de ruptura $\omega_{c2} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y $\omega_{c3} = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

En la Fig. 11.81 se han representado las componentes y la aproximación asintótica de la respuesta de amplitud total, así como las correcciones y la curva real. Con igual criterio se han dibujado las componentes, la aproximación asintótica y la curva real de la respuesta de fase en la Fig. 11.82. El argumento de K se ha tomado igual a cero por ser $K > 0$.

Ejemplo 3:

Hallar los gráficos logarítmicos asintóticos de Bode para la función de transferencia:

$$H(s) = 900 \frac{s^2}{(s+1)^2 [s+(10-j99,5)] [s+(10+j99,5)]} \quad (11.142)$$

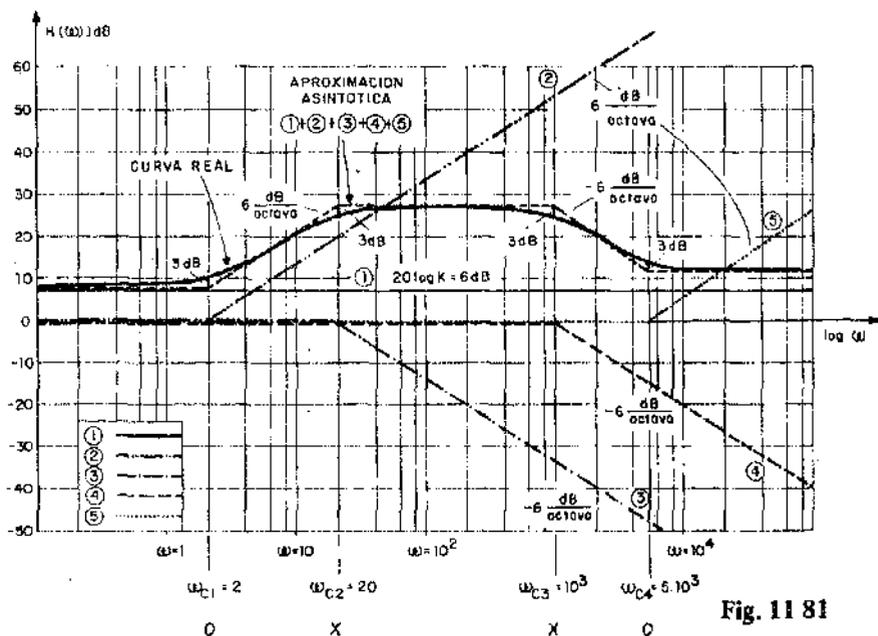


Fig. 11 81

La Ec. (11.140) puede escribirse:

$$H(s) = 900 \frac{s^2}{(s+1)^2 [s^2 + 20s + 10^4]}$$

y para régimen senoidal permanente:

$$H(j\omega) = 900 \frac{(j\omega)^2}{(j\omega+1)^2 [-\omega^2 + j20\omega + 10^4]} = \frac{900}{1 \cdot 10^4} \frac{(j\omega)^2}{\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{10^2}\right)^2 + j0,2 \frac{\omega}{10^2}\right]} \quad (11.143)$$

La constante de escala ya modificada por los polos y los ceros es:

$$K = \frac{900}{10^4} = 9 \cdot 10^{-2}$$

y su contribución a la respuesta de amplitud:

$$K \Big|_{dB} = 20 \log 9 \cdot 10^{-2} = -20,9 \text{ dB}$$

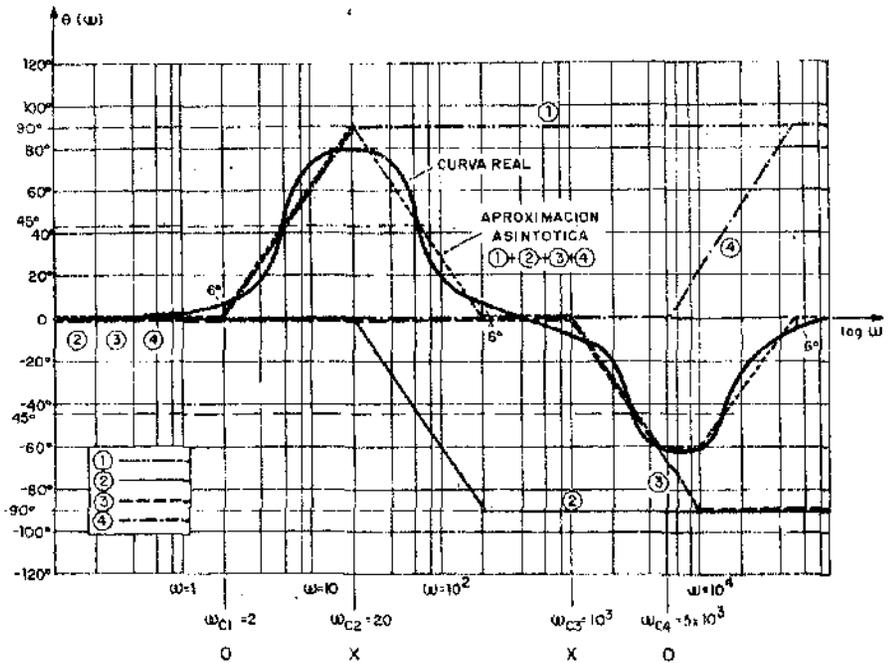


Fig. 11.82

Nótese que si el operador j no se saca del factor $(j\omega)^2$ del numerador, como se ha hecho en el análisis de los ceros y polos en el origen en el apartado 11.10.8, resulta $K > 0$ y por lo tanto $\text{Arg } K = 0$.

Los 180° de j^2 aparecerán en la contribución del cero db^2 en el origen. Dicho cero aporta a la respuesta de amplitud una recta de pendiente $+40 \frac{dB}{\text{década}}$ que corta el eje horizontal en $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$.

El polo real negativo de 2° orden contribuye con una recta horizontal coincidente con el eje $\log \omega$ hasta $\omega_{c1} = 1$ y a partir de esa pulsación con

una recta de pendiente $\left(-40 \frac{dB}{d\text{decada}}\right)$ y una variación de (-180°) en la fase.

Finalmente, al par de polos complejos conjugados le corresponde una recta horizontal coincidente con el eje $\log \omega$ hasta $\omega_{c2} = 100$ y luego una recta de pendiente $\left(-40 \frac{dB}{d\text{decada}}\right)$ que corta al eje $\log \omega$ en $\omega = 100$. La fase varía en (-180°) . Nótese que $\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{10}{100} = 0,1$

En las Figs. 11.83 y 11.84 se han representado las aproximaciones asintóticas y las curvas reales correspondientes a las respuestas totales de amplitud y fase respectivamente, así como las componentes debidas a los polos y los ceros.

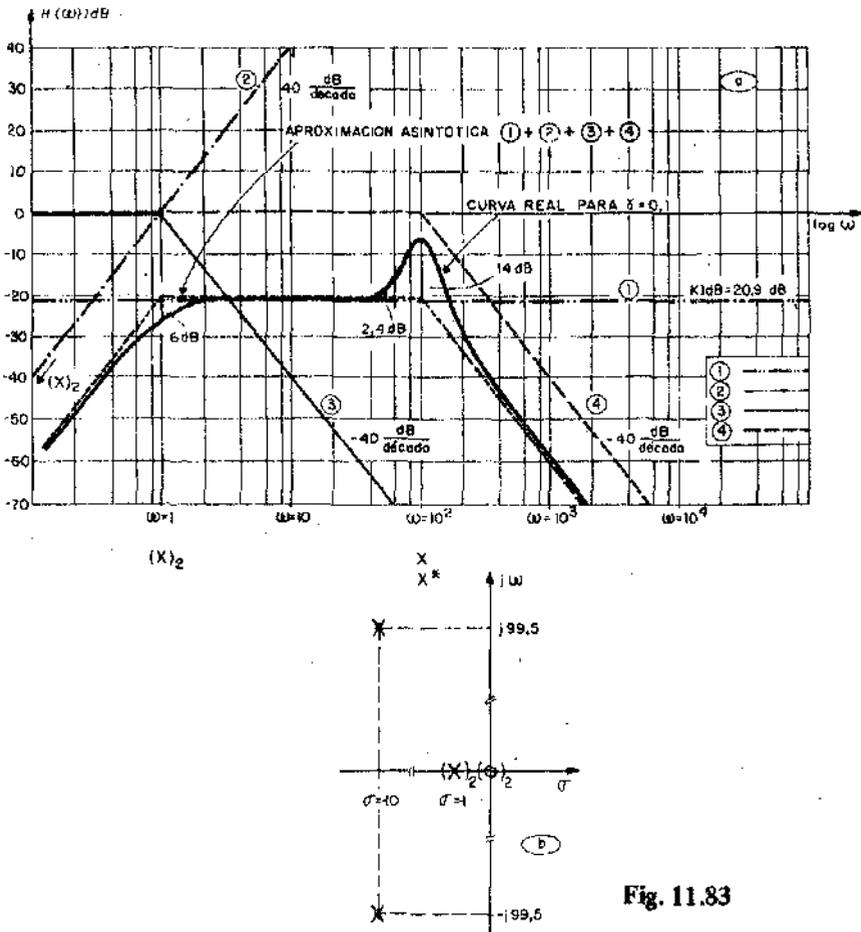


Fig. 11.83

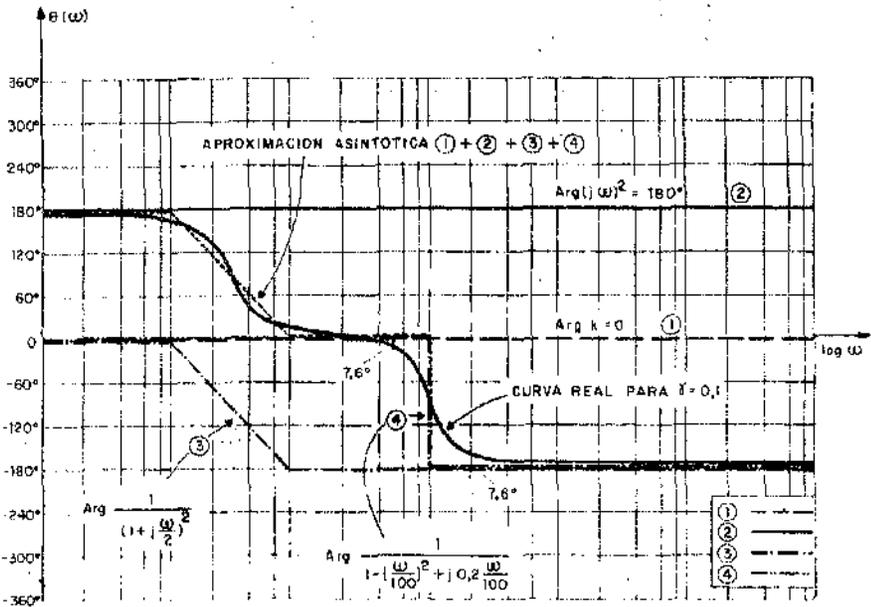


Fig. 11.84

11.11 Problemas resueltos

11.11.1) Dadas las configuraciones de polos y ceros de la Fig. 11.85, indicar cuales no satisfacen las condiciones que deben cumplir las immitancias de excitación de circuitos constituidos por elementos pasivos.

Solución:

Cumplen las condiciones las configuraciones de las Figs. 11.85.a y f.

No las satisfacen las de las figuras:

11.85.b: Por tener un cero con la parte real positiva.

11.85.c: Por tener un polo doble sobre el eje $j\omega$.

11.85.d: Por tener un polo imaginario que no está acompañado de su conjugado.

11.85.e: Por tener un cero implícito doble en el infinito.

11.85.g: Por tener dos polos en el semiplano positivo.

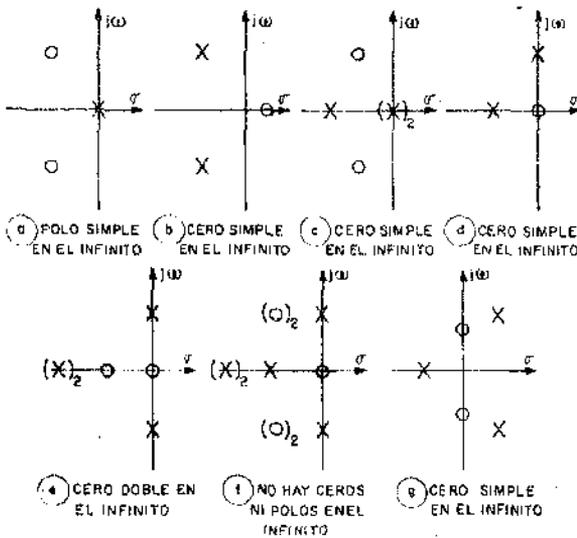


Fig. 11.85

11.11.2) Dadas las configuraciones de polos y ceros de la Fig. 11.85, indicar cuales no satisfacen las condiciones que deben cumplir las inmitancias y trasmittancias de transferencia de circuitos constituidos por elementos pasivos.

Solución:

Satisfacen las condiciones las configuraciones de las Figs. 11.85.b, e y f.

No las cumplen las de las figuras:

11.85.a: Por tener el grado del numerador mayor que el del denominador (No cumple la condición para las trasmittancias de tensión y corriente).

11.85.c: Por tener un polo doble sobre el eje $j\omega$.
 tener un polo doble sobre el eje $j\omega$.

11.85.d: Por tener un polo imaginario que no está acompañado de su conjugado.

11.85.g: Por tener polos en el semiplano derecho.

11.11.3) Para el divisor de tensión de la Fig. 11.86, se pide:

a) Hallar la transmitancia de tensiones:

$$H(s) = A_v(s) = \left. \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \right|_{CIN}$$

- b) Deducir la condición que debe cumplirse entre los parámetros circuitales para que el circuito se comporte como un atenuador ideal (NO debe alterar la forma de onda).
- c) Calcular $H(s)$ y representar su configuración de polos y ceros para $C_2 = C_0$, $C_2 = 2 C_0$ y $C_2 = 0,5 C_0$. Donde C_0 es el valor que satisface la condición de compensación hallada en punto b).
- d) Supuesto que $v_e(t) = 20 u(t)$, calcular $R(s)$ y representar su configuración de polos y ceros para los tres valores de C_2 , adoptados en el punto c).
- e) Hallar la respuesta temporal $r(t)$ para las tres configuraciones de polos y ceros del punto d), antitransformando por cálculo gráfico de residuos. Representar las tres respuestas en un solo gráfico.

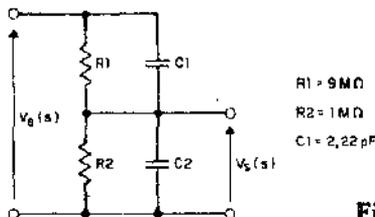


Fig. 11.86

Solución:

a) Para el circuito de la Fig. 11.86 puede escribirse que:

$$H(s) = \left. \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \right|_{CIN} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1}{\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + 1} = \frac{1}{Z_1(s) Y_2(s) + 1} \quad (11.144)$$

$$\text{Donde: } Y_1(s) = \frac{1}{R_1} + s C_1 \quad \therefore \quad Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + s C_1} \quad (11.145)$$

$$e \quad Y_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_2}} + s C_2 \quad (11.146)$$

Reemplazando las Ecs. (11.145) y (11.146) en la Ec. (11.144), resulta:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + s C_1 \left(\frac{1}{R_2} + s C_2 \right) + 1} = \frac{\frac{1}{R_1} + s C_1}{\left(\frac{1}{R_2} + s C_2 \right) + \left(\frac{1}{R_1} + s C_1 \right)}$$

que puede escribirse:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1} + s C_1}{s(C_1 + C_2) + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{\left(\frac{1}{R_2} + s C_2 \right) + \left(\frac{1}{R_1} + s C_1 \right)} \quad (11.147)$$

$$\text{y llamando: } C_p = C_1 + C_2; \quad \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \quad A_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (11.148)$$

$$\text{queda:} \quad H(s) = A_0 \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_p C_p}} \quad (11.149)$$

b) Puesto que: $R(s) = H(s) E_x(s)$

donde $R(s)$ es la respuesta transformada y $E_x(s)$ es la excitación transformada. Para que la forma de $R(s)$ sea igual a la de $E_x(s)$, a menos de una constante de escala, debe hacerse igual a la unidad el factor que multiplica a A_0 en la Ec. (11.149), de modo que sea:

$$R(s) = A_0 E_x(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E_x(s) \quad (11.150)$$

Para que ello ocurra, debe cumplirse en la Ec. (11.149) que:

$$R_p C_p = R_1 C_1 \quad (11.151)$$

Reemplazando R_p y C_p por sus valores, resulta:

$$R_p C_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} (C_1 + C_2) = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} = R_1 C_1$$

y operando con los dos últimos términos:

$$R_2 C_1 + R_2 C_2 = R_1 C_1 + R_2 C_1$$

resultando la llamada condición de compensación:

$$R_2 C_2 = R_1 C_1 \quad (11.152)$$

c) De la Ec. (11.152), resulta:

$$C_2 = \frac{R_1}{R_2} C_1 = \frac{9 \cdot 10^6 \Omega}{10^6 \Omega} 2,22 \cdot 10^{-12} F = 20 pF = C_0$$

Reemplazando los valores de R_1 ; C_1 ; R_2 y $C_2 = C_0$, en las Ecs. (11.148) y (11.149) resulta:

$$C_p = C_1 + C_2 = 2,22 pF + 20 pF = 22,22 pF$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{9 \cdot 10^6} + \frac{1}{10^6} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-6} = \frac{10^{-5}}{9} \quad \therefore R_p = 9 \cdot 10^5 \Omega$$

$$A_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{2,22 pF}{2,22 pF + 20 pF} = 0,1$$

$$H(s) = 0,1 \frac{s + \frac{1}{9 \cdot 10^6}}{s + \frac{1}{9 \cdot 10^5} \frac{22,22 \cdot 10^{-12}}{2,22 \cdot 10^{-12}}} = 0,1 \quad (11.153)$$

La configuración de polos y ceros correspondiente a la Ec. (11.153), es la representada en la Fig. 11.87.a, donde se han representado el cero y el polo superpuestos, los que, naturalmente se cancelan entre sí.

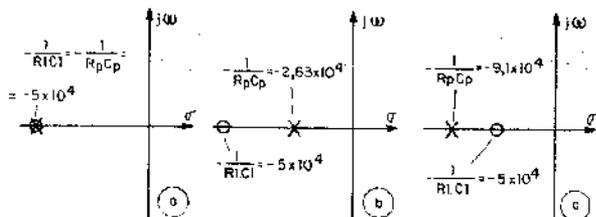


Fig. 11.87

Tomando $C_2 = 2 C_0 = 40 \text{ pF}$ en las Ecs. (11.148) y (11.149), resulta:

$$\begin{aligned}
 C_p &= C_1 + C_2 = 2,22 \text{ pF} + 40 \text{ pF} = 42,22 \text{ pF} \\
 \frac{1}{R_p} &= \frac{10^{-5}}{9} \therefore R_p = 9 \cdot 10^5 \Omega \\
 A_0 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{2,22 \text{ pF}}{2,22 \text{ pF} + 40 \text{ pF}} = 0,053 \\
 H(s) &= 0,053 \frac{s + \frac{1}{9 \cdot 10^6}}{s + \frac{1}{9 \cdot 10^5}} = 0,053 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s + 2,63 \cdot 10^4} \quad (11.154)
 \end{aligned}$$

La configuración de polos y ceros de la Ec. (11.154), se representa en la Fig. 11.87.b.

Finalmente, para $C_2 = 0,5 C_0 = 10 \text{ pF}$, las Ecs. (11.148) y (11.149) quedan:

$$\begin{aligned}
 C_p &= C_1 + C_2 = 2,22 \text{ pF} + 10 \text{ pF} = 12,22 \text{ pF} \\
 R_p &= 9 \cdot 10^5 \Omega \\
 A_0 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{2,22 \text{ pF}}{2,22 \text{ pF} + 10 \text{ pF}} = 0,18 \\
 H(s) &= 0,18 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s + \frac{1}{9 \cdot 10^5}} = 0,18 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s + 9,1 \cdot 10^4} \quad (11.155)
 \end{aligned}$$

En la Fig. 11.87.c se ha representado la configuración de polos y ceros de la Ec. (11.155). Nótese que en las Figs. 11.87.b y c, se han permutado las posiciones relativas del polo y el cero. Adviértase también que el caso de la Fig. 11.87.a) es el límite que separa a los de las Figs. 11.87.b y c.

d) Si $v_e(t) = 20 u(t)$, la excitación transformada resulta:

$$E_x(s) = V_e(s) = \frac{20}{s}$$

y la respuesta trasformada:

$$R(s) = H(s) E_x(s)$$

se convierte, para los tres casos analizados, de acuerdo a las Ecs. (11.153), (11.154), y (11.155):

$$R(s)]_{C_0} = 0,1 \frac{20}{s} = 2 \frac{1}{s} \quad (11.156)$$

$$R(s)]_{2 C_0} = 0,053 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s + 2,63 \cdot 10^4} \frac{20}{s} = 1,06 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s(s + 2,63 \cdot 10^4)} \quad (11.157)$$

$$R(s)]_{\frac{1}{2} C_0} = 0,18 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s + 9,1 \cdot 10^4} \frac{20}{s} = 3,6 \frac{s + 5 \cdot 10^4}{s(s + 9,1 \cdot 10^4)} \quad (11.158)$$

En las Figs. 11.88.a, b y c se representan, respectivamente, las Ecs. (11.156), (11.157) y (11.158).

Un análisis cualitativo nos indica que en la Fig. 11.88.a) sólo existirá un escalón en la respuesta, por haberse cancelado mutuamente el polo y el cero restantes. Para las configuraciones de las Fig. 11.88.b y c, existirán un escalón y una exponencial que se combinarán de distinta manera, pues la permutación del polo y el cero hará cambiar el signo del residuo en el polo real negativo.

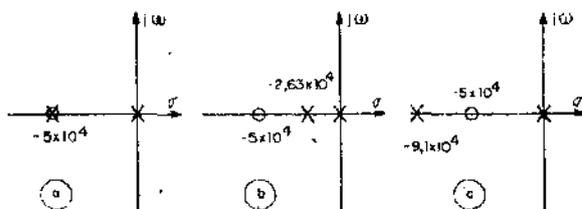


Fig. 11.88

e) El residuo en el polo en el origen de la Fig. 11.88.a, teniendo en cuenta que la constante de escala de la Ec. (11.156) vale 2, es:

$$K_1 = 2 \frac{\prod_{\kappa=1}^m \text{Fasores dirigidos desde cada cero al polo considerado}}{\prod_{i=1}^n \text{Fasores dirigidos desde cada polo al polo considerado}} = 2$$

ya que no hay otros polos ni ceros.

Al mismo resultado se habría arribado en caso de considerar el polo y el cero cancelados, por tener los fasores correspondientes a ambos igual módulo y argumento. En consecuencia, la respuesta temporal para $C_2 = C_0$ resulta:

$$r(t) = v_s(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) = 2 e^{0t} u(t) \quad (11.159)$$

Para $C_2 = 2 C_0$, según la Ec. (11.157) la constante de escala vale 1,06 y los residuos en los dos polos valen, de acuerdo a los fasores dibujados en la Fig. 11.89:

$$K_1 = 1,06 \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = 1,06 \frac{5 \cdot 10^4 e^{j0}}{2,63 \cdot 10^4 e^{j0}} = 2$$

$$K_2 = 1,06 \frac{\bar{C}}{\bar{D}} = 1,06 \frac{2,37 \cdot 10^4 e^{j0}}{2,63 \cdot 10^4 e^{j180^\circ}} = 0,96 e^{-j180^\circ} = -0,96$$

Resultando:

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) = 2 e^{0t} u(t) - 0,96 e^{-2,63 \cdot 10^4 t} u(t) \quad (11.160)$$

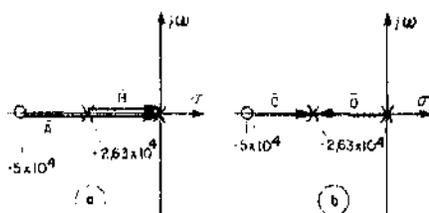


Fig. 11.89

Finalmente, para $C_2 = \frac{C_0}{2}$, según la Ec. (11.158), la constante de escala vale 3,6 y los residuos en los polos, calculados en base a los fasores de la Fig. 11.90 son:

$$K_1 = 3,6 \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = 3,6 \frac{5 \cdot 10^4 e^{j0}}{9,1 \cdot 10^4 e^{j0}} = 2$$

$$K_2 = 3,6 \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = 3,6 \frac{4,1 \cdot 10^4 e^{j180^\circ}}{9,1 \cdot 10^4 e^{j180^\circ}} = 1,6$$

de modo que:

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad u(t) = 2 e^{0t} u(t) + 1,6 e^{-9,1 \cdot 10^4 t} u(t) \quad (11.161)$$

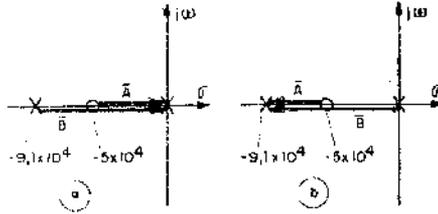


Fig. 11.90

En la Fig. 11.91 se hallan representadas las Ecs. (11.159) (11.160) y (11.161), que corresponden, respectivamente, a los casos: compensado, sub-compensado y sobre-compensado.

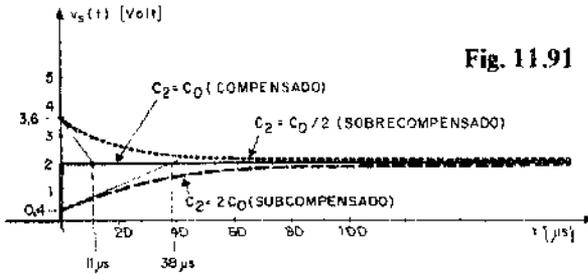


Fig. 11.91

11.11.4) La configuración de polos y ceros correspondiente a la admittancia de trasferencia de un circuito es la mostrada en la Fig. 11.92 y la constante de escala es $A_0 = 4$.

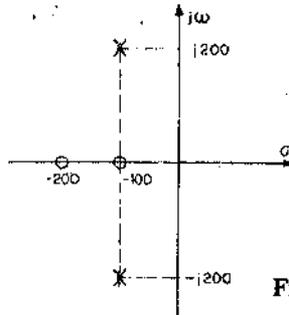


Fig. 11.92

Determinar gráficamente el módulo y el argumento de dicha admitancia de transferencia para $\omega = 0$; 200 rad/seg. e infinito.

Solución:

En las Figs. 11.93. a, b y c se muestran los fasores a tomar en cuenta para los cálculos. En base a ellos resulta:

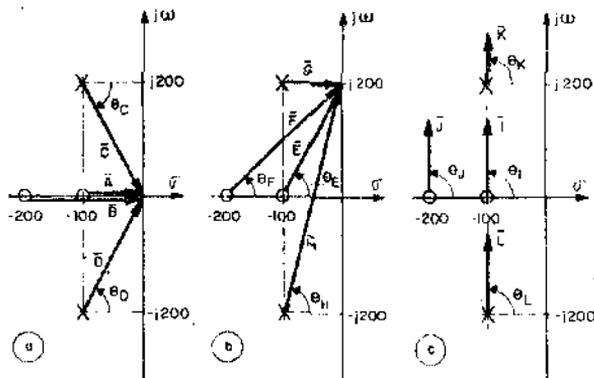


Fig. 11.93

Para $j\omega = 0$, según la Fig. 11.93.a.

$$Y_T(0) = A_0 \frac{\prod_{k=1}^m \text{Módulos de los fasores dirigidos desde cada cero al punto } j\omega \text{ considerado.}}{\prod_{i=1}^n \text{Módulos de los fasores dirigidos desde cada polo al punto } j\omega \text{ considerado.}}$$

$$= A_0 \frac{|\bar{A}| |\bar{B}|}{|\bar{C}| |\bar{D}|} = 4 \frac{100 \cdot 200}{223,6 \cdot 223,6} = 1,6$$

$$\theta(0) = \sum_{k=1}^m \text{Argumentos fasores dirigidos desde cada cero al punto } j\omega \text{ considerado}$$

$$- \sum_{i=1}^n \text{Argumentos fasores dirigidos desde cada polo al punto } j\omega \text{ considerado} =$$

$$= (\theta_A + \theta_B) - (\theta_C + \theta_D) = (0 + 0) - (-63,4^\circ + 63,4^\circ) = 0^\circ$$

Para $\omega = 200$ rad/seg, según la Fig. 11.93.b:

$$Y(200) = A_0 \frac{|\bar{E}| |\bar{F}|}{|\bar{G}| |\bar{H}|} = 4 \frac{223,6 \cdot 282,8}{200 \cdot 412,3} = 3,1$$

$$\theta(200) = (\theta_E + \theta_F) - (\theta_G + \theta_H) = (63,4^\circ + 45^\circ) - (0 + 76^\circ) = 32,4^\circ$$

Para $\omega \Rightarrow \infty$, de acuerdo a la Fig. 11.93.c:

$$Y(\infty) = A_0 \frac{|\bar{I}| |\bar{J}|}{|\bar{K}| |\bar{L}|} = 4 \frac{\infty \cdot \infty}{\infty \cdot \infty} \Rightarrow \text{Indeterminado}$$

Recordando que $A_0 = 4$, a partir de la Fig. 11.92 puede escribirse:

$$\begin{aligned} Y(s) &= 4 \frac{(s+100)(s+200)}{[s+(100-j200)][s+(100+j200)]} = \\ &= 4 \frac{\left(1 + \frac{100}{s}\right) \left(1 + \frac{200}{s}\right)}{\left[1 + \frac{100-j200}{s}\right] \left[1 + \frac{100+j200}{s}\right]} \end{aligned}$$

Y llevando al límite, para $\omega \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$Y(\infty) = 4$$

ya que todos los polos son del mismo orden y crecen con igual velocidad.

$$\theta(\infty) = (\theta_I + \theta_J) - (\theta_K + \theta_L) = (90^\circ + 90^\circ) - (90^\circ + 90^\circ) = 0^\circ$$

11.11.5) Dado el circuito de la Fig. 11.94.a, se pide:

a) Hallar la expresión de la transmitancia de tensiones $H(s) = A_v(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \Big|_{CIN}$

y representar su configuración de polos y ceros.

b) En base a la información hallada en el punto a), hallar la expresión de la frecuencia de corte superior, definida como aquella para la cual se igualan las partes componentes real e imaginaria de $H(j\omega)$.

- c) Supuesto que $v_e(t) = u(t)$, hallar la expresión de la respuesta trasformada y representar su configuración de polos y ceros.
- d) En base a la información del punto c), hallar el tiempo de establecimiento de la respuesta temporal.
- e) Hallar el producto del tiempo de establecimiento por la frecuencia de corte superior.

Solución:

a) Para el circuito de la Fig. 11.94.a:

$$H(s) = \left. \frac{V_g(s)}{V_e(s)} \right|_{CIN} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

y llamando $\alpha = \frac{1}{RC}$ queda:

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \tag{11.162}$$

cuya configuración de polos y ceros se representa gráficamente en la Fig. 11.94.b.

b) Para régimen senoidal permanente, la Ec. (11.162) queda:

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = \frac{\alpha(\alpha - j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)} = \frac{\alpha^2 - j\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{11.163}$$

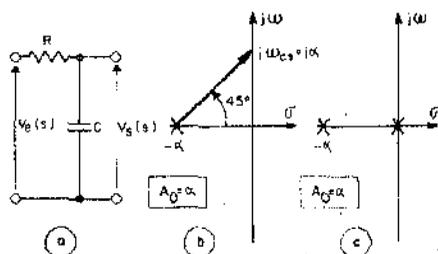


Fig. 11.94

La Ec. (11.163) muestra que las componentes real e imaginaria de $H(j\omega)$ se igualan, cuando $\omega_{cs} = \alpha$. Esto es, el fador dirigido del polo al eje $j\omega$

debe formar un ángulo de 45° , como se muestra en la Fig. 11.94.b. En consecuencia la frecuencia de corte será:

$$f_{cs} = \frac{\omega_{cs}}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (11.164)$$

c) Si $v_e(t) = u(t)$ resulta $V_e(s) = \frac{1}{s}$ y:

$$R(s) = V_s(s) = H(s) V_e(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \frac{1}{s} \quad (11.165)$$

cuya configuración de polos y ceros se muestra en la Fig. 11.94.c.

d) Calculando los residuos en los dos polos resulta:

$$K_1 = \alpha \frac{1}{\alpha e^{j0}} = 1$$

$$K_2 = \alpha \frac{1}{\alpha e^{j180^\circ}} = -1$$

y la respuesta temporal es:

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} = 1 e^{0t} u(t) - 1 e^{-\alpha t} u(t) = (1 - e^{-\alpha t}) u(t) \quad (11.166)$$

La Ec. (11.166) ya fue estudiada en el Cap. 4, y para ella resulta un tiempo de establecimiento:

$$T_e = 2,2 \quad z_c = 2,2 \frac{1}{\alpha} \quad (11.167)$$

e) Multiplicando las Ecs. (11.166) y (11.167) se obtiene:

$$T_e f_{cs} = \frac{2,2}{\alpha} \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2,2}{2\pi} = 0,35 \quad (11.168)$$

Importante expresión que muestra la relación existente entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. La Ec. (11.168) muestra que para que un circuito permita el establecimiento rápido de un pulso (T_e pequeño), se requiere que posea un ancho de banda grande (f_{cs} elevada).

11.12. Problemas propuestos

11.12.1) Dada la configuración de polos y ceros de la Fig. 11.95, correspondiente a la respuesta trasformada de un circuito, se pide:

- Hallar la expresión de $R(s)$.
- Determinar cualitativamente qué tipos de componentes poseerá la respuesta temporal $r(t)$.

Resultados:

$$a) \quad R(s) = A_0 \frac{(s+5)(s+15)^2}{s(s+10)[s+(5-j10)][s+(5+j10)]} \quad (11.169)$$

- Un escalón, una exponencial decreciente y una oscilación amortiguada.

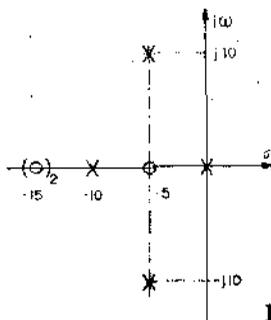


Fig. 11.95

11.12.2) Dada la configuración de polos y ceros de $R(s)$ de la Fig. 11.96, hallar la respuesta temporal por cálculo gráfico de residuos.

Resultado:

$$r(t) = [-0,24 e^{-6t} + 0,125 e^{-j16^\circ} e^{-(3-j4)t} + 0,125 e^{-j16^\circ} e^{-(3+j4)t}] u(t) \quad (11.170)$$

11.12.3) Dada la configuración de polos y ceros de $H(s)$ representada en la Fig. 11.97, dibujar en forma cualitativa la respuesta de frecuencia de amplitud.

Resultado:

Es el mostrado en la Fig. 11.98.

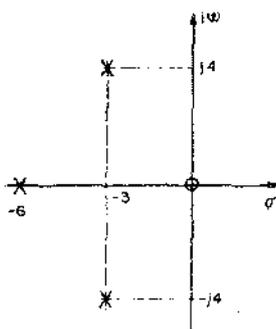


Fig. 11.96

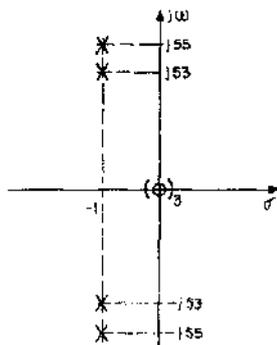


Fig. 11.97

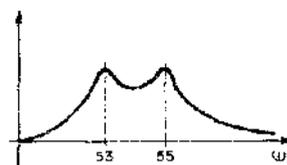


Fig. 11.98

11.12.4)

- a) Hallar la expresión de la admitancia de excitación $Y(s)$ del circuito de la Fig. 11.99, y representar su configuración de polos y ceros para los valores dados.

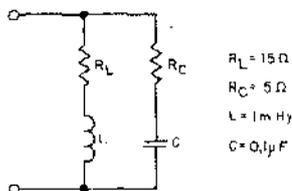


Fig. 11.99

- b) Determinar que ocurre en la configuración dibujada en a) cuando $R_L = R_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \Omega$, indicando como serían las respuestas de frecuencia de amplitud y fase en ese caso.

Resultados:

$$a) \quad Y(s) = \frac{1}{R_C} \frac{s^2 + s \frac{R_L + R_C}{L} + \frac{1}{LC}}{\left(s + \frac{R_L}{L}\right) \left(s + \frac{1}{R_C C}\right)} \quad (11.171)$$

y reemplazando los valores de la Fig. 11.99:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= 0,2 \frac{s^2 + 2 \cdot 10^4 s + 10^{10}}{(s + 1,5 \cdot 10^4)(s + 2 \cdot 10^6)} = \\
 &= 0,2 \frac{[s + (10^4 - j 9,95 \cdot 10^4)] [s + (10^4 + j 9,95 \cdot 10^4)]}{(s + 1,5 \cdot 10^4)(s + 2 \cdot 10^6)} \quad (11.172)
 \end{aligned}$$

En la Fig. 11.100 se ha representado la configuración de polos y ceros.

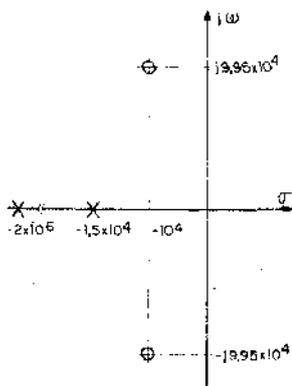


Fig. 11.100

b) Si $R_L = R_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$, todos los polos y los ceros se ubican en $s_c = -\sqrt{\frac{1}{LC}}$ y se cancelan entre sí. En efecto, reemplazando $R_L = R_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100 \Omega$, en la Ec. (11.171), queda:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= 0,2 \frac{s^2 + \frac{2}{\sqrt{LC}} s + \frac{1}{LC}}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \left(s + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} = \\
 &= 0,2 \frac{\left(s + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}{\left(s + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} = 0,2
 \end{aligned}$$

En estas condiciones las respuestas de amplitud y de fase son las de las Figs. 11.101 a y b. Esto es, el circuito se comporta como resistivo puro a todas las frecuencias.

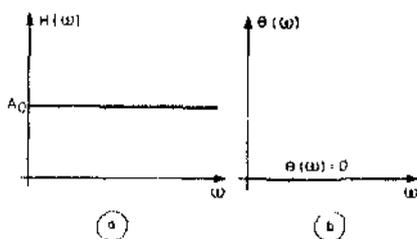


Fig. 11.101

Resonancia en circuitos simples

12.1) **Introducción:** Previo al desarrollo de este capítulo puede realizarse un resumen de lo expuesto al presente. La metodología empleada desde el Cap. 1 al 5 debe considerarse como una primera etapa, donde se estudió la solución de los problemas en el *dominio del tiempo*.

Puede considerarse una segunda etapa desde el Cap. 6 al 11, donde se resolvieron los mismos problemas, y aun más complicados, pero con *nuevas técnicas*.

Es propósito de esta tercera y última etapa que ahora comienza, *la aplicación de las técnicas* mencionadas anteriormente.

En este capítulo se estudiará la resonancia de circuitos simples. Pero, debe recordarse que en el Cap. 7, referido al régimen *senoidal permanente*, se dieron las ideas básicas sobre resonancia serie y paralelo. Además sobre este estado particular de ciertos circuitos eléctricos, ya se hizo también mención en problemas incluidos en el Cap. 8, sobre los lugares geométricos, y en el Cap. 9, referido al régimen *poliarmónico permanente*.

En el presente capítulo se profundizará el estudio sobre los circuitos resonantes, comenzando con un *análisis cuantitativo y cualitativo clásico* sobre la resonancia de un *circuito $R L C$ serie, excitado por un generador de tensión*.

Por aplicación del *principio de dualidad* se obtendrán las principales conclusiones sobre el *circuito resonante $R L C$ paralelo excitado por un generador de corriente*, que en realidad es el circuito resonante paralelo ideal. Luego se analizará brevemente la curva universal de resonancia.

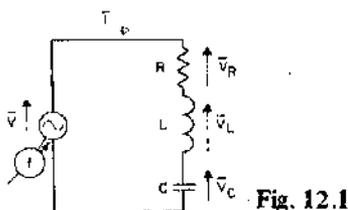
Posteriormente, se realizará un análisis similar al efectuado en el circuito serie, para un *circuito resonante paralelo de dos ramas excitado por un generador de tensión*, que corresponde al circuito resonante paralelo real. Esto es, surge de la conexión en paralelo de un inductor y un capacitor reales, que cuando se llevan al modelo circuital idealizado deben tenerse en cuenta sus respectivas resistencias

residuales o de pérdidas, que en el modelo circuitual se suponen conectados en serie con cada uno de los elementos reactivos.

Luego se darán las ideas básicas sobre circuitos con resonancia múltiple. Posteriormente, se realizará un análisis de la resonancia de un circuito serie en base a su *diagrama de polos y ceros*. Este análisis, realizado obviamente en el dominio transformado de Laplace, arriba a un método de gran capacidad operativa.

12.2) Resonancia en un circuito R L C serie

12.2.1) **Análisis cualitativo para pulsación variable. Representación de gráficos de todas las variables en función de la frecuencia:** Considerese el circuito R L C serie, ilustrado en la Fig. 12.1, en régimen senoidal permanente, excitado por un generador de tensión constante y frecuencia variable.



De acuerdo a las nociones básicas sobre resonancia expuestas en el Cap. 7, parágrafo 7.8) existen en dicho circuito tres variables que pueden llevar el circuito a resonancia. De todas ellas, en este análisis se elegirá a la frecuencia, pues interesa analizar el comportamiento del circuito como filtro. Se denominan filtros eléctricos aquellos circuitos que bloquean o atenúan señales de ciertas frecuencias, mientras que permiten sin dificultad el pasaje de señales de otras frecuencias.

A través de este análisis cualitativo se determinarán ciertos parámetros que luego conducirán a un análisis cuantitativo.

El propósito inmediato es trazar en forma cualitativa las siguientes curvas:

- a) R ; L ; C ; X_L ; X_C ; X ; Z y φ_Z
- b) I ; V ; V_R ; V_L ; V_C y V_{LC}
- c) P_S ; P y P_q

Nótese que tanto para las impedancias, corrientes, tensiones y potencias se representará la variación de su *módulo* en función de la pulsación ω .

En la Fig. 12.2 se representan las variables indicadas en la clasificación a); con la excepción de φ_Z que se grafica en la Fig. 12.3. Dichas representaciones se efectuaron teniendo en cuenta que:

$R = f_1(\omega)$: es constante en función de la frecuencia o pulsación, y cuya representación es una semirrecta horizontal.

Por razones idénticas:

$$L = cte = f_2(\omega)$$

$$C = cte = f_3(\omega)$$

Además,

$$X_L = \omega L = f_4(\omega); \text{ recta de pendiente } L \text{ que pasa por el origen.}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = f_5(\omega); \text{ hipérbola equilátera.}$$

$X = X_L - X_C$; por lo cual para realizar cómodamente su gráfico conviene trazar $-X_C$

$X = f_6(\omega)$; en la cual si;

$$\omega \rightarrow 0; X_C \gg X_L \therefore X \rightarrow -X_C$$

$$\omega = \omega_0; X_L = X_C \therefore X = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; X_L \gg X_C \therefore X \rightarrow X_L$$

Sobre el mismo gráfico se ha dibujado también el módulo de la reactancia $|X|$. Además como la impedancia del circuito es:

$$\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX$$

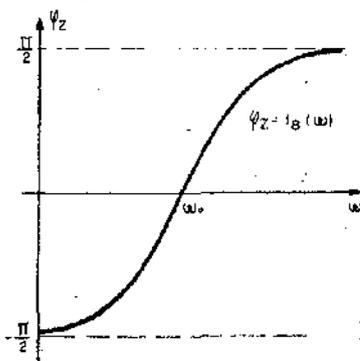


Fig. 12.2

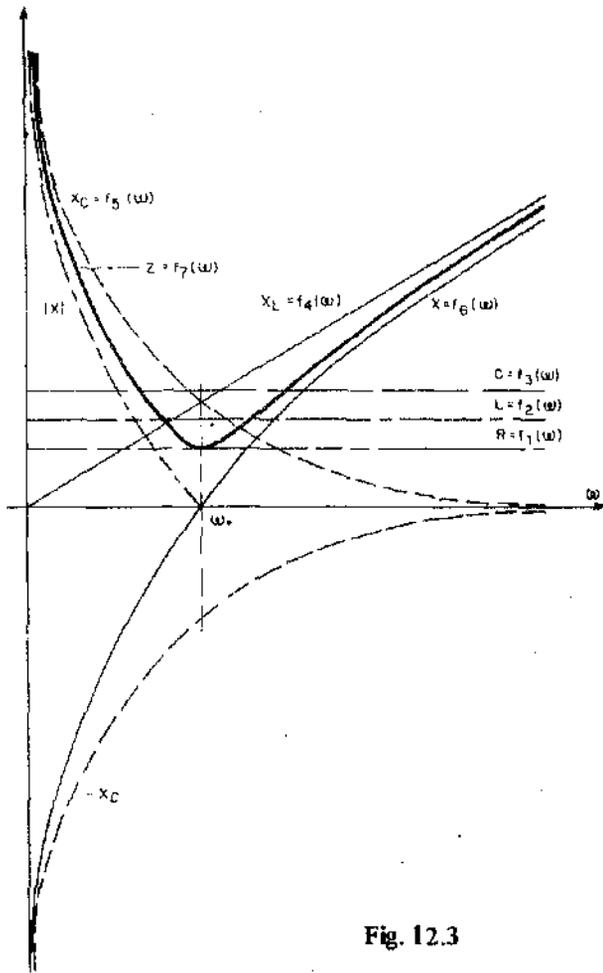


Fig. 12.3

puede expresarse en módulo y fase como:

$$\bar{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \text{arc tg} \frac{X}{R}$$

en consecuencia:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = f_7(\omega); \text{ en la cual si,}$$

$$\omega \rightarrow 0; |X| \gg R \therefore Z \rightarrow |X|$$

$$\omega = \omega_0; |X| = 0 \therefore Z = R$$

$$\omega \rightarrow \infty; |X| \gg R \therefore Z \rightarrow |X|$$

$$\varphi_Z = \text{arc tg } \frac{X}{R} = f_8(\omega); \text{ para la misma si,}$$

$$\omega \rightarrow 0; X \rightarrow -\infty \therefore \varphi_Z \rightarrow -\pi/2$$

$$\omega = \omega_0; X = 0 \therefore \varphi_Z = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; X \rightarrow \infty \therefore \varphi_Z \rightarrow \pi/2$$

En la Fig. 12.4 se representa la corriente indicada en la clasificación b). La misma resulta $I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$; y dado que el módulo de la tensión aplicada al circuito es constante en función de la frecuencia, se advierte que la representación gráfica de la corriente será inversa a la de la impedancia. Esto puede verificarse haciendo:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f_9(\omega); \text{ en la misma si,}$$

$$\omega \rightarrow 0; Z \rightarrow \infty \therefore I \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; Z = R \therefore I = \frac{V}{R}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Z \rightarrow \infty \therefore I \rightarrow 0$$

En la Fig. 12.5 se representan las tensiones indicadas en la clasificación b). Dichas representaciones se efectuaron teniendo en cuenta que:

$$V = \text{cte} = f_{10}(\omega)$$

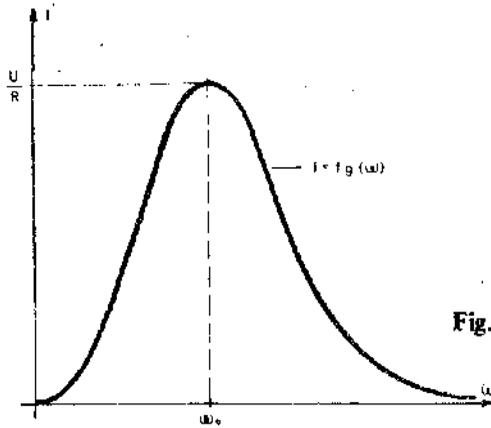


Fig. 12.4

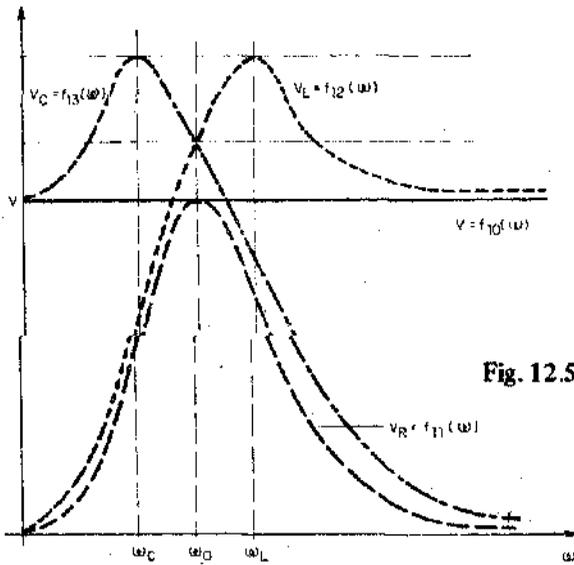


Fig. 12.5

$V_R = R I = f_{11}(\omega)$; dado que R es constante, la curva de V_R será formalmente igual a la de I . Además, puede verificarse haciendo:

$$\omega \rightarrow 0; I \rightarrow 0 \therefore V_R \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; I = \frac{V}{R} \therefore V_R = V$$

$$\omega \rightarrow \infty; I \rightarrow 0 \therefore V_R \rightarrow 0$$

$V_L = \omega L I = f_{12}(\omega)$, que puede representarse como se indica en la Fig. 12.6 pensada como la resultante del producto de una función que crece linealmente, ωL , y otra que posee la forma de f . Como resultado del producto se encuentra que el máximo de tensión en el inductor se halla desplazado hacia la derecha respecto al de la corriente, y se da para una pulsación que se indica como ω_L . Además si:

$$\omega \rightarrow 0; I \rightarrow 0 \therefore V_L \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; I \rightarrow 0 \therefore V_L \rightarrow \text{indeterminado,}$$

esta indeterminación puede salvarse, pensando que para $\omega \rightarrow \infty$; la reactancia del capacitor es despreciable; y como $X_L \gg R$; toda la tensión cae prácticamente sobre el inductor; en consecuencia,

$$\omega \rightarrow \infty; V_L \rightarrow V$$

como se ilustra en la Fig. 12.5.

$V_C = \frac{1}{\omega C} I = f_{13}(\omega)$ puede representarse de acuerdo con la Fig. 12.7, como

la resultante del producto de la curva de X_C y la de I . Como consecuencia de ello el máximo de tensión sobre el capacitor se encuentra desplazado hacia la izquierda respecto al de la corriente, y se dará para una pulsación que se indica como ω_C .

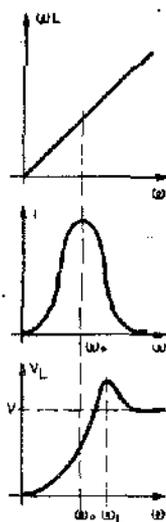


Fig. 12.6

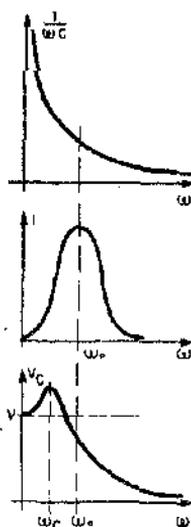


Fig. 12.7

Además si $\omega \rightarrow 0$; $I \rightarrow 0 \therefore V_C \rightarrow$ Indeterminado que puede salvarse pensando que si $\omega \rightarrow 0$; $X_L \rightarrow 0$; y como $X_C \gg R$, toda la tensión del generador está aplicada sobre el capacitor, por lo cual:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0; V_C &\rightarrow V \\ \omega \rightarrow \infty; I \rightarrow 0 \therefore V_C &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

tal como se muestra en la Fig. 12.5

Además, según lo expuesto en el párrafo 7.8, en resonancia $\omega = \omega_0$; $X_L = X_C \therefore V_L = V_C$, es decir que las curvas de V_L y V_C deben interceptarse sobre ω_0 .

Naturalmente, que el punto de intersección elegido en la Fig. 12.5 ha sido arbitrario, como así también los valores máximos de tensión sobre ambos elementos reactivos. Luego, el análisis cuantitativo dará la información necesaria.

Además, si se considera la tensión en el conjunto inductor-capacitor se tiene:

$$V_{LC} = f_{14}(\omega) \text{ y en la misma,}$$

$$\omega \rightarrow 0; V_L \rightarrow 0 \therefore V_{LC} \rightarrow V$$

$$\omega \rightarrow \infty; V_C \rightarrow 0 \therefore V_{LC} \rightarrow V$$

Si $\omega = \omega_0$, las tensiones en el inductor y capacitor, según se expresó en el párrafo 7.8) son iguales y opuestas en fase, por lo cual se anulan; al igual que su módulo; por lo cual $\omega = \omega_0$; $V_{LC} = 0$ y dicha función se grafica en la Fig. 12.8.

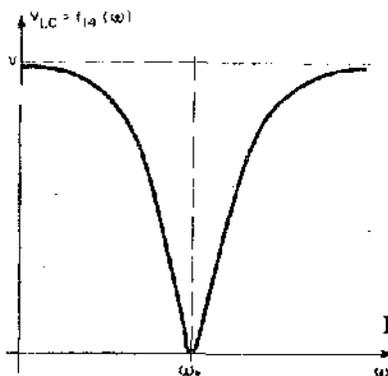


Fig. 12.8

De la observación de los gráficos se concluye que el circuito en estudio, para la frecuencia de resonancia, se presente con impedancia mínima y resistiva pura; factor de potencia unitario y corriente máxima.

En la Fig. 12.9 se grafican las potencias indicadas en la clasificación c). Las mismas se dibujaron teniendo en cuenta que:

$$P_s = V I = f_{15}(\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0; I \rightarrow 0 \therefore P_s \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; I = \frac{V}{R} \therefore P_s = \frac{V^2}{R} = P_{s0}$$

$$\omega \rightarrow \infty; I \rightarrow 0 \therefore P_s \rightarrow 0$$

$$P = V I \cos \varphi_Z$$

$$P = P_s \cos \varphi_Z = f_{16}(\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0; \varphi_Z \rightarrow -\pi/2; P_s \rightarrow 0 \therefore P \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; \varphi_Z = 0; P_s = \frac{V^2}{R} \therefore P = \frac{V^2}{R} = P_{s0}$$

$$\omega \rightarrow \infty; \varphi_Z \rightarrow \pi/2; P_s \rightarrow 0 \therefore P \rightarrow 0$$

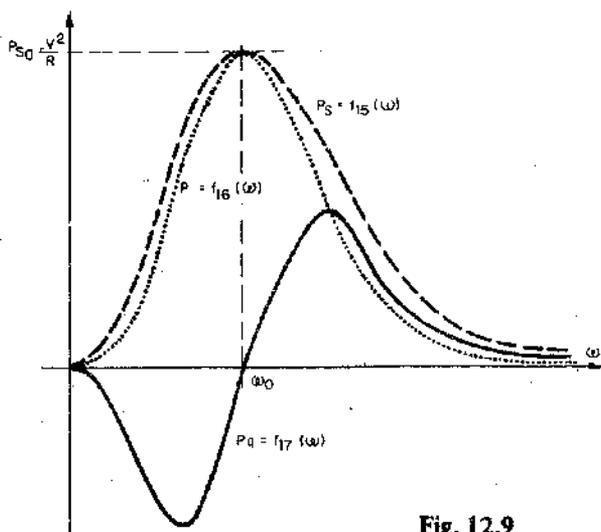


Fig. 12.9

y dado que $0 \leq \cos \varphi_Z \leq 1$, excepto en los puntos indicados la curva de la potencia activa se encontrará por debajo de la de potencia aparente.

Por otra parte,

$$P_q = V I \operatorname{sen} \varphi_Z$$

$$P_q = P_s \operatorname{sen} \varphi_Z = f_{17}(\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0; \varphi_Z \rightarrow -\pi/2; P_s \rightarrow 0 \therefore P_q \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; \varphi_Z \rightarrow 0; P_s = \frac{V^2}{R} \therefore P_q = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; \varphi_Z \rightarrow \pi/2; P_s \rightarrow 0 \therefore P_q = 0$$

dado que la curva de P_q pasa por tres ceros, poseerá en principio dos puntos extremales. Si $\omega < \omega_0$, el circuito se comportará capacitivamente y P_q resultará negativa. Si $\omega > \omega_0$, el circuito se comportará inductivamente y P_q será positiva. Naturalmente que las amplitudes del máximo y del mínimo se eligieron arbitrariamente, al igual que las pulsaciones para las que se producen. El análisis cuantitativo determinará dichos valores.

12.2.2) **Factor de selectividad. Introducción por inducción.** Definición: En la Fig. 12.10 se presentan una serie de circuitos excitados por un generador de tensión senoidal y frecuencia variable, y la representación gráfica del módulo de la tensión de salida en función de la pulsación.

Se observa que los circuitos indicados en a), b) y c) *no son selectivos en función de la frecuencia*, es decir que no discriminan entre señales de distinta frecuencia, permitiendo el paso a todas con igual facilidad, resultando una respuesta de amplitud constante. A este primer grupo de tres circuitos se le asigna el nombre de *circuitos pasatodo*.

Por otra parte, los circuitos del grupo restante tienen en común, desde el punto de vista de su comportamiento, el hecho de discriminar señales de distinta frecuencia, permitiendo que pasen más fácilmente algunas que otras, es decir que *son selectivos respecto de la frecuencia*. Así el circuito indicado en d) se comporta como un *filtro pasabajos*; el e) como un *filtro pasaaltos*; el f) como un *filtro pasabanda* y el g) como un *filtro supresor de banda*.

Desde el punto de vista circuital la característica común de los modelos del último grupo es la *presencia de intercambios energéticos de distinto carácter*. Contrariamente, en el primer grupo de circuitos, la característica común es la presencia de un solo tipo de intercambio energético. Analizando una gran cantidad de casos, en forma detallada, se encuentra que cuanto mayor es la relación entre la energía reactiva y la activa más selectivo es el circuito. Todo esto induce a definir

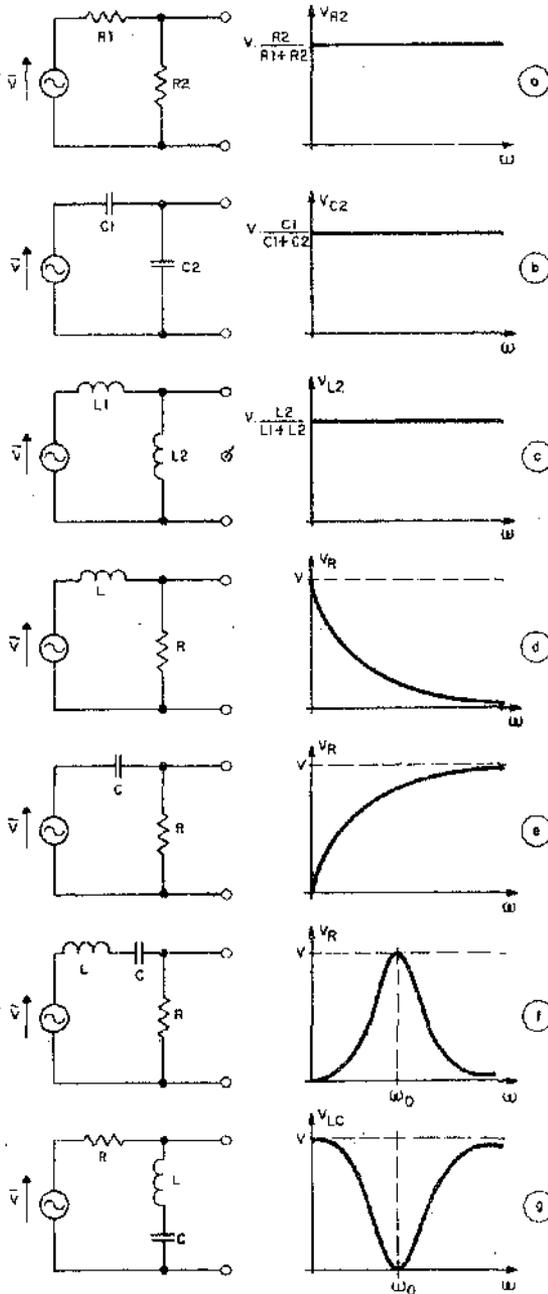


Fig. 12.10

para los *circuitos resonantes* una cifra de mérito llamada *factor de selectividad* como el cociente entre la potencia reactiva de un signo y la activa calculadas a la frecuencia de resonancia, y se lo indica como Q_0 . En consecuencia:

$$Q_0 = \frac{P_{qL_0}}{P_0} = \frac{|P_{qC_0}|}{P_0} \quad (12.1)$$

Obsérvese que en la Ec. (12.1), existen dos posibilidades de cálculo, ya que puede considerarse o bien a la potencia reactiva inductiva o a la capacitiva, esta última en módulo, dado que por definición Q_0 es un número real positivo.

12.2.3) **Diferencias entre el factor de mérito y el de selectividad:** Debido a que en la práctica, a veces puede confundirse al factor de mérito Q con el factor de selectividad Q_0 , es conveniente resaltar sus diferencias.

El *factor de mérito* mide cuánto se aproxima un *elemento* de circuito reactivo real al ideal correspondiente. El *factor de selectividad* mide la mayor o menor capacidad de un *circuito resonante* para discriminar señales de ciertas frecuencias frente a las restantes.

Por otra parte, el *factor de mérito* es *variable con la frecuencia*, según se expresó en el Cap. 7, parágrafo 7.16), pues para ciertas frecuencias el elemento reactivo real se aproxima más o menos al ideal correspondiente. Contrariamente, el *factor de selectividad* tiene un valor constante para un dado circuito *independiente de la frecuencia* a que opera el mismo, pues su valor caracteriza la propiedad global del circuito para seleccionar señales de distinta frecuencia.

Puede darse un ejemplo para poner en evidencia la causa por la cual a veces en la práctica estos factores pueden confundirse. Es de práctica normal formar un circuito resonante paralelo conectando en esa disposición un inductor real y un capacitor real.

En la Fig. 12.11 se ha construido el modelo circuital idealizado, donde a dichos elementos reactivos reales se los ha reemplazado por sus equivalentes ideales, y sus

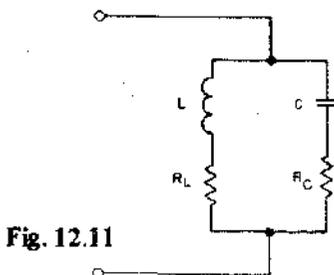


Fig. 12.11

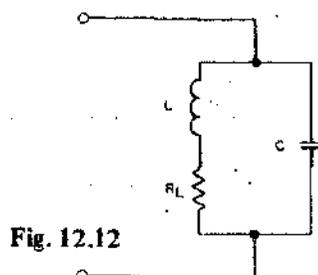


Fig. 12.12

resistencias parásitas o de pérdidas conectadas en serie. Pero como en general la resistencia de pérdidas R_C del capacitor es despreciable frente a la del inductor R_L , la misma podrá eliminarse, y llegar al modelo circuital ilustrado en la Fig. 12.12. De acuerdo a la definición del Q dada por la Ec. (7.16) y del Q_0 dada por la Ec. (12.1), es evidente que para este circuito el *factor de mérito del inductor real* calculado a la frecuencia de resonancia del circuito tiene el mismo valor numérico que el *factor de selectividad del circuito*.

12.2.4) **Distintas expresiones del factor de selectividad para el circuito R L C serie:** Aplicando la Ec. (12.1) al circuito de la Fig. 12.1, resultan las siguientes expresiones:

$$Q_0 = \frac{P_{qL_0}}{P_0} = \frac{I_0^2 X_{L_0}}{I_0^2 R} = \frac{I_0^2 \omega_0 L}{I_0^2 R} \quad \therefore \quad (12.2)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (12.3)$$

$$Q_0 = \frac{|P_{qC_0}|}{P_0} = \frac{I_0^2 X_{C_0}}{I_0^2 R} = \frac{I_0^2 \frac{1}{\omega_0 C}}{I_0^2 R} \quad \therefore \quad (12.4)$$

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (12.5)$$

Por otra parte, la Ec. (12.2) puede reescribirse como:

$$Q_0 = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{V_{L_0}}{V_{R_0}} \quad \therefore$$

$$Q_0 = \frac{V_{L_0}}{V} \quad (12.6)$$

De manera similar, de la Ec. (12.4):

$$Q_0 = \frac{I_0 \frac{1}{\omega_0 C}}{I_0 R} = \frac{V_{C_0}}{V_{R_0}} \quad \therefore$$

$$Q_0 = \frac{V_{C_0}}{V} \quad (12.7)$$

Además, operando con la Ec. (12.3)

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R}$$

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12.8)$$

y en el próximo párrafo se demostrará que:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (12.9)$$

y se encontrará también que $\Delta \omega$ es el llamado ancho de banda.

En consecuencia, el factor de selectividad puede calcularse en base a seis expresiones que son las Ecs. (12.3; 12.5; 12.6; 12.7; 12.8 y 12.9). Obsérvese que su valor queda expresado en función de los parámetros R, L, C y ω_0 .

Por otra parte, de las Ecs. (12.6 y 12.7) surge que:

$$V_{L_0} = Q_0 V \quad (12.10)$$

$$V_{C_0} = Q_0 V \quad (12.11)$$

es decir que en resonancia la caída de tensión en los elementos reactivos es Q_0 veces la tensión provista por el generador. Debido a esto es que normalmente a la resonancia serie se la denomina también *resonancia de tensiones*.

Además, como generalmente $Q_0 > 1$, por lo cual $V_L = V_C > V$; al Q_0 se lo llama también *coeficiente de sobretensión*.

Es evidente, que de acuerdo con lo anterior, las curvas ilustradas en la Fig. 12.5 corresponden para $Q_0 > 1$.

12.2.5) Análisis cuantitativo para pulsación variable. Estudio de las curvas de I, V_C, V_L, P_S, P y P_Q : Se estudiarán las variables indicadas, ya que del análisis cualitativo se desprende que son las más importantes.

a) Curva de I

a. 1) Consideraciones sobre la forma de la curva

En el párrafo 12.2.1) se trazó en forma cualitativa la curva de la corriente, que se reproduce en la Fig. 12.13. Obsérvese que en la misma se tendrá igual

valor de corriente para dos valores distintos de pulsación, y de las infinitas posibilidades existentes se han elegido ω_1 y ω_2 .

Como para el circuito analizado, el módulo de la corriente resulta:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

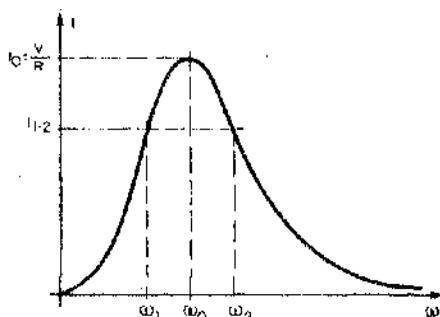


Fig. 12.13

Es evidente que ω_1 y ω_2 surgen del hecho que hay dos valores de pulsación para los cuales la expresión $|X_L - X_C|$ tiene un único valor que corresponderá a $X_L > X_C$ y a $X_C > X_L$ respectivamente.

Para encontrar qué tipo de simetría tiene la curva deben relacionarse ω_0 , ω_1 y ω_2 . Dado que existen dos valores de pulsación para que $|X| = cte$ deberá cumplirse que por encima de resonancia:

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = cte \quad (12.12)$$

y por debajo de resonancia:

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = cte \quad (12.13)$$

igualando las Ecs. (12.12 y 12.13),

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L$$

operando resulta, $L(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right)$ por lo cual:

$$L(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{C} \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{(\omega_1 \omega_2)} \quad \therefore \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{L C} \quad (12.14)$$

De acuerdo a lo expuesto en el Cap. 7, párrafo 7.8, es $\frac{1}{L C} = \omega_0^2$ por lo que la Ec. (12.14) queda:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (12.15)$$

La Ec. (12.15) indica que la curva representativa de la corriente es *geométricamente simétrica respecto de la pulsación de resonancia*.

Por otra parte si ω_1 y ω_2 son cercanas a ω_0 , la media geométrica se convierte en la *media aritmética*, resultando que:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (12.16)$$

Es de hacer notar que como generalmente la zona de interés de las curvas es la cercana a la frecuencia de resonancia, es innecesario representar las mismas en una escala de frecuencias desde cero al infinito. Puede utilizarse en principio una escala que tome solamente una parte del rango total de frecuencias a cada lado de la de resonancia.

Pero cabe considerar que, cuando se trata con funciones variables con la frecuencia, se toma *escala logarítmica* para la frecuencia lo que permite trabajar en un rango muy amplio, y presenta además una ventaja adicional. Como indica la Ec. (12.15) la curva presenta simetría geométrica, por lo cual al representarse gráficamente en función de una *escala logarítmica* resultará simétrica respecto del eje vertical que pasa por el máximo.

En cambio, representada en *escala lineal* para una amplia gama de frecuencias resultará asimétrica. A veces, también a efectos de representar una amplia gama de valores para el eje de ordenadas, se utiliza para ello una escala logarítmica, lo que no afecta la simetría de la curva respecto del eje horizontal.

a.2) Ancho de banda. Relación con el factor de selectividad

De todos los valores de pulsación que satisfacen la relación dada por la Ec. (12.15) existe un par de valores que adquiere especial significación para el análisis

de las propiedades del circuito. El par de mencionados valores son aquellas pulsaciones para las cuales:

$$|X| = R = cte \quad (12.17)$$

por la Ec. (12.17), por encima de resonancia será:

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \quad (12.18)$$

y por debajo de resonancia:

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \quad (12.19)$$

sumando miembro a miembro las Ecs. (12.18 y 12.19)

$$L(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) = 2R \text{ por lo cual}$$

$$L(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{C} \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2} \right) = 2R \quad (12.20)$$

En la Ec. (12.20) se designa $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ y de la Ec. (12.15) resulta $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ por lo cual reemplazando y operando resulta:

$$L \Delta\omega + \frac{1}{\omega_0^2 C} \Delta\omega = 2R \quad (12.21)$$

como en resonancia $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \therefore$

$$\frac{1}{\omega_0^2 C} = L \quad (12.22)$$

reemplazando la Ec. (12.22) en la Ec. (12.21):

$$L \Delta\omega + L \Delta\omega = 2R \therefore$$

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\Delta\omega} \quad (12.23)$$

y como interesa relacionar el mencionado par de pulsaciones con el factor de selectividad Q_0 , de una de las posibles expresiones del mismo, la Ec. (12.3), resulta que:

$$\frac{L}{R} = \frac{Q_0}{\omega_0} \quad (12.24)$$

reemplazando la Ec. (12.24) en la Ec. (12.13) y operando surge:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (12.25)$$

que naturalmente coincide con la Ec. (12.9) no demostrada en esa oportunidad.

La Ec. (12.25) indica que el *factor de selectividad resulta el cociente entre la pulsación de resonancia y la diferencia entre las pulsaciones para las cuales el módulo de la reactancia total del circuito se hace igual a la resistencia del mismo.*

Con el objeto de caracterizar en forma más práctica la condición $|X| = R$, si en la expresión del módulo de la corriente:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

se reemplaza dicha condición, resultando:

$$I \Big|_{|X|=R} = \frac{V}{\sqrt{2 R^2}} \quad \therefore$$

$$I \Big|_{|X|=R} = 0,707 \frac{V}{R} = 0,707 I_0 \quad (12.26)$$

por lo cual $\Delta \omega$ puede interpretarse como la diferencia entre las pulsaciones para las cuales la corriente se reduce a 0,707 * de su valor de resonancia, o sea de su máximo valor. En consecuencia disponiendo de la curva de la corriente, el mencionado $\Delta \omega$ puede determinarse como se ilustra en la Fig. 12.14.

Pero como se mencionó en el párrafo 12.2.2) la curva en análisis corresponde a la característica de un filtro pasabanda real. En la Fig. 12.15 se han graficado las características de un filtro pasabanda ideal y uno real. Se entiende por filtro ideal a aquél que no produce atenuación en la banda pasante y atenúa completamente

* Esta disminución de la corriente corresponde a una caída de 3 decibeles.

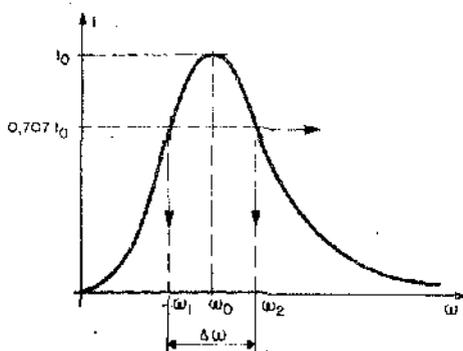


Fig. 12.14

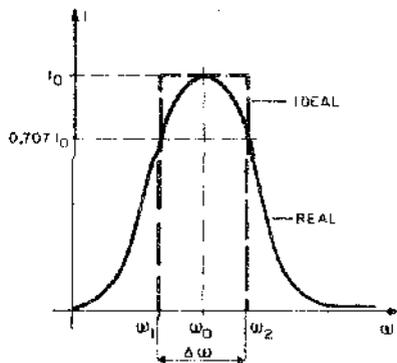


Fig. 12.15

la no pasante. De la comparación de las dos respuestas se observa que el llamado *ancho de banda* del filtro ideal está claramente definido, no ocurriendo lo mismo con el de un filtro real, cuyo ancho de banda debe ser fijado por convención.

Por ser la condición $|X| = R$ fácil de aplicar y contener significado tecnológico como se verá más adelante, se fija por convención el *ancho de banda de un filtro real como la diferencia entre las pulsaciones para las cuales la respuesta se reduce al 70,7 por ciento de su valor máximo.*

En base a lo antedicho, y teniendo en cuenta la Ec. (12.25), es evidente que cuanto más selectivo sea un circuito, menor será su ancho de banda.

a.3) Influencia del valor de Q_0 sobre el aspecto de las curvas

De acuerdo a lo expuesto anteriormente se deduce que fijada la pulsación de resonancia, es evidente que el aspecto de la curva de corriente dependerá del valor de los elementos pasivos del circuito.

Se ensayarán a continuación algunas de las posibilidades que se pueden dar para el circuito resonante serie. Por ejemplo, para tres juegos de valores con el objeto de observar la respuesta del mismo. Con el objeto de realizar el análisis, deben recordarse las expresiones de:

$$I_0 = \frac{V}{R} \quad (12.27)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad y \quad (12.28)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (12.29)$$

Las posibilidades a analizar son:

$$a.3.1) \quad \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03}$$

$$R_1 > R_2 > R_3$$

$$L_1 = L_2 = L_3$$

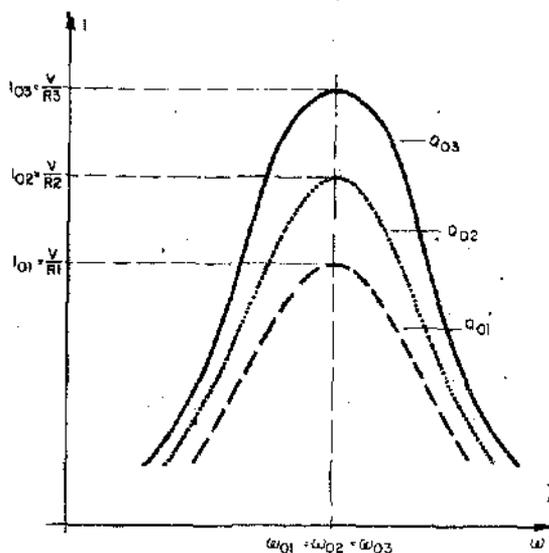
En virtud de las Ecs. (12.27; 12.28 y 12.29) resulta que:

$$C_1 = C_2 = C_3$$

$$Q_{01} < Q_{02} < Q_{03}$$

$$I_{01} < I_{02} < I_{03}$$

En la Fig. 12.16 se comienza trazando la curva para el Q_{03} que se toma como referencia. La curva correspondiente a Q_{02} será de menor amplitud y comparativamente más ancha debido al aumento de resistencia. La correspondiente a Q_{01} se traza con el mismo criterio. Las distintas curvas no podrán intersectarse pues al ser L y C constantes y al cumplirse que $R_1 > R_2 > R_3$ siempre resultará que $I_1 < I_2 < I_3$.



Nótese que al disminuir la resistencia aumenta la selectividad.

$$a.3.2) \quad \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03}$$

$$R_1 = R_2 = R_3$$

$$L_1 < L_2 < L_3$$

Introduciendo estas condiciones en las Ecs. (12.27; 12.28 y 12.29) surge que:

$$C_1 > C_2 > C_3$$

$$Q_{01} < Q_{02} < Q_{03}$$

$$I_{01} = I_{02} = I_{03}$$

En la Fig. 12.17 se grafican las curvas correspondientes, teniendo en cuenta que todas tendrán el mismo valor máximo, y que a medida que aumenta el factor de selectividad las mismas se hacen comparativamente más angostas.

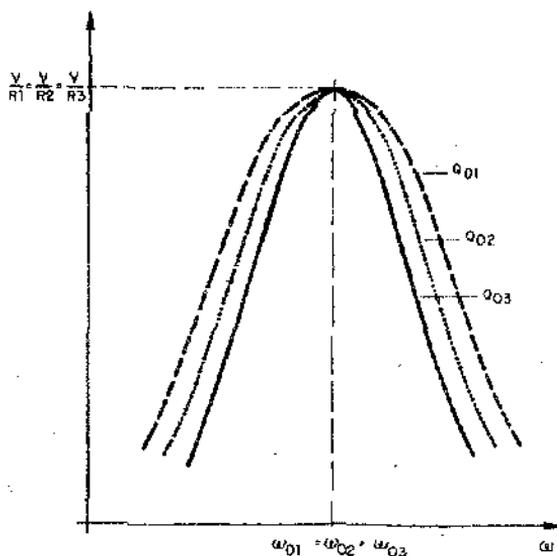


Fig. 12.17

Obsérvese que al incrementarse la inductancia aumenta la selectividad.

a.3.3)

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03}$$

$$R_1 > R_2 > R_3$$

$$L_1 < L_2 < L_3$$

Relacionando estas condiciones con las Ecs. (12.27; 12.28 y 12.29) resulta:

$$C_1 > C_2 > C_3$$

$$Q_{01} < Q_{02} < Q_{03}$$

$$I_{01} < I_{02} < I_{03}$$

En la Fig. 12.18 se trazan las curvas correspondientes considerando que a medida que aumentan en valor máximo deben ser comparativamente más angostas dado que aumenta el factor de selectividad.

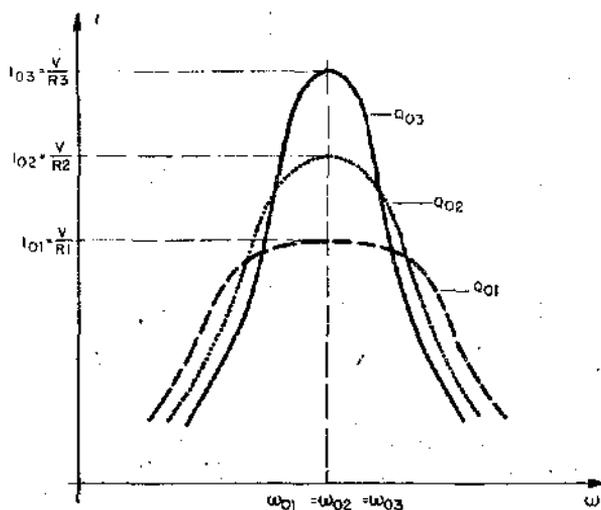


Fig. 12.18.

Es evidente, que al disminuir la resistencia e incrementarse la inductancia aumenta la selectividad.

De los tres ejemplos dados se observa que, al modificarse el valor de los elementos reactivos sin alterar el resistivo, se varía el ancho de banda sin alterar el valor máximo de las curvas. Pero cuando se varía el elemento resistivo además del ancho de banda se modifican los valores máximos de las curvas.

b) Curva de V_C

En el análisis cualitativo realizado en el párrafo 12.2.1) se trazó la curva de V_C que se reproduce en la Fig. 12.19, acompañada de la de V_R a efectos meramente comparativos.

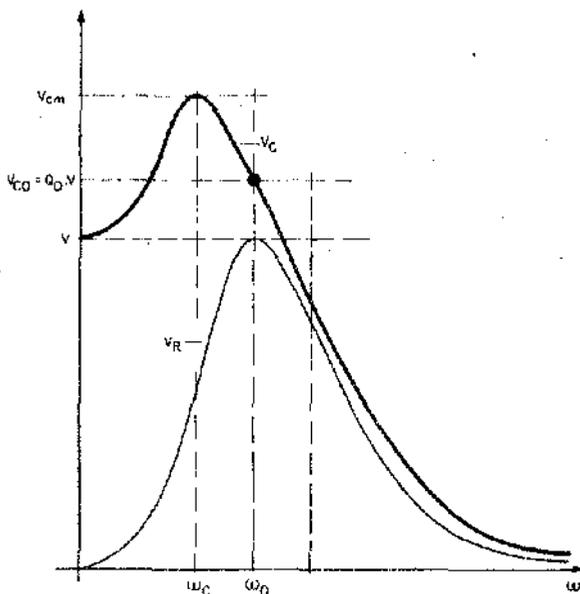


Fig. 12.19

El objeto es encontrar las expresiones de la pulsación para la cual se produce el máximo de tensión sobre el capacitor, y de dicha tensión máxima.

El módulo de la tensión sobre el capacitor es:

$$V_C = X_C I = \frac{1}{\omega C} \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{operando}$$

$$V_C = \frac{V}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 L C - 1)^2}} \quad \text{como } L C = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$V_C = \frac{V}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}} \quad (12.30)$$

El máximo de V_C se dará cuando en la Ec. (12.30) la cantidad sub-radical sea mínima, para lo cual se reemplaza $\omega = \omega_C$ y se efectúa:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\omega_C^2 C^2 R^2 + \left(\frac{\omega_C^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 \right] = 0 \quad \therefore$$

$$2\omega_C C^2 R^2 + 2 \left(\frac{\omega_C^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \frac{2\omega_C}{\omega_0^2} = 0 \quad \text{por lo cual,}$$

$$C^2 R^2 + \frac{2\omega_C^2}{\omega_0^4} - \frac{2}{\omega_0^2} = 0 \quad \therefore$$

$$\omega_C^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^4 R^2 C^2}{2} \quad \text{en consecuencia:}$$

$$\omega_C^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2 R^2 C^2}{2} \right)$$

pero de la Ec. (12.5) es $\omega_0^2 R^2 C^2 = \frac{1}{Q_0^2}$ por lo tanto:

$$\omega_C^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right)$$

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} \quad (12.31)$$

La Ec. (12.31) da la pulsación correspondiente al máximo de tensión sobre el capacitor. Si ahora en la Ec. (12.30) se reemplaza ω por la expresión de ω_C

hallada recientemente se encuentra el máximo de tensión sobre el capacitor, a saber:

$$V_{Cm} = \frac{V}{\sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right) C^2 R^2 + \left[\frac{\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right)}{\omega_0^2} - 1\right]^2}}$$

y por la Ec. (12.5) resulta, operando:

$$V_{Cm} = \frac{V}{\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right) + \left(\frac{1}{2Q_0^2}\right)^2}} \text{ por lo cual}$$

$$V_{Cm} = Q_0 \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} \quad (12.32)$$

La Ec. (12.32) da el módulo de la máxima tensión sobre el capacitor.

De las Ecs. (12.31 y 12.32) se observa que tanto ω_C como V_{Cm} dependen del factor de selectividad del circuito. Se tomarán, por lo tanto, algunos valores límites para el Q_0 con el objeto de observar el aspecto de las curvas de V_C . En atención a las ecuaciones mencionadas, surge que si $Q_0 \rightarrow \infty$; $\omega_C \rightarrow \omega_0$ y $V_{Cm} \rightarrow \infty$, es decir que el máximo infinito para V_C se da para la frecuencia de resonancia ω_0 .

Naturalmente que esto sucede en un circuito resonante ideal sin resistencia. En la Fig. 12.20.a) se ilustra la situación mencionada.

Nótese que no son necesarios valores de Q_0 muy elevados para que $\omega_C = \omega_0$. Si por ejemplo $Q_0 = 7,07$; $\omega_C = \omega_0$ y $V_{Cm} = 7,07 V$, con un error menor del 1 por ciento, el máximo para V_C se da para ω_0 tal como se grafica en la Fig. 12.20.b). Obsérvese que se verifica que para ω_0 es $V_{C0} = V_{Cm} = Q_0 V$.

Si por otra parte $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\omega_C = 0$ y $V_{Cm} = V$ y en este caso el máximo para V_C se da para frecuencia nula, como se ilustra en la Fig. 12.20.c).

Finalmente, si $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\omega_C = \text{Imaginaria}$ y la Ec. (12.32) no puede aplicarse dado que no existirá un máximo para V_C , es decir que para $\omega = 0$ no existirá una tangente horizontal a la curva de V_C como en el caso anterior, dicha situación se muestra en la Fig. 12.20.d).

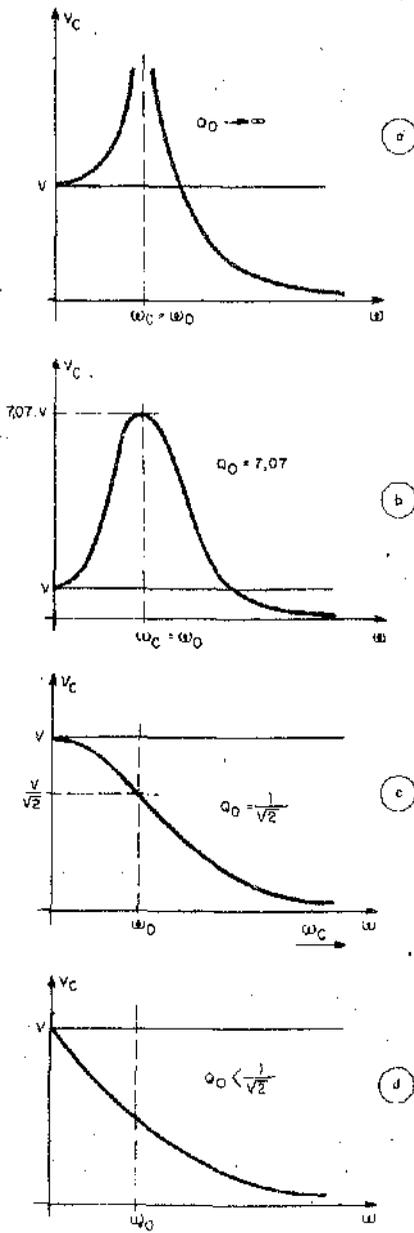


Fig. 12.20

c) Curva de V_L

El análisis a realizar es similar al desarrollado para la curva de V_C . En la Fig. 12.21 se grafica la curva de V_L , acompañada de la de V_R a efectos comparativos.

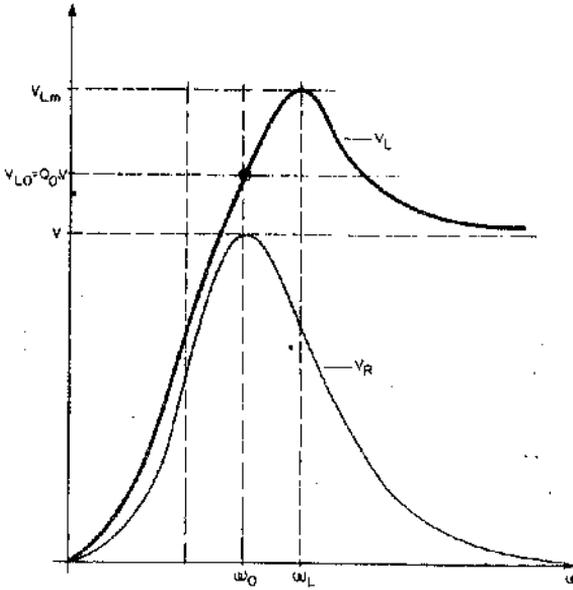


Fig. 12.21

El módulo de la tensión sobre el inductor resulta:

$$V_L = X_L I = \omega L \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{operando,}$$

$$V_L = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}} \quad \text{como } \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$V_L = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}} \quad (12.33)$$

El máximo de V_L se dará cuando en la Ec. (12.33) la cantidad sub-radical sea mínima, para la cual se reemplaza ω por ω_L y se efectúa:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{R^2}{\omega_L^2 L^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right)^2 \right] = 0$$

$$- \frac{2}{\omega_L^3} \frac{R^2}{L^2} + 2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_L^2} \right) \frac{2\omega_0^2}{\omega_L^3} = 0 \text{ por lo cual,}$$

$$\frac{R^2}{L^2} - 2\omega_0^2 + \frac{2\omega_0^4}{\omega_L^2} = 0 \therefore$$

$$\omega_L^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{R^2}{2\omega_0^2 L^2}}$$

pero de la Ec. (12.3) es: $\frac{R^2}{\omega_0^2 L^2} = \frac{1}{Q_0^2}$ por lo tanto,

$$\omega_L^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} \therefore$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}} \quad (12.34)$$

La Ec. (12.34) da la pulsación correspondiente al máximo de tensión sobre el inductor. De la comparación de las Ecs. (12.31) y 12.34) se desprende que ω_C y ω_L son geométricamente simétricas respecto de la pulsación de resonancia.

Si ahora en la Ec. (12.33) se reemplaza ω por la expresión de ω_L hallada recientemente, se encuentra el máximo de tensión sobre el inductor, a saber:

$$V_{Lm} = \frac{V}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega_0^2 L^2} \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right) + \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right) \right]^2}}$$

teniendo en cuenta la Ec. (12.3) y operando resulta finalmente que:

$$V_{Lm} = Q_0 \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 Q_0^2}}} \quad (12.35)$$

La Ec. (12.35) da el módulo de la máxima tensión sobre el inductor. De la comparación de las Ecs. (12.32) y (12.35) se desprende que $V_{Cm} = V_{Lm}$.

Por otra parte, de las Ecs. (12.34) y (12.35), se desprende que ω_L y V_{Lm} , dependen de Q_0 , por lo cual se adoptarán valores particulares para el mismo, con el objeto de estudiar el aspecto de la curva de V_L .

Si $Q_0 \rightarrow \infty$; $\omega_L \rightarrow \omega_0$ y $V_{Lm} \rightarrow \infty$ que se ilustra en la Fig. 12.22.a).

Si $Q_0 = 7,07$; $\omega_L \approx \omega_0$, y $V_{Lm} = 7,07 V$ como se muestra en la Fig. 12.22.b).

Si $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\omega_L \rightarrow \infty$ y $V_{Lm} = V$ situación que se ilustra en la Fig. 12.22.c).

Finalmente, si $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\omega_L =$ imaginaria y no existirá máximo para la tensión sobre el inductor, como se grafica en la Fig. 12.22.d).

Concluido este análisis para V_C y V_L es importante hacer notar que, como en electrónica la mayor parte de los circuitos resonantes poseen $Q_0 \geq 7,07$ sucede que en ese caso $\omega_C \approx \omega_0 \approx \omega_L$, es decir que los valores máximos para el módulo de la tensión sobre el capacitor y el inductor se dan para la pulsación de resonancia, y resultan mayores que el módulo de la tensión que impone el generador.

d) Curvas de P_s ; P y P_q

En el párrafo 12.2.1) se trazaron en forma cualitativa las curvas de potencia, según se ilustra en la Fig. 12.9. Es propósito inmediato calcular las abscisas y puntos extremales para la potencia reactiva, como así también los valores de las potencias aparente y activa para las pulsaciones correspondientes a los puntos extremales antes mencionados.

Como la potencia reactiva es:

$$P_q = V I \operatorname{sen} \varphi$$

podrá escribirse como:

$$P_q = V \frac{V}{Z} \frac{X}{Z} = V^2 \frac{X}{Z^2} = V^2 \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (12.36)$$

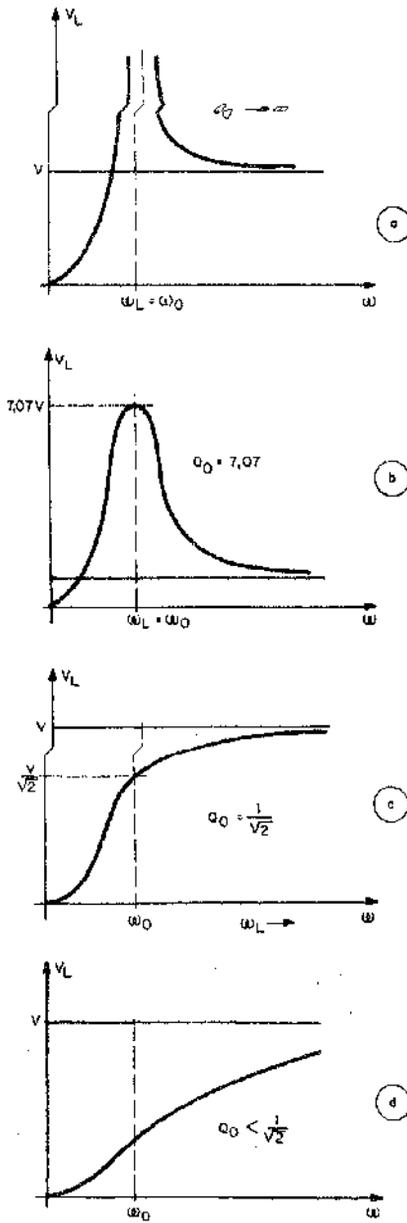


Fig. 12.22

y los puntos extremales resultarán de:

$$\frac{d P_G}{d X} = 0 = V^2 \left[\frac{R^2 + X^2 - 2X^2}{(R^2 + X^2)^2} \right] \quad \text{y como } V \neq 0$$

$$\frac{R^2 - X^2}{(R^2 + X^2)^2} = 0 \quad \text{que se cumplirá si:}$$

$$|X| = R \quad (12.37)$$

La condición de máximo indicada por la Ec. (12.37), es la misma que la utilizada al definir el ancho de banda, e indicada en esa oportunidad por la Ec. (12.17).

En la Fig. 12.23, se indica como ω_{q_1} y ω_{q_2} a las pulsaciones para las cuales se producen los puntos extremales señalados. Imponiendo la condición indicada por la Ec. (12.37) se podrán determinar las pulsaciones mencionadas sabiendo que para pulsaciones mayores que ω_0 deberá cumplirse que:

$$\omega_{q_2} L - \frac{1}{\omega_{q_2} C} = R \quad \text{multiplicando por } \omega_{q_2} \text{ y operando,}$$

$$\omega_{q_2}^2 L - \frac{1}{C} - R \omega_{q_2} = 0$$

Dividiendo por L y ordenando,

$$\omega_{q_2}^2 - \frac{R}{L} \omega_{q_2} - \frac{1}{L C} = 0 \quad \therefore$$

$$\omega_{q_2}^2 - \frac{R}{L} \omega_{q_2} - \omega_0^2 = 0$$

ecuación de segundo grado que tiene por solución:

$$\omega_{q_2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (12.38)$$

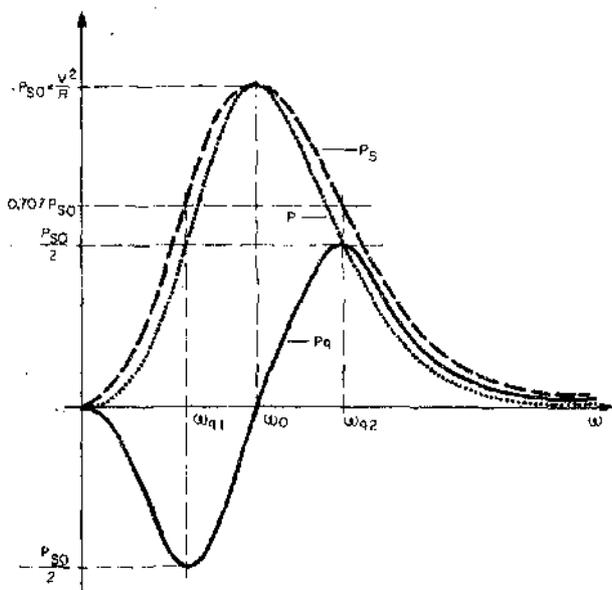


Fig. 12.23

Nótese que como la cantidad subradical es mayor que $\frac{R}{2L}$, el signo negativo para la raíz carece de sentido físico, dado que implica una pulsación negativa. En virtud de lo antedicho, y operando con la Ec. (12.38) se entiende:

$$\omega_{q2} = \frac{R}{2L} + \omega_0 \sqrt{\left(\frac{R}{2L - \omega_0}\right)^2 + 1}$$

pero por la Ec. (12.3) resulta,

$$\omega_{q2} = \frac{R}{2L} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} \quad (12.39)$$

Considerando ahora pulsaciones por debajo de ω_0 , deberá cumplirse que:

$$\frac{1}{\omega_{q1} C} - \omega_{q1} L = R$$

y operando de manera similar al caso anterior, resulta que:

$$\omega_{q_1} = -\frac{R}{2L} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} \quad (12.40)$$

Las Ecs. (12.39) y (12.40) permiten calcular las pulsaciones para las cuales se producen los puntos extremales para P_q . Adviértase que dichos puntos se encuentran a la misma distancia hacia uno y otro lado de la pulsación de resonancia. Además si $Q_0 > 5$ con un error menor del 1 por ciento, dichas ecuaciones resultan:

$$\omega_{q_2} = \frac{R}{2L} + \omega_0 \quad (12.41)$$

$$\omega_{q_1} = -\frac{R}{2L} + \omega_0 \quad (12.42)$$

por lo cual sumando miembro a miembro y operando resulta que:

$$\omega_0 = \frac{\omega_{q_1} + \omega_{q_2}}{2}$$

que indica que para la condición impuesta respecto del valor del factor de selectividad, ω_0 resulta la media aritmética respecto de ω_{q_1} y ω_{q_2} . En efecto, teniendo en cuenta que $\frac{R}{L} = \Delta\omega$, las Ecs. (12.41) y (12.42), pueden escribirse:

$$\omega_{q_2} = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\omega_{q_1} = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

Conclusión similar se encontró al estudiar la forma de la curva de corriente, en la Ec. (12.16). La ordenada de P_q , para los puntos extremales, se hallan reemplazando la condición de máximo dada por la Ec. (12.37) en la Ec. (12.38), resultando:

$$P_q \Big|_{|X|=R} = V^2 \frac{R}{2R^2} = \frac{V^2}{2R} \therefore$$

$$P_{q \max} = P_{q \min} = \frac{P_{S_0}}{2} \quad (12.43)$$

Por otro lado la potencia aparente resulta $P_s = V I = V \frac{V}{Z} \therefore$

$$P_s = \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

que para la condición dada por la Ec. (12.37) es:

$$P_s \Big|_{|X|=R} = \frac{V^2}{\sqrt{2} R} = 0,707 P_{s0} \quad (12.44)$$

Finalmente, la potencia activa resulta:

$$P = V I \cos \varphi = V \frac{V}{Z} \frac{R}{Z} \therefore$$

$$P = V^2 \frac{R}{R^2 + X^2}$$

y para la condición dada por la Ec. (12.37) resulta:

$$P \Big|_{|X|=R} = \frac{V^2}{2 R} = \frac{P_{s0}}{2} \quad (12.45)$$

Los valores indicados por las Ecs. (12.43, 12.44 y 12.45) se encuentran indicados en la Fig. 12.23.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto es evidente que ω_{q_1} y ω_{q_2} se corresponden con las pulsaciones ω_1 y ω_2 introducidas al definir el ancho de banda en el párrafo 12.2.5). A estas pulsaciones que verifican la condición dada por la Ec. (12.37) se las llama *pulsación de corte inferior y superior* respectivamente.

Para estas pulsaciones se verifica que la corriente es 0,707 de su valor máximo, la potencia reactiva es máxima, la aparente es 0,707 de su valor máximo y que la activa es la mitad de la máxima potencia que se obtiene de resonancia. Por esta última razón es que a las mencionadas *frecuencias de corte* para las cuales $|X| = R$ se las llama también *frecuencias de media potencia*.

12.2.6) Análisis de la resonancia para C y L como variables: En el análisis realizado anteriormente para el circuito resonante serie se impuso el mantener constante los parámetros del circuito, y considerar variable la frecuencia de la tensión impuesta por el generador. Pero según lo expuesto en el Cap. 7, párrafo 7.8) es posible llevar el circuito a resonancia fijando la frecuencia impuesta por el

generador y modificando el valor de alguno de los elementos reactivos. A este proceso que lleva el circuito a resonancia se lo llama *sintonía*.

Es propósito de este párrafo exponer un resumen del análisis cualitativo de dichos procesos.

a) Resonancia con capacitancia variable

El análisis a realizar es el mismo que se efectuó en el párrafo 12.2.1), como así también las ecuaciones a emplear, teniendo en cuenta que ahora la variable es C .

En la Fig. 12.24 se grafica la variación de la impedancia y sus componentes, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 R &= cte & X_L &= \omega L = cte \\
 L &= cte & X_C &= \frac{1}{\omega C} \text{ hipérbola equilátera.} \\
 \omega &= cte
 \end{aligned}$$

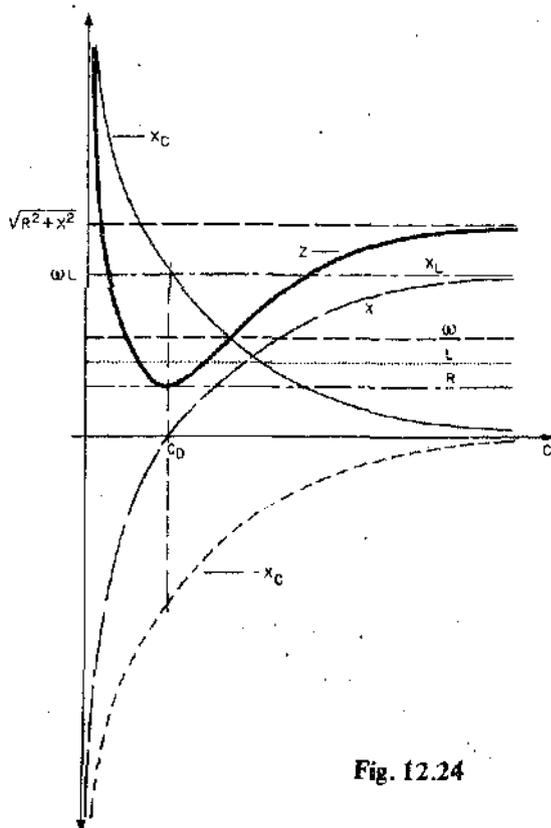


Fig. 12.24

Para facilitar la construcción se traza $-X_C$.

$$X = X_L - X_C \text{ en la cual si:}$$

$$C \rightarrow 0; X \rightarrow -X_C$$

$$C = C_0; X = 0$$

$$C \rightarrow \infty; X \rightarrow X_L = \text{cte}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ en la cual si:}$$

$$C \rightarrow 0; Z \rightarrow |X|$$

$$C = C_0; Z = R$$

$$C \rightarrow \infty; Z \rightarrow \sqrt{R^2 + X_L^2} = \text{cte}$$

En la Fig. 12.25 se traza la variación de φ_Z teniendo en cuenta que:

$$\varphi_Z = \text{arctg} \frac{X}{R} \text{ en la cual si:}$$

$$C \rightarrow 0; \varphi_Z \rightarrow -\pi/2$$

$$C = C_0; \varphi_Z = 0$$

$$C \rightarrow \infty; \varphi_Z \rightarrow \text{arctg} \frac{X_L}{R} = \text{cte}$$

En la Fig. 12.26 se traza la curva de corriente y las de las tensiones, teniendo en cuenta que:

$$V = \text{cte}$$

$$I = \frac{V}{Z} \text{ en la cual si:}$$

$$C \rightarrow 0; Z \rightarrow \infty \therefore I \rightarrow 0$$

$$C = C_0; Z = R \therefore I = \frac{V}{R}$$

$$C \rightarrow \infty; Z \rightarrow \sqrt{R^2 + X_L^2} \therefore I \rightarrow \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \text{cte}$$

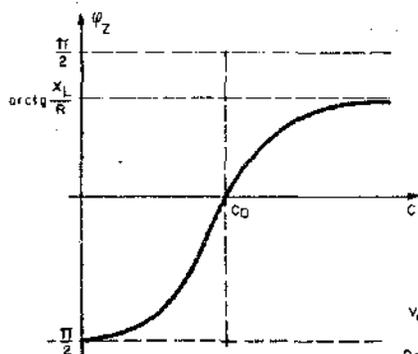


Fig. 12.25

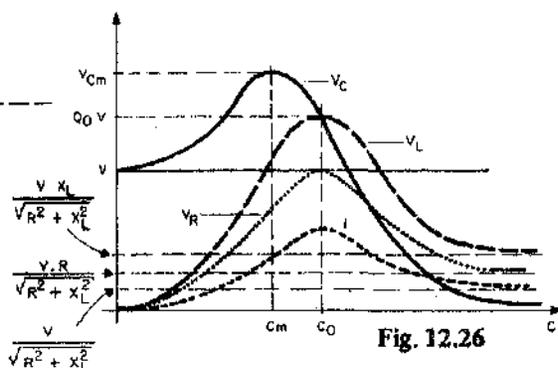


Fig. 12.26

$V_R = R I$, por lo cual variará en la misma forma que I pero afectada por la constante R .

$V_L = \omega L I$, que variará en forma igual a I pero afectada por la constante X_L . Para la construcción se ha supuesto $X_L > R$.

En la misma, si:

$$C \rightarrow 0; I \rightarrow 0 \therefore V_L \rightarrow \infty$$

$$C = C_0; I = \frac{V}{R} \therefore V_L = V \frac{\omega L}{R} = V Q_0$$

$$C \rightarrow \infty; I \rightarrow \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \therefore V_L \rightarrow \frac{V X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = cte$$

$V_C = \frac{1}{\omega C} I$ en la cual, si:

$$C \rightarrow 0; X_L \rightarrow 0; X_C \gg R \therefore V_C \rightarrow V$$

$$C = C_0; I = \frac{V}{R} \therefore V_C = \frac{1}{\omega C_0 R} V = Q_0 V$$

$$C \rightarrow \infty; I \rightarrow \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \therefore V_C \rightarrow 0$$

Como se explicó en el párrafo 12.2.1) el máximo para V_C se corre hacia la izquierda y adoptará un valor, que en el gráfico se indica como V_{Cm} , para un dado valor de capacidad C_m .

Nótese que al ser C la variable, las amplitudes máximas para V_C y V_L son distintas. Análisis similar al efectuado en el párrafo 12.2.1) puede realizarse para las potencias:

Nótese que al igual que en el caso de pulsación variable, también ahora cuando $C = C_0$ se logra impedancia mínima y resistiva pura; máxima corriente y factor de potencia unitario. Finalmente, se realizará un breve análisis cuantitativo a efectos de observar la influencia del valor del factor de selectividad sobre la ubicación del máximo de tensión sobre el capacitor. El módulo de la tensión sobre el capacitor es:

$$V_C = \frac{V X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \text{ que tendrá un máximo cuando: } \quad (12.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dX_C} = 0 &= \frac{[R^2 + (X_L - X_{Cm})^2]^{1/2}}{R^2 + (X_L - X_{Cm})^2} - \\ &= \frac{1/2 X_{Cm} [R^2 + (X_L - X_{Cm})^2]^{-1/2} \cdot 2(X_L - X_{Cm})(-1)}{R^2 + (X_L - X_{Cm})^2} \end{aligned}$$

donde se eliminó V por ser obviamente constante y distinta de cero. La última expresión se anulará cuando:

$$[R^2 + (X_L - X_{Cm})^2]^{1/2} = -X_{Cm} \frac{(X_L - X_{Cm})}{[R^2 + (X_L - X_{Cm})^2]^{1/2}} \therefore$$

$$R^2 + (X_L - X_{Cm})^2 = X_{Cm}^2 - X_{Cm} X_L \text{ operando:}$$

$$R^2 + X_L^2 + X_{Cm}^2 - 2X_L X_{Cm} - X_{Cm}^2 + X_{Cm} X_L = 0 \therefore$$

$$R^2 + X_L^2 - X_{Cm} X_L = 0 \text{ por lo cual,}$$

$$X_{Cm} = \frac{R^2 + X_L^2}{X_L} \text{ de donde,}$$

$$\frac{1}{\omega C_m} = \frac{R^2 + X_L^2}{\omega L} \therefore$$

$$C_m = \frac{L}{R^2 + X_L^2} = \frac{L}{R^2 \left[1 + \left(\frac{X_L}{R} \right)^2 \right]} \quad (12.46)$$

pero en resonancia se cumple que:

$$X_L = \omega L = \frac{1}{\omega C_0} \quad \therefore L = \frac{1}{\omega^2 C_0} \quad (12.47)$$

por lo cual multiplicando y dividiendo la Ec. (12.46) por C_0 y reemplazando el valor de L dado por la Ec. (12.47) resulta:

$$C_m = \frac{C_0}{R^2 \omega^2 C_0^2 \left[1 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2 \right]}$$

y en virtud de las definiciones de Q_0 :

$$C_m = \frac{C_0}{\frac{1}{Q_0^2} (1 + Q_0^2)} \quad \therefore$$

$$C_m = \frac{C_0}{1 + \frac{1}{Q_0^2}} \quad (12.48)$$

La Ec. (12.48) da el valor de capacidad que hace máxima la tensión sobre el capacitor:

La condición dada por la Ec. (12.48) puede reemplazarse en la Ec. (12.45), para hallar el máximo de V_C , previamente ordenada de la siguiente manera:

$$V_{Cm} = \frac{V \frac{X_{Cm}}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_L - X_{Cm}}{R} \right)^2}} = \frac{V \frac{X_{Cm}}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_L}{R} - \frac{X_{Cm}}{R} \right)^2}} \quad (12.49)$$

pero $\frac{X_{Cm}}{R} = \frac{1}{\omega C_m R}$ que por la Ec. (12.48)

$$\frac{X_{Cm}}{R} = \frac{1}{\omega R} \frac{1 + \frac{1}{Q_0^2}}{C_0} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{Q_0^2} \right) \quad (12.50)$$

Además,

$$\frac{X_L}{R} - \frac{X_{Cm}}{R} = Q_0 - Q_0 \left(1 + \frac{1}{Q_0^2} \right) = - \frac{1}{Q_0} \quad (12.51)$$

Reemplazando las Ecs. (12.50) y (12.51) en la Ec. (12.49) surge que:

$$V_{Cm} = \frac{V Q_0 \left(1 + \frac{1}{Q_0^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}}} = \frac{V \left(Q_0 + \frac{1}{Q_0}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}}}$$

$$V_{Cm} = V \frac{1 + Q_0^2}{Q_0 \sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}}} = V \frac{1 + Q_0^2}{\sqrt{1 + Q_0^2}}$$

$$V_{Cm} = V \sqrt{1 + Q_0^2} \quad (12.52)$$

La Ec. (12.52) da la expresión del máximo de tensión sobre el capacitor. Analizando las Ecs. (12.48 y 12.52) se desprende que si:

$$Q_0 \geq 10; C_m \approx C_0 \text{ y } V_{Cm} \approx Q_0 V$$

y para valores de Q_0 más bajos se cumplirá que $C_m < C_0$ como V_{Cm} dada por la Ec. (12.52).

b) Resonancia con inductancia variable

El análisis es similar al efectuado recientemente, teniendo en cuenta que ahora la variable es L .

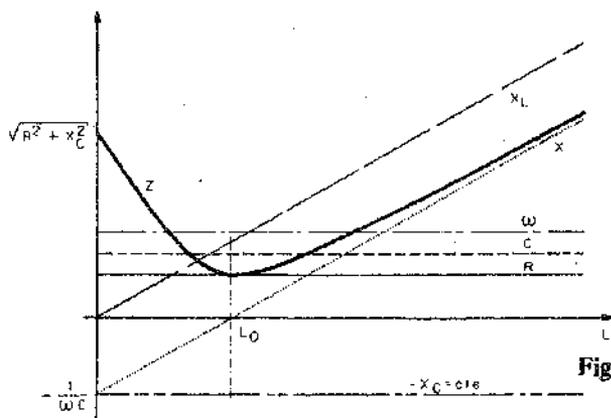


Fig. 12.27

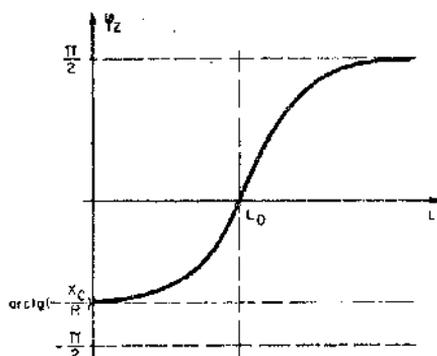


Fig. 12.28

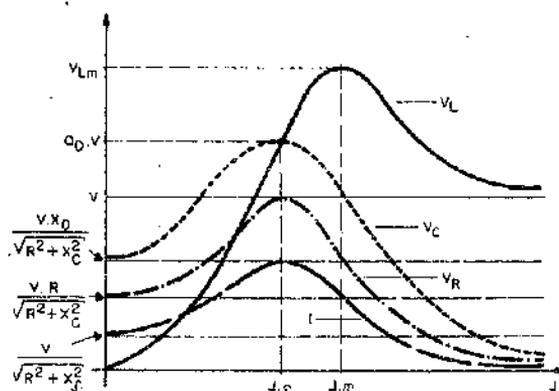


Fig. 12.29

En la Fig. 12.27 se grafica la variación de la impedancia y sus componentes, y en la Fig. 12.28 la variación del ángulo de fase de dicha impedancia.

En la Fig. 12.29 se trazan las curvas de corriente y las de tensión.

El módulo de la tensión en el inductor es:

$$V_L = \frac{V X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

realizando procedimiento similar al anterior se llega a que:

$$L_m = L_0 \left(1 + \frac{1}{Q_0^2} \right) \quad (12.53)$$

y que:

$$V_{Lm} = V \sqrt{1 + Q_0^2} \quad (12.54)$$

Analizando las Ecs. (12.53 y 12.54) resulta que si $Q_0 \geq 10$; $L_m \approx L_0$ y $V_{L_m} \approx Q_0 V$, para valores más bajos de Q_0 se cumplirá que $L_m > L_0$ con V_{L_m} dada por la Ec. (12.54).

Análisis similar al efectuado en el párrafo 12.2.1) puede realizarse para las potencias.

12.3 Resonancia en un circuito R L C paralelo

En el párrafo 12.2) se analizó el comportamiento de un circuito R L C serie, excitado por un generador de tensión de módulo constante y frecuencia variable. En la Fig. 12.30.a) se muestra dicho circuito al que se adjunta la expresión de su impedancia para una pulsación cualquiera. En la Fig. 12.30.b) se muestra el circuito resonante paralelo excitado por un generador de corriente de módulo constante y frecuencia variable al que se adjunta la expresión de la admitancia para una pulsación cualquiera.

La comparación de las ecuaciones que describen el comportamiento de ambos circuitos demuestra que los mismos son *duales*. Por ejemplo, la impedancia del circuito serie, se comportará frente a las variaciones de la frecuencia de modo idéntico que la admitancia del circuito paralelo.

En consecuencia, en base al *principio de dualidad* podrán extenderse los resultados hallados para el *circuito serie al circuito paralelo*, realizando los cambios adecuados en las variables que indica dicho principio, según se expuso en el Cap. 3, párrafo 3.7.3).

En virtud de lo anteriormente expuesto, en la Fig. 12.31.a) se grafican las variaciones de la admitancia y sus componentes, y en la Fig. 12.31.b) la variación de ángulo de fase. En la Fig. 12.32 se presentan las curvas de corrientes y en la Fig. 12.33 las correspondientes a las potencias.

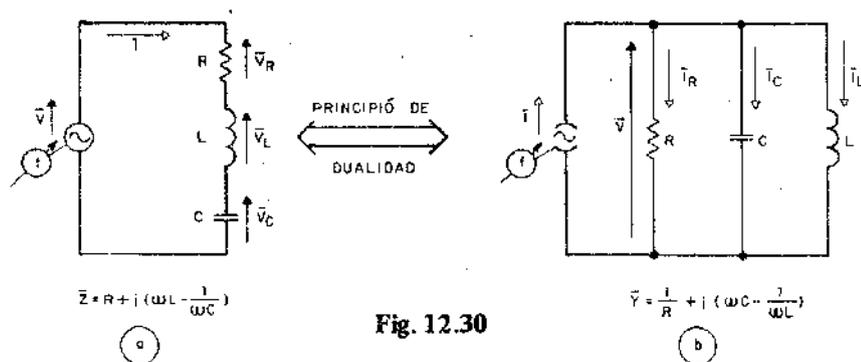


Fig. 12.30

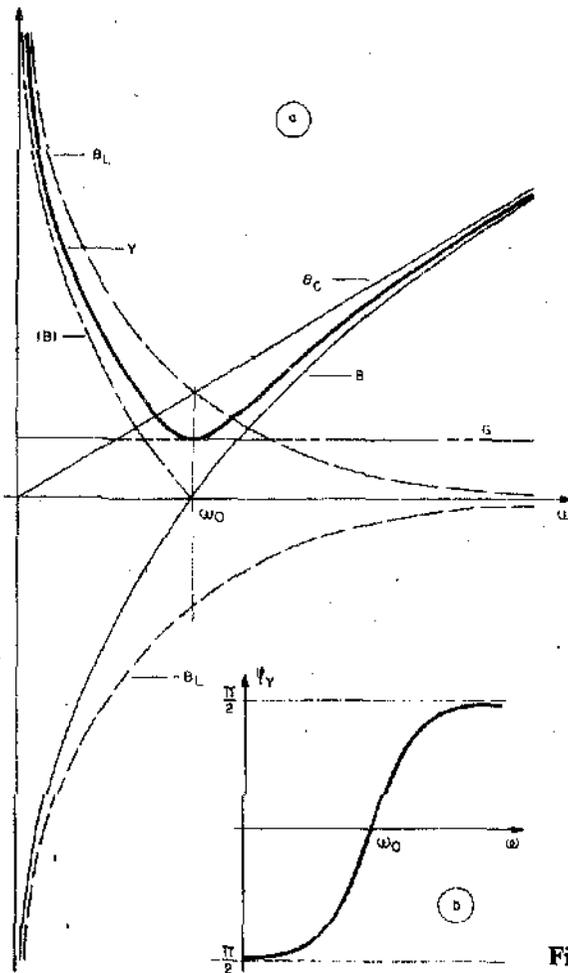


Fig. 12.31

Según ya se expuso en el Cap. 7, parágrafo 7.9) se verifica que a la frecuencia de resonancia $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, el circuito presenta mínima admitancia, conductiva pura, y factor de potencia unitario. Toda la corriente provista por el generador pasa por el resistor.

Nótese que si a este circuito resonante paralelo se lo excita con un *generador de tensión*, en resonancia la corriente total del circuito sería mínima y coincidiría con la que circula por la resistencia. Para la situación indicada por la Fig. 12.30 pueden extenderse algunos de los resultados del análisis cuantitativo. Por ejemplo,

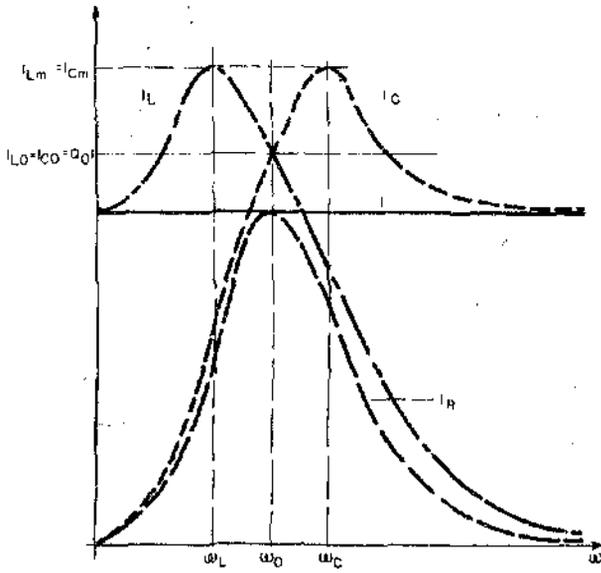


Fig. 12.32

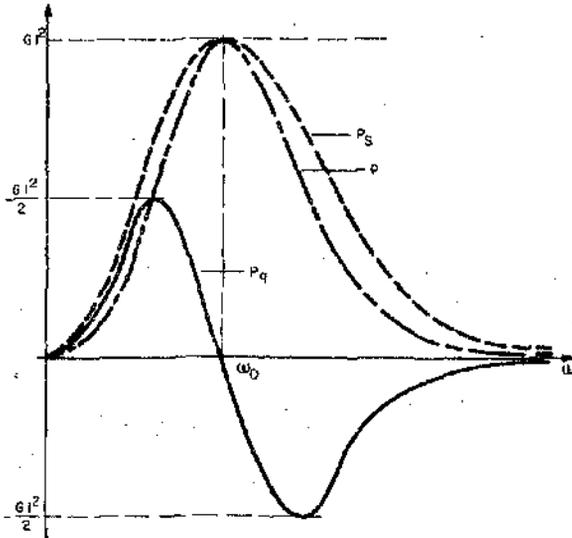


Fig. 12.33

las expresiones del *factor de selectividad para el circuito resonante paralelo* resultan:

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (12.55)$$

$$Q_0 = \omega_0 C R \quad (12.56)$$

$$Q_0 = \frac{I_{L_0}}{I} = \frac{I_{C_0}}{I} \quad (12.57)$$

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (12.58)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (12.59)$$

De la Ec. (12.57) se desprende que para resonancia: $I_{L_0} = I_{C_0} = Q_0 I$, por lo que a veces se dice que en el circuito paralelo existe una resonancia de corrientes, y que el factor de selectividad Q_0 debe entenderse como un coeficiente de sobrecorriente.

Alcanzado este punto, es interesante resaltar algunas particularidades de estos circuitos resonantes. Según ya se expresó, el circuito resonante serie alimentado por un generador de tensión resulta muy selectivo en función de la frecuencia. Si en cambio, se lo excita con un generador de corriente, al ser éste de módulo constante al igual que la caída de tensión sobre el resistor, las caídas de tensión sobre el inductor y capacitor serían proporcionales a sus respectivas impedancias, por lo cual el circuito no sería pasabanda. Es decir, que para que un circuito resonante serie presente características de filtro pasabanda debe ser excitado por un generador de tensión.

Pero es de hacer notar que la mayoría de los circuitos resonantes se encuentran excitados por generadores de tensión constante, y resulta interesante analizar el efecto de la impedancia del generador, que en la Fig. 12.34 es indicada como R_g y se supone resistiva pura.

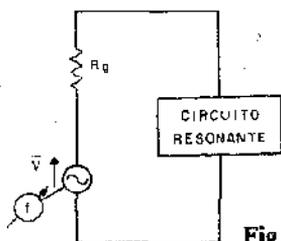


Fig. 12.34

De acuerdo a los análisis realizados para los circuitos resonantes serie y paralelo, se desprende que si se dispone de un generador excitador de baja impedancia interna será conveniente utilizar un circuito resonante serie con el objeto de lograr un alto valor de factor de selectividad. Contrariamente, si el generador posee alta impedancia interna, con el mismo fin anterior se utilizará un circuito resonante paralelo.

Debido a que en las aplicaciones de la electrónica la mayoría de los generadores excitadores empleados poseen alta impedancia interna, resulta que el circuito resonante paralelo es más empleado que el serie.

Pero es de hacer notar que el circuito paralelo ilustrado en la Fig. 12.30.b) es un circuito ideal que se presenta en los usos comunes de modo aproximado. En parágrafos posteriores se analizará el circuito resonante paralelo como se presenta en la práctica.

12.4 Curva universal de resonancia

Del análisis realizado en el párrafo 12.2.1) sobre la resonancia de un circuito RLC serie que se ilustra en la Fig. 12.1, se desprende por ejemplo, que las curvas de corriente, poseen *todas la misma forma*, difiriendo sólo en amplitud y factor de selectividad. Esto es de esperar dado que las mismas responden a idéntica expresión, que resulta:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (12.60)$$

Si se divide a la corriente por su valor de resonancia \bar{I}_0 y a la pulsación por su valor de resonancia ω_0 , las mencionadas cantidades resultarán adimensionales y se podrá normalizar la Ec. (12.60) que puede ser aplicada a todos los circuitos resonantes serie. Con ese fin se extrae factor común R en el denominador del segundo término de la Ec. (12.60) resultando:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R} \frac{1}{1 + j \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (12.61)$$

dado que $\frac{\bar{V}}{R} = \bar{I}_0$, sacando factor común L en el denominador del segundo término y dividiendo y multiplicando por ω_0 resulta:

$$\bar{I} = \bar{I}_0 \frac{1}{1 + j \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 L C} \right)} \quad (12.62)$$

como ya se expuso $\frac{\omega_0 L}{R} = Q_0$ y $\frac{1}{L C} = \omega_0^2$

Operando con la Ec. (12.62) resulta:

$$\frac{\bar{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$\frac{\bar{I}}{I_0} = \frac{1}{1 + j Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \quad (12.63)$$

Nótese que en la formulación de la Ec. (12.63) se ha supuesto R constante en la región de resonancia, aunque en realidad en algunos casos R puede depender de la frecuencia. Pero como el empleo del Q_0 elimina a dicho parámetro de las ecuaciones, debe suponerse que el factor de selectividad permanece constante en la región mencionada.

Expresando la Ec. (12.63) en módulo y fase:

$$\frac{\bar{I}}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]^2}} e^{-j \arctg Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \quad (12.64)$$

en la cual el módulo de la relación normalizada de corriente resulta:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]^2}} \quad (12.65)$$

y la fase de dicha respuesta normalizada es:

$$\varphi = - \arctg Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \quad (12.66)$$

Como la Ec. (12.65) no es nada más que la expresión de la corriente normalizada para un circuito resonante serie, representada gráficamente en función de $\frac{f}{f_0}$ en escala logarítmica, resultará una curva geoméricamente simé-

trica, según se expresó en el párrafo 12.2.5). En la Fig. 12.35 se grafica la mencionada relación para un determinado valor de Q_0 . Es decir que la relación $\frac{I}{I_0}$ tiene el mismo valor para dos frecuencias f_1 y f_2 tal que su media geométrica es f_0 . Además el ángulo φ tiene para ambas el mismo valor absoluto pero signos contrarios.

En cambio, si se la grafica en escala lineal, para el mismo valor de Q_0 como se ilustra en la Fig. 12.36, la curva se presentará asimétrica. Sin embargo, es aproximadamente simétrica para frecuencias cercanas a la de resonancia, es decir para una relación de frecuencias $\frac{f}{f_0} \approx 1$. Este hecho hace que puedan desarrollarse a partir de la Ec. (12.64), fórmulas aproximadas más simples que dan lugar a la *curva universal de resonancia*, que podrá utilizarse bajo ciertas restricciones, que se explicarán más adelante.

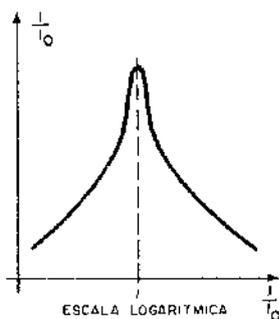


Fig. 12.35

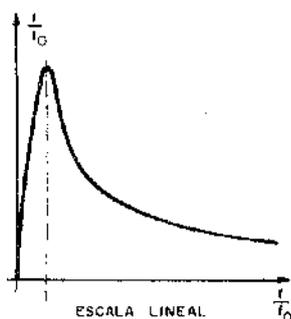


Fig. 12.36

Llamando desviación relativa de frecuencia respecto de la resonancia a

$$\delta = \frac{f - f_0}{f_0} \quad (12.67)$$

operando con la Ec. (12.67) resulta:

$$\delta + 1 = \frac{f - f_0}{f_0} + 1 = \frac{f}{f_0} \quad (12.68)$$

de la cual también es $\frac{f_0}{f} = \frac{1}{\delta + 1}$ (12.69)

en consecuencia, en base a las Ecs. (12.68 y 12.69) resulta que:

$$\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \delta + 1 - \frac{1}{\delta + 1} = \frac{\delta^2 + \delta + \delta + 1 - 1}{\delta + 1} \therefore$$

$$\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta + 1} = \delta \frac{\delta + 2}{\delta + 1} \quad (12.70)$$

si se analiza la región cercana a la de resonancia de forma tal que se cumpla que $|\delta| \ll 1$ se verificará en forma aproximada en la Ec. (12.70) que:

$$\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \approx 2\delta$$

bajo este supuesto, la Ec. (12.63) resulta:

$$\frac{\bar{I}}{\bar{I}_0} = \frac{1}{1 + j Q_0 2\delta} \quad (12.71)$$

de la cual derivan módulo y fase, a saber:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(Q_0 \delta)^2}} \quad (12.72)$$

$$\varphi = -\text{arctg } 2 Q_0 \delta \quad (12.73)$$

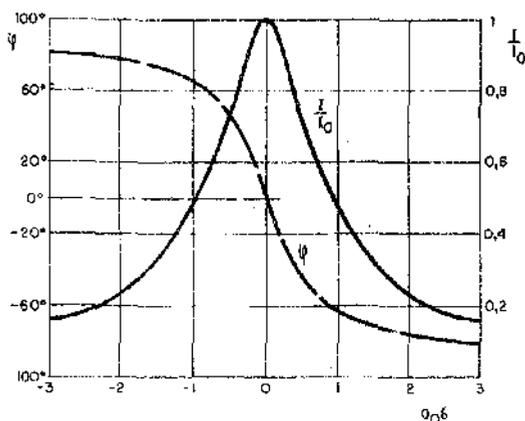


Fig. 12.37

Las Ecs. (12.72 y 12.73) se representan en la Fig. 12.37 tomando como variable a $Q_0 \delta$ con el objeto de independizarse del factor de selectividad.

Nótese que la relación de corriente resulta la unidad para la frecuencia de resonancia, o lo que es lo mismo para $\delta = 0$. Dado que φ es el ángulo entre \bar{I} e \bar{I}_0 , $\varphi = 0$ se da para resonancia, donde la tensión impuesta por el generador y la corriente están en fase.

Si φ es positivo, indica que la corriente adelanta respecto a la tensión total, es decir, que el circuito se comporta capacitivamente, que resultará para valores de $Q_0 \delta$ negativos pues se dan para la región anterior a la resonancia.

Si φ es negativo, indica que la corriente atrasa respecto de la tensión total, es decir que el circuito se comporta inductivamente, que resultará para valores de $Q_0 \delta$ positivos pues se dan para la región posterior a la resonancia.

Generalmente, las curvas universales se expresan en términos de admitancia normalizada, lo que puede derivarse a partir de la Ec. (12.71). Como se excita con un generador de tensión de módulo constante se cumple que:

$$\bar{I} = \bar{V} \bar{Y}$$

$$\bar{I}_0 = \bar{V} \bar{Y}_0 = \bar{V} G \text{ por lo cual,}$$

$$\frac{\bar{I}}{\bar{I}_0} = \frac{\bar{Y}}{G} \quad (12.74)$$

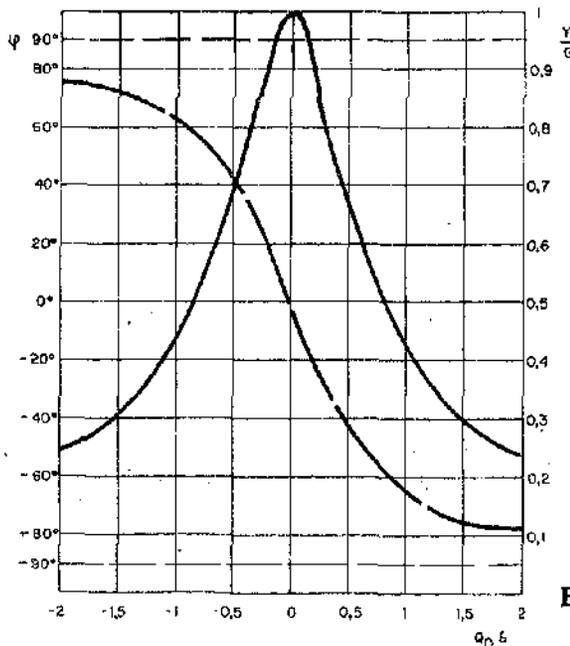


Fig. 12.38

y la Ec. (12.74) dice que la curva correspondiente a la admitancia normalizada será la misma que la de la corriente normalizada. En la Fig. 12.38 se grafican nuevamente la curva universal en módulo y fase, llevando en ordenadas por un lado el módulo de la admitancia normalizada $\frac{Y}{G}$, y por otro lado el ángulo de fase φ correspondiente a la admitancia de el circuito resonante serie.

Más adelante, se ilustrará sobre la utilización de esta curva en la resolución de problemas.

Puede mostrarse, que la curva universal recientemente hallada es válida también para un *circuito resonante paralelo*, que después de todo no es nada más que el dual del serie. Pero en este caso la característica de módulo representará los valores normalizados de la impedancia $\frac{Z}{Z_0} = \frac{Z}{R}$, y la característica de fase corresponderá al ángulo de fase de la impedancia. Naturalmente que la curva universal es aplicable para los circuitos resonantes serie y paralelo, con la precaución de calcular en forma adecuada para cada caso el factor de selectividad. Es propósito final de este párrafo mencionar las restricciones en la utilización de la curva universal. La Ec. (12.63) puede considerarse exacta bajo la condición que el Q_0 sea constante en la región de resonancia, que se cumple en circuitos de elevado Q_0 . Se supone además trabajar en una zona de frecuencias para la cual R es constante.

Para encontrar la forma aproximada se supuso que:

$$|\delta| \ll 1$$

lo que implica de acuerdo a la Ec. (12.67) que:

$$f - f_0 \ll f_0 \quad \therefore$$

$$\frac{\Delta f}{2} \ll f_0 \quad \text{y como} \quad Q_0 = \frac{f_0}{\Delta f}$$

deberá cumplirse que $Q_0 \gg 1$. Se encuentra que si $Q_0 \geq 20$ el error cometido en la determinación de \bar{Y} no excede del 1 por ciento de \bar{Y}_0 .

12.5 Resonancia en un circuito paralelo de dos ramas

12.5.1) Análisis cualitativo para pulsación variable. Representación de gráficos de las variables en función de la frecuencia. En el párrafo 12.3 se analizó

la resonancia de un circuito R L C paralelo aplicando el principio de dualidad. Pero en la práctica un circuito resonante paralelo se forma conectando un inductor y un capacitor reales. Al construir el modelo circuital idealizado deberán tenerse en cuenta los parámetros residuales de los elementos reactivos. En consecuencia se analizará el circuito ilustrado en la Fig. 12.39, en régimen senoidal permanente, excitado por un generador de tensión constante y frecuencia variable. En el mismo, en serie con cada uno de los elementos reactivos se consideran las resistencias de pérdidas correspondientes R_L y R_C , para el inductor y el capacitor respectivamente.

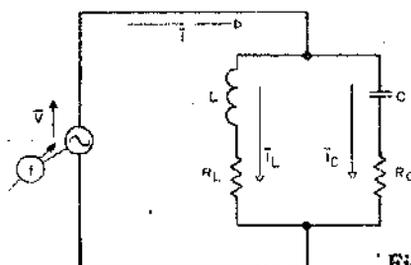


Fig. 12.39

El propósito inmediato es trazar en forma cualitativa las siguientes curvas:

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| a) R_L ; X_L ; Z_L | d) Z ; φ_Z |
| b) R_C ; X_C ; Z_C | e) V ; I_L ; I_C ; I |
| c) Y_L ; Y_C ; Y | f) P_s ; P ; P_q |

Nótese que tanto para las inmitancias, tensiones, corrientes y potencias se representa la variación de su *módulo* en función de ω .

En la Fig. 12.40.a) se representan las variables indicadas en la clasificación a). Dichas representaciones se efectúan teniendo en cuenta que:

$$R_L = \text{cte} = f_1(\omega)$$

$$X_L = \omega L = f_2(\omega); \text{ recta que pasa por el origen, de pendiente } L$$

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = f_3(\omega); \text{ en la cual si}$$

$$\omega \rightarrow 0 ; X_L \ll R_L \therefore Z_L \rightarrow R_L$$

$$\omega \rightarrow \infty ; X_L \gg R_L \therefore Z_L \rightarrow X_L$$

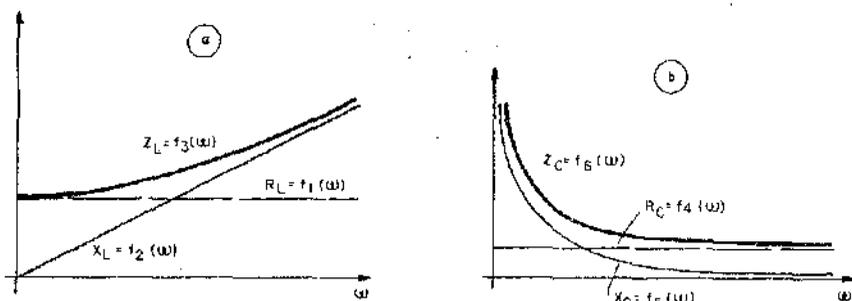


Fig. 12.40

En la Fig. 12.40.b) se grafican las variables indicadas en la clasificación b.) teniendo en cuenta que:

$$R_C = \text{cte} = f_4(\omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = f_5(\omega); \text{ hipérbola equilátera.}$$

$$Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2} = f_6(\omega); \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; X_C \gg R_C \therefore Z_C \rightarrow X_C$$

$$\omega \rightarrow \infty; X_C \ll R_C \therefore Z_C \rightarrow R_C$$

En la Fig. 12.41.a) se representan las variables indicadas en la clasificación c), teniendo en cuenta que:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = f_7(\omega); \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; Z_L \rightarrow R_L \therefore Y_L \rightarrow \frac{1}{R_L}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Z_L \rightarrow \infty \therefore Y_L \rightarrow 0$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = f_8(\omega); \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; Z_C \rightarrow \infty \therefore Y_C \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; Z_C \rightarrow R_C \therefore Y_C \rightarrow \frac{1}{R_C}$$

$Y = f_9(\omega)$; dado que el módulo de la suma de las admitancias Y_L e Y_C no es

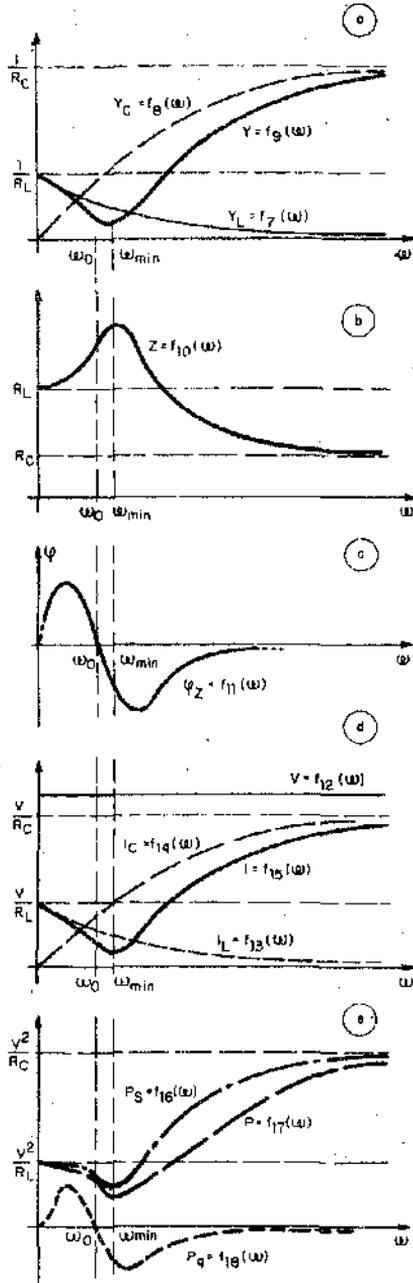


Fig. 12.41

la suma de los módulos, para encontrar los valores extremales para Y debe pensarse en su valor complejo eficaz.

$$\bar{Y} = \bar{Y}_L + \bar{Y}_C \text{ en la cual si}$$

$$\omega \rightarrow 0; \bar{Y}_C \ll \bar{Y}_L; \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}_L \therefore Y \rightarrow 1/R_L$$

$$\omega \rightarrow \infty; \bar{Y}_C \gg \bar{Y}_L; \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}_C \therefore Y \rightarrow 1/R_C$$

Como se analiza un circuito paralelo, entre los valores extremales hallados la admitancia tendrá un mínimo, que no debe estar necesariamente en $Y_L = Y_C$, pero sí cercano, y que en el gráfico se indica como pulsación de mínima admitancia ω_{min} . Para encontrar la expresión de la pulsación para la cual se tiene mínima admitancia, deberá calcularse la expresión de la admitancia del circuito, hallar su módulo, derivarlo respecto de ω , igualar a cero y de allí despejar ω_{min} . Es decir, que hallada la admitancia, se puede sintetizar como una parte real G más una imaginaria B .

$$\text{Se calcula su módulo } Y = \sqrt{G^2 + B^2} \therefore \frac{dY}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_{min}$$

Por otra parte, según se observó en los problemas de aplicación del Cap. 8, no necesariamente para ω_{min} el circuito es resistivo puro, es decir que la pulsación de resonancia de factor de potencia unitario ω_0 no coincidirá con ω_{min} , pero estará cercano a él. Además, al ubicar en forma cualitativa ω_0 en el gráfico, debe cuidarse que no esté determinada para $Y_L = Y_C$; pues ω_0 se define para $B_L = B_C$. Es decir que, calculada la expresión de la admitancia:

$$\bar{Y} = G + jB$$

se iguala la parte imaginaria a cero y de allí se despeja ω_0 , a saber:

$$B = 0 \Rightarrow \omega_0$$

En la figura 12.41 b) y c) representan las variables indicadas en la clasificación d) teniendo en cuenta que:

$$Z = \frac{1}{Y} = f_{10}(\omega); \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; Y \rightarrow \frac{1}{R_L} \therefore Z \rightarrow R_L$$

$$\omega = \omega_{min}; Y = \text{mínimo} \therefore Z = \text{máximo}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Y \rightarrow \frac{1}{R_C} \therefore Z \rightarrow R_C$$

$$\varphi_Z = \arctg \left[\frac{Im(\bar{Z})}{R(\bar{Z})} \right] = f_{11}(\omega) \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; \bar{Z} \rightarrow R_L \therefore \varphi_Z \rightarrow 0 \text{ (resistivo puro)}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Z \rightarrow R_C \therefore \varphi_Z \rightarrow 0 \text{ (resistivo puro)}$$

$$\omega = \omega_0; Z \rightarrow \text{resistiva pura} \therefore \varphi_Z = 0$$

Además para:

$$\omega < \omega_0; \text{el circuito es inductivo} \therefore \varphi_Z \Rightarrow +$$

$$\omega > \omega_0; \text{el circuito es capacitivo} \therefore \varphi_Z \Rightarrow -$$

En la Fig. 12.41.d) se grafican las variables indicadas en la clasificación e), teniendo en cuenta que:

$$V = cte \quad f_{12}(\omega)$$

Las curvas de corriente tendrán el mismo aspecto que las de admitancia dado que $V = cte$.

$$I_L = V Y_L = f_{13}(\omega); \text{ en la cual si,}$$

$$\omega \rightarrow 0; Y_L \rightarrow 1/R_L \therefore I_L \rightarrow \frac{V}{R_L}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Y_L \rightarrow 0 \therefore I_L \rightarrow 0$$

$$I_C = V Y_C = f_{14}(\omega); \text{ en la cual si:}$$

$$\omega \rightarrow 0; Y_C \rightarrow 0 \therefore I_C \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; Y_C \rightarrow \frac{1}{R_C} \therefore I_C \rightarrow \frac{V}{R_C}$$

$I = V Y = f_{15}(\omega)$; en la cual si:

$$\omega \rightarrow 0; Y \rightarrow \frac{1}{R_L} \therefore I \rightarrow \frac{V}{R_L}$$

$$\omega \rightarrow \infty; Y \rightarrow \frac{1}{R_C} \therefore I \rightarrow \frac{V}{R_C}$$

$\omega = \omega_{min}$; Y es mínima $\therefore I$ será mínima.

En la Fig. 12.41.d) se representan las variables indicadas en la clasificación $f)$, teniendo en cuenta que:

$P_S = VI = f_{16}(\omega)$; que tendrá el mismo aspecto que la curva de corriente, puesto que $V = cte$. Por lo tanto si:

$$\omega \rightarrow 0; I \rightarrow \frac{V}{R_L} \therefore P_S \rightarrow \frac{V^2}{R_L}$$

$$\omega \rightarrow \infty; I \rightarrow \frac{V}{R_C} \therefore P_S \rightarrow \frac{V^2}{R_C}$$

$\omega = \omega_{min}$; I es mínima $\therefore P_S$ será mínima

$P = P_S \cos \varphi = f_{17}(\omega)$; de aspecto similar a la curva de P_S , pero estará por debajo de ella debido a que se multiplica por $\cos \varphi$; y coincidirán P y P_S para las siguientes pulsaciones:

$$\omega \rightarrow 0; \cos \varphi \rightarrow 1 \therefore P \rightarrow P_S$$

$$\omega \rightarrow \infty; \cos \varphi \rightarrow 1 \therefore P \rightarrow P_S$$

$$\omega = \omega_0; \cos \varphi = 1 \therefore P = P_S$$

$P_q = P_S \sen \varphi = f_{18}(\omega)$; en la cual si:

$$\omega \rightarrow 0; \sen \varphi \rightarrow 0 \therefore P_q \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty; \sen \varphi \rightarrow 0 \therefore P_q \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_0; \sen \varphi = 0 \therefore P_q = 0$$

Para $\omega < \omega_0$; P_q será positiva pues el circuito se comporta como inductivo; y si $\omega > \omega_0$; P_q será negativa pues el circuito se comporta capacitivamente.

12.5.2) **Análisis cuantitativo para pulsación variable:** Considérese el circuito ilustrado en la Fig. 12.39. En el mismo se plantearán las ecuaciones de equilibrio y se obtendrán los circuitos equivalentes que resulten, encontrándose la condición de resonancia de factor de potencia unitario. Luego se analizará un estado particular del mencionado circuito, el cual está en resonancia de factor de potencia unitario para todas las frecuencias. Finalmente, se mencionará una simplificación posible que puede realizarse para el análisis del circuito en cuestión.

a) *Ecuaciones, circuitos equivalentes y análisis de la resonancia*

Para el circuito en análisis, la admitancia de la rama inductiva resulta:

$$\bar{Y}_L = \frac{1}{\bar{Z}_L} = \frac{1}{R_L + j\omega L} = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = G_L - jB_L \quad (12.75)$$

y para la rama capacitiva:

$$\bar{Y}_C = \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{R_C - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = G_C + jB_C \quad (12.76)$$

por lo que la admitancia total resulta:

$$\begin{aligned} \bar{Y} = \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = & \left(\frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) + \\ & + \left(\frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) \end{aligned} \quad (12.77)$$

o bien:

$$\begin{aligned} \bar{Y} = & \left(\frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) + \\ & + j \left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) \end{aligned} \quad (12.78)$$

teniendo en cuenta la nomenclatura empleada en las Ecs. (12.75 y 12.76), las Ecs. (12.77 y 12.78) pueden sintetizarse respectivamente como:

$$\bar{Y} = (G_L - jB_L) + (G_C + jB_C) \quad (12.79)$$

$$\bar{Y} = (G_L + G_C) + j(B_C - B_L) \quad (12.80)$$

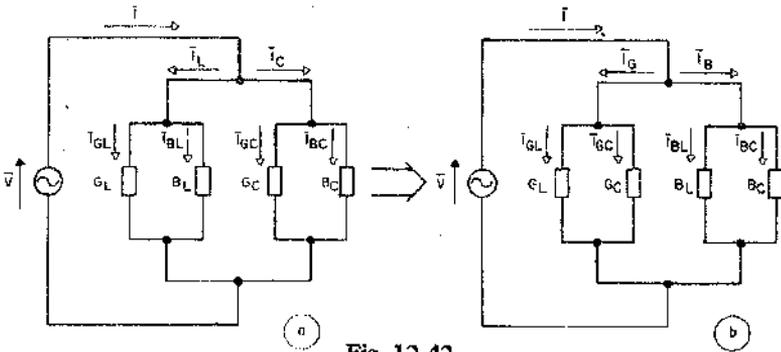


Fig. 12.42

Las Ecs. (12.79 y (12.80) dan lugar a los circuitos equivalentes que se muestran en la Fig. 12.42.a) y b) respectivamente. Obsérvese que, como se excita con un generador de tensión, multiplicando las ecuaciones mencionadas por la tensión impuesta por el generador, las mismas se transforman en ecuaciones de equilibrio en función de corrientes.

Se tratará ahora de interpretar el estado genérico de los circuitos equivalentes hallados mediante un diagrama fasorial. Para facilitar su construcción considérese previamente el circuito original de la Fig. 12.39. Puesto que la tensión impuesta por el generador es la misma para cada rama del circuito, para cada una de ellas pueden construirse los diagramas fasoriales en la Fig. 12.43. En la misma, el diagrama a) corresponde a la rama inductiva y el b) a la capacitativa, y dado que corresponden a un estado genérico $\varphi_L \neq \varphi_C$. Ambos diagramas se trazaron sobre circunferencias auxiliares cuyos diámetros corresponden al módulo de la tensión impuesta por el generador. De esta manera superponiendo ambos diagramas, haciendo coincidir los fasores tensión, por ejemplo sobre un eje horizontal, se llega al correspondiente a todo el circuito según se ilustra en la Fig. 12.44. Dicho diagrama se completó obteniendo la corriente total como:

$$\bar{I} = \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

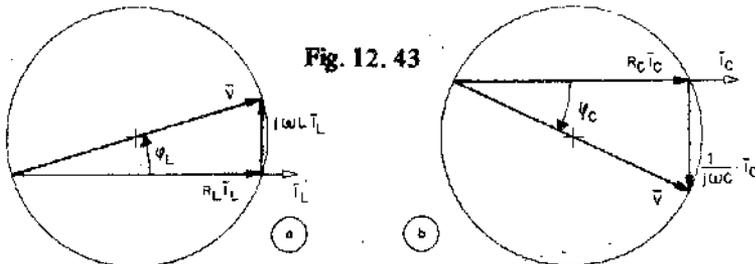


Fig. 12.43

apareciendo un desfase entre tensión y corriente φ que depende de los valores adoptados para φ_L y φ_C .

Además, tanto la corriente \bar{I} , \bar{I}_C e \bar{I}_L se han descompuesto en sus componentes conductivas y susceptivas que corresponden.

En dicho diagrama se observa que, en el caso particular que *tensión y corriente estén en fase* se cumple que:

$$\varphi = 0$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{B_C} + \bar{I}_{B_L} = 0$$

$$\bar{I} \equiv \bar{I}_C$$

y a este estado particular del circuito se lo denomina *resonancia paralelo de factor de potencia unitario*, donde el circuito se comporta como resistivo puro, y la corriente total \bar{I} es la que circula por la conductancia total que se muestra en la Fig. 12.42.b). La corriente total en las ramas no disipativas se anulará pues las componentes tendrán igual módulo y argumentos opuestos, aunque es obvio que individualmente no son nulas.

Es oportuno recordar que para el circuito resonante serie analizado en el párrafo 12.2 para el estado de resonancia se tenía simultáneamente el mínimo valor de impedancia y la condición de *factor de potencia unitario*. Por otra parte para su dual, estudiado en el párrafo 12.3, se tenía naturalmente que en resonancia, la condición de admitancia mínima y *factor de potencia unitario* se cumplían simultáneamente.

Excepto los dos circuitos anteriormente mencionados, en general, y específicamente para el circuito resonante paralelo de dos ramas en análisis, las dos condiciones no siempre se obtienen simultáneamente, y es por ello que pueden definirse *dos tipos de resonancia*; la de *factor de potencia unitario* y la de *admitancia mínima*, como se mencionó en el análisis cualitativo precedente.

El análisis se continuará considerando la condición de *factor de potencia unitario*.

Según se indicó anteriormente, la *condición de resonancia de factor de potencia unitario* puede expresarse como:

$$\cos \varphi = 1 \therefore \varphi = 0$$

$$B = B_C - B_L = 0 \therefore B_C = B_L$$

$$\bar{I}_B = 0 \therefore I_B = 0$$

$$\bar{I}_{B_L} = \bar{I}_{B_C} \therefore I_{B_L} = I_{B_C}$$

y según se observa en el diagrama de la Fig. 12.44 que la condición $I_L = I_C$ no tiene por que corresponder a un estado de resonancia de factor de potencia unitario. Lo que debe igualarse son las componentes no disipativas de dichas corrientes, de manera que la corriente total del circuito sea disipativa pura. Lo anteriormente expresado constituye también una aclaración para la construcción de los gráficos realizados en el análisis cualitativo del párrafo 12.5.1). Además, como se vio $\varphi = 0$ implica que $I_{B_L} = I_{B_C}$, y que en general $I_L \neq I_C$. Si se desea cumplir que $I_L = I_C$ deberá verificarse que $Y_L = Y_C$. Como en resonancia $B_L = B_C$ para que las admitancias sean de igual módulo deberá cumplirse que $G_L = G_C$, lo que en la práctica no se cumple. Lo que puede asegurarse que se cumple es que $I_{B_L} = I_{B_C}$; en consecuencia la resonancia se define por las componentes que se anulan.

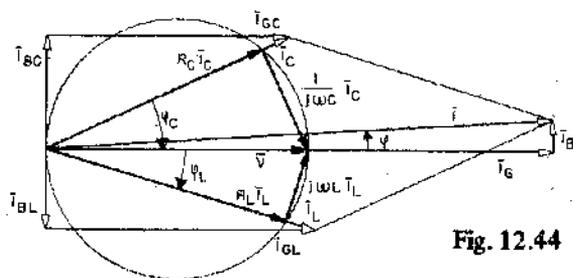


Fig. 12.44

En el caso particular e *ideal*, en el cual $R_L = R_C = 0$, de la Ec. (12.78) surge que las conductancias equivalentes $G_L = G_C = 0$, por lo cual se anularía la corriente total, es decir que el circuito no absorbería corriente del generador, pero recuérdese que en las ramas del circuito las corrientes no serían nulas. En este caso hipotético existiría intercambio de energía del inductor al capacitor y viceversa en forma indefinida. Dado que en la resonancia en estudio se cumple que $B = 0$; de la Ec. (12.78) resulta:

$$\frac{1/\omega C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \text{ por lo cual,}$$

$$\frac{R_L^2}{\omega C} + \frac{\omega L^2}{C} = R_C^2 \omega L + \frac{L}{\omega C^2}$$

multiplicando ambos miembros por ωC^2 y operando:

$$R_L^2 C + \omega^2 L^2 C - R_C^2 \omega^2 L C^2 - L = 0 \quad (12.81)$$

La Ec. (12.81) es la condición que debe cumplirse para que el circuito se encuentre en resonancia de factor de potencia unitario.

Los circuitos estudiados hasta el presente pueden llevarse a resonancia, variando el valor de los elementos reactivos o bien la frecuencia. De la Ec. (12.81) se observa que en el presente circuito en estudio, se podrá alcanzar la resonancia modificando el valor de los elementos resistivos.

Si a partir de la Ec. (12.81) se supone que *varia la resistencia de la rama inductiva* con el objeto de llevar el circuito a resonancia, despejando de la misma dicho parámetro se encuentra que el valor de resistencia que se designa como R_{L_0} resulta:

$$R_{L_0} = \sqrt{R_C^2 \omega^2 L C + \frac{L}{C} - \omega^2 L^2} \quad (12.82)$$

si en cambio se *varía la resistencia de la rama capacitiva*, resulta:

$$R_{C_0} = \sqrt{\frac{R_L^2}{\omega^2 L C} + \frac{L}{C} - \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (12.83)$$

De las Ecs. (12.82) y (12.83) se deduce que existirá un solo valor de R_L o R_C que lleve el circuito a resonancia.

Si se *modifica el valor de inductancia*, resulta:

$$L_0 = \frac{1}{2} C \left(Z_C^2 \pm \sqrt{Z_C^4 - 4 X_C^2 R_L^2} \right) \quad (12.84)$$

$$\text{con } Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2}$$

De la Ec. (12.84) se desprende que si:

$Z_C^4 > 4 X_C^2 R_L^2$ existirán dos valores de inductancia que lleven el circuito a resonancia.

$Z_C^4 = 4 X_C^2 R_L^2$ existirá un solo valor de inductancia que lleve el circuito a resonancia.

$Z_C^4 < 4 X_C^2 R_L^2$ no existirá ningún valor de inductancia que lleve el circuito a resonancia.

Si lo que se modifica es el valor de la capacitancia, resulta:

$$C_0 = 2L \left(\frac{1}{Z_L^2 + \sqrt{Z_L^4 - 4X_L^2 R_C^2}} \right) \quad (12.85)$$

$$\text{con } Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2}$$

De la Ec. (12.85) se desprende que si:

$Z_L^4 > 4 X_L^2 R_C^2$ existirán dos valores de capacidad que lleven al circuito a resonancia.

$Z_L^4 = 4 X_L^2 R_C^2$ existirá un sólo valor de capacidad que lleve el circuito a resonancia.

$Z_L^4 < 4 X_L^2 R_C^2$ no existirá ningún valor de capacidad que lleve el circuito a resonancia.

Si finalmente, lo que se *varía es la frecuencia* de la tensión provista por el generador, la pulsación que lleva al circuito a resonancia, que se designa como ω'_0 resulta, despejando de la Ec. (12.81).

$$\omega'^2_0 = \frac{R_L^2 C - L}{R_C^2 L C^2 - L^2 C} \quad \therefore$$

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 C - L}{R_C^2 C - L}} \quad (12.86)$$

De la Ec. (12.86) se desprende que si $R_L = R_C = 0$ será:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

es decir, que la frecuencia de resonancia coincide con la hallada para el circuito resonante paralelo estudiado en el parágrafo 12.3. Nótese que en forma aproximada se verifica lo mismo si:

$$\begin{cases} R_L^2 C \ll L \\ R_C^2 C \ll L \end{cases}$$

esto en realidad implica bajos valores de resistencia y altos de inductancia lo que da lugar a factores de selectividad elevados. En consecuencia, en aquellos circuitos

en los cuales Q_0 sea elevado; por ejemplo mayor que 10, puede decirse que $\omega'_0 \approx \omega_0$.

En el caso que el circuito en estudio resulte del modelo circuital idealizado correspondiente a la conexión en paralelo de un inductor y un capacitor reales, se cumplirá que $R_L > R_C$ y en consecuencia $\omega'_0 > \omega_0$.

Además, dado ω'_0 debe ser un número real y positivo, el circuito podrá llevarse a resonancia, variando la frecuencia si se cumple que:

$$\begin{cases} R_L^2 C > L \\ R_C^2 C > L \end{cases}$$

o bien que:

$$\begin{cases} R_L^2 C < L \\ R_C^2 C < L \end{cases}$$

Si por otra parte se verifica que:

$$\begin{cases} R_L^2 C > L \\ R_C^2 C < L \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} R_L^2 C < L \\ R_C^2 C > L \end{cases}$$

resulta que ω'_0 es imaginaria. En otras palabras, no existirá ninguna frecuencia que lleve el circuito a resonancia.

En consecuencia, del análisis realizado en las Ecs. (12.84), (12.85) y (12.86), se desprende que para el circuito en estudio no siempre es factible la existencia de un estado de resonancia de factor de potencia unitario.

b) Resonancia a todas las frecuencias

Un estado muy especial del circuito en estudio puede derivarse a partir de la Ec. (12.86). Si en la misma se hace cumplir simultáneamente que:

$$\begin{cases} R_L^2 C = L \\ R_C^2 C = L \end{cases}$$

o lo que es lo mismo,

$$R_L = R_C = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12.87)$$

resulta que ω_0 es indeterminada. Es interesante entonces, encontrar el significado desde el punto de vista circuital de dicha indeterminación. Como ya se expuso, para que el circuito se encuentre en resonancia, debe cumplirse que $B = 0$, y de la Ec. (12.78) resulta:

$$\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}$$

operando,

$$\frac{1}{\omega C R_C^2 + \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{\frac{R_L^2}{\omega L} + \omega L} \quad (12.88)$$

reemplazando la condición dada por la Ec. (12.87) en la Ec. (12.88) será:

$$\frac{1}{\omega L + \frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C} + \omega L} \quad (12.89)$$

Obviamente, la igualdad indicada por la Ec. (12.89) se cumple para todas las frecuencias, es decir, que la susceptancia total del circuito será nula e independiente de la frecuencia que imponga el generador. En otras palabras, el circuito se presenta en estado de resonancia de factor de potencia unitario para todas las frecuencias.

El valor de la admitancia que presenta el circuito en cuestión, cuando se cumple la condición dada por la Ec. (12.87) puede encontrarse a partir de la Ec. (12.88).

Por estar en resonancia será $B = 0$, en consecuencia la admitancia será conductiva pura, y en consecuencia:

$$\bar{Y}_0 = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

reemplazando la condición dada por la Ec. (12.87):

$$\bar{Y}_0 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} + \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad \therefore$$

$$\bar{Y}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\frac{1}{\frac{L}{C}} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 L C} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 L C}} \right) \right]$$

por lo cual,

$$\bar{Y}_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{1 + \frac{1}{\omega^2 L C} + 1 + \omega^2 L C}{1 + \omega^2 L C + \frac{1}{\omega^2 L C} + 1} \right] \therefore$$

$$\bar{Y}_0 = Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (12.90)$$

La Ec. (12.90) da el valor de la admitancia que presenta el circuito cuando se cumple la Ec. (12.87). Como es de esperar, cuando se verifica dicha condición el circuito no es selectivo, en consecuencia la expresión de la admitancia debe ser una constante, no dependiente de la frecuencia.

La relación dada por la Ec. (12.87) se conoce como *condición de compensación*, y se emplea en la práctica para construir un resistor casi ideal a partir de dos resistores, un inductor y un capacitor reales.

Debe recordarse que el estado particular del circuito recientemente analizado fue presentado ya en el Cap. 8, problema 8.9.4) y en el Cap. 9, problema 9.6.4).

12.5.3) Circuito resonante paralelo de dos ramas simplificado: Es de práctica normal, que al formar un circuito resonante paralelo, la resistencia de pérdidas del capacitor sea comparativamente despreciable frente a la del inductor. Es decir, que como se expresó en el parágrafo 12.2.3), en el circuito mostrado en la Fig. 12.39 podrá despreciarse R_C , llegándose al circuito ilustrado en la Fig. 12.45. Nótese que el factor de selectividad para dicho modelo coincidirá con el factor de mérito del inductor real calculado a la frecuencia de resonancia.

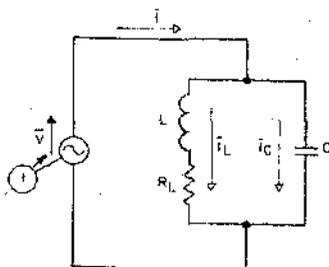


Fig. 12.45

En adelante, se resumirán los principales aspectos del comportamiento de este circuito resonante, cuando varíe la frecuencia y para la condición de resonancia de factor de potencia unitario.

Se emplearán las ecuaciones deducidas en el párrafo anterior, imponiendo la condición $R_C = 0$.

De la Ec. (12.78), la admitancia resulta:

$$\bar{Y} = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) \quad (12.91)$$

y de la última ecuación surge el valor de la admitancia que el circuito presenta en resonancia,

$$\bar{Y}_0 = Y_0 = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega_0'^2 L^2} \quad (12.92)$$

una conclusión interesante puede obtenerse a partir de la Ec. (12.92). Operando en la misma:

$$\bar{Y}_0 = \frac{1}{R_L + \frac{\omega_0'^2 L^2}{R_L}} \quad (12.93)$$

En virtud de lo expresado al comienzo del párrafo, el factor de selectividad del circuito podrá calcularse como:

$$Q_0 = \frac{\omega_0' L}{R_L} \quad (12.94)$$

Insertando la Ec. (12.94) en la Ec. (12.93):

$$\bar{Y}_0 = \frac{1}{R_L (1 + Q_0^2)} \quad (12.95)$$

por lo que la impedancia que presenta el circuito en resonancia será:

$$\bar{Z}_0 = R_L (1 + Q_0^2) \quad (12.96)$$

si $Q_0 \gg 1$; por ejemplo $Q_0 \gg 10$; con error $\ll 1$ por ciento, será:

$$\bar{Z}_0 \approx Q_0^2 R_L \quad (12.97)$$

lo que indica que la impedancia que presenta el circuito de resonancia es Q_0^2 veces la resistencia de pérdidas del inductor real.

De la Ec. (12.86) se encuentra la pulsación que lleva el circuito a resonancia:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \quad (12.98)$$

Anulando la parte imaginaria de la Ec. (12.91) resulta:

$$\omega'_0 C = \frac{\omega'_0 L}{R_L^2 + \omega'^2_0 L^2}$$

de donde,

$$\frac{C}{L} = \frac{1}{R_L^2 + \omega'^2_0 L^2} \quad (12.99)$$

Reemplazando la Ec. (12.99) en la Ec. (12.98), se obtiene:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2}{R_L^2 + \omega'^2_0 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{\omega'^2_0 L^2}{R_L^2}}} \quad (12.100)$$

y teniendo en cuenta la Ec. (12.94), resulta:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2 + 1}} \quad (12.101)$$

si $Q_0 \geq \frac{10}{\sqrt{2}}$ será, con un error ≤ 1 por ciento.

$$\omega'_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0 \quad (12.102)$$

Por otra parte, la corriente de resonancia será:

$$\bar{I}_0 = \bar{V} \bar{Y}_0 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_0}$$

que por la Ec. (12.97) resulta:

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}}{Q_0^2 R_L} \quad (12.103)$$

cuyo módulo es:

$$I_0 = \frac{V}{Q_0^2 R_L} \quad (12.104)$$

El módulo de la corriente en la rama inductiva es:

$$I_{L_0} = \frac{V}{\sqrt{R_L^2 + \omega'_0{}^2 L^2}} = \frac{V}{R_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega'_0 L}{R_L}\right)^2}} = \frac{V}{R_L} \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2}}$$

que si $Q_0 \geq \frac{10}{\sqrt{2}}$ resulta:

$$I_{L_0} \approx \frac{V}{R_L} \frac{1}{Q_0} \quad (12.105)$$

y en la rama capacitiva, teniendo en cuenta la Ec. (12.99) operando:

$$I_{C_0} = V \omega'_0 C = V \omega'_0 \frac{L}{R_L^2 + \omega'_0{}^2 L^2} \frac{R_L^2}{R_L^2} = \frac{V}{R_L} \frac{\omega'_0 L}{R_L} \frac{1}{1 + \frac{\omega'_0{}^2 L^2}{R_L^2}}$$

$$I_{C_0} = \frac{V}{R_L} \frac{Q_0}{1 + Q_0^2} \quad \text{y si } Q_0 \geq 10 \text{ resulta } I_{C_0} = \frac{V}{R_L} \frac{1}{Q_0} \quad (12.106)$$

relacionando las Ecs. (12.104), (12.105) y (12.106), se desprende que en resonancia:

$$I_{L_0} = I_{C_0} = Q_0 I_0 \quad (12.107)$$

Recuérdese que la Ec. (12.107) derivó del hecho de superar $Q_0 \geq 10$. La ecuación indica que la corriente que circula por las ramas del circuito es la misma, y de valor Q_0 veces la que toma el circuito en resonancia. Naturalmente, que las componentes de corrientes en cada rama están opuestas en fase. De lo expuesto anteriormente se deduce que imponiendo la condición $Q_0 \geq 10$, bastante real

por otra parte, este circuito resonante paralelo práctico se comporta en forma muy aproximada al circuito resonante paralelo de tres ramas, que como ya se analizó constituye el dual del circuito resonante serie. En consecuencia, podrán extenderse adecuadamente los resultados encontrados para el mismo, aplicando el principio de dualidad.

Debido a esto, puede utilizarse, adecuándola convenientemente, la curva universal de resonancia deducida para el circuito resonante serie, para sus duales.

12.6 Circuitos con resonancia múltiple

Hasta el presente se examinó el comportamiento del circuito R L C resonante serie, su dual y el circuito resonante paralelo de dos ramas. En todos los casos mencionados sólo se identifica una malla reactiva $L C$ en el modelo circuítal, y en consecuencia se encontró una sola pulsación de resonancia de factor de potencia unitario. Cuando se puedan identificar n mallas reactivas $L C$ el circuito poseerá n pulsaciones que lleven el mismo al estado de resonancia; lo que se pondrá en evidencia más adelante. Estos tipos de circuitos se denominan *circuitos con resonancia múltiple*.

Como analizar el comportamiento de estos circuitos resulta complicado, es conveniente introducir alguna *simplificación*. En consecuencia, es de práctica normal *despreciar las resistencias asociadas a los elementos reactivos*, con lo cual se simplifica el análisis al convertirse los modelos en reactivos puros.

Es oportuno aclarar que el propósito de este párrafo es analizar superficialmente estos circuitos, luego generalizar el problema mediante el Teorema de Foster y no profundizar sobre el tema, cuyo estudio específico puede encontrarse en los tratados sobre síntesis de circuitos.

Considérese, por ejemplo el circuito mostrado en la Fig. 12.46. En la Fig. 12.47.a) se grafican las reactancias $X_{L_1} = \omega L_1$ y $-X_{C_1} = -\frac{1}{\omega C_1}$ y su suma indicada como X_1 . Se observa que dicha rama presenta un estado de resonancia serie para una pulsación indicada como ω_s .

En la Fig. 12.47.b) se invierte la reactancia X_1 obteniendo los componentes B_1 . En la misma se dibuja la reactancia $B_{C_2} = \omega C_2$, que se suma a los

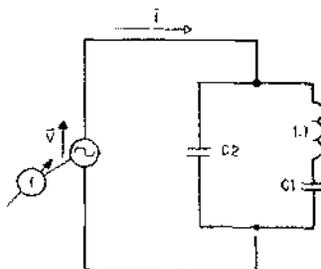


Fig. 12.46

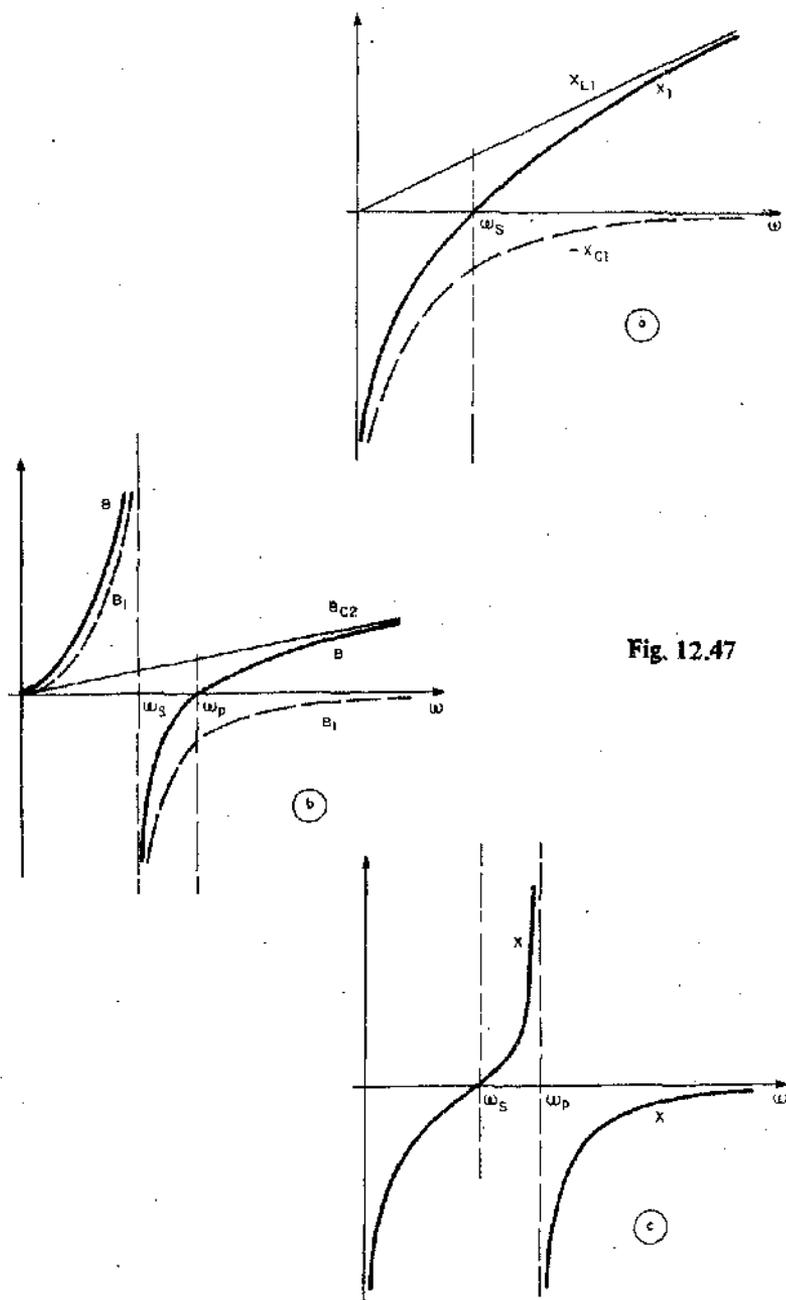


Fig. 12.47

componentes B_1 , dado que es una asociación en paralelo, obteniendo las curvas de la susceptancia indicadas con B . Nótese que el circuito presenta un estado de resonancia paralelo para una pulsación indicada como ω_p .

En la Fig. 12.47.c) se invierten las curvas de susceptancia, obteniéndose las correspondientes a la reactancia total del circuito X . Se observa que el generador excitador y la rama compuesta por $L_1 - C_1$ conforman un circuito resonante serie que, asociado con C_2 , resulta una malla resonante paralelo, existiendo en consecuencia dos frecuencias de resonancia, como se anticipó al principio de este párrafo.

Como puede apreciarse también en la Fig. 12.47.c), ω_S es una pulsación de resonancia serie dado que para la misma, la impedancia total del circuito es nula, por lo que a dicha pulsación se la considera como un *cero*. Además, ω_p es una pulsación de resonancia paralelo pues para la misma la impedancia total del circuito es infinita, por lo que a dicha pulsación se la tomará como un *polo*.

Teniendo en cuenta la simplificación efectuada anteriormente, es decir trabajar con elementos ideales, las mencionadas pulsaciones pueden determinarse de la siguiente manera. La impedancia del circuito ilustrado en la Fig. 12.46 puede calcularse como:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \therefore$$

$$\bar{Z} = \frac{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(-j \frac{1}{\omega C_2}\right)}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = -j \frac{1}{\omega C_2} \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

por lo cual:

$$\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C_2} \frac{\frac{L_1}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_1}\right)}{\frac{L_1}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{L_1 C_2}\right)}$$

$$\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C_2} \frac{\left(\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_1}\right)}{\left[\omega^2 - \left(\frac{L_1 C_2 + L_1 C_1}{L_1 C_1 C_2}\right)\right]} \quad \text{en consecuencia}$$

$$\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C_2} \frac{\left(\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_1}\right)}{\left[\omega^2 - \frac{(C_1 + C_2)}{L_1 C_1 C_2}\right]} \quad (12.108)$$

De la Ec. (12.108) se desprende que la pulsación de resonancia serie al definirse para $\bar{Z} = 0$ resultará cuando:

$$\omega_s^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_1^2 \therefore$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (12.109)$$

Además, la pulsación de resonancia paralelo, como se define para $\bar{Z} \rightarrow \infty$, se dará cuando:

$$\omega_p^2 = \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} = \omega_2^2 \therefore$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}} \quad (12.110)$$

Reemplazando las Ecs. (12.109) y (12.110) en la Ec. (12.108) se obtiene que:

$$\bar{Z} = -j \frac{1}{\omega C_2} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \right] \quad (12.111)$$

donde evidentemente $\omega_2 > \omega_1$.

La Ec. (12.111) se ha derivado al analizar el circuito ilustrado en la Fig. 12.46. Por el mismo procedimiento puede estudiarse el circuito mostrado en la Fig. 12.48, que es el dual del ilustrado en la Fig. 12.46. Aplicando el *principio de dualidad a los resultados obtenidos anteriormente*, de la Ec. (12.111) resulta que:

$$\bar{Y} = -j \frac{1}{\omega L_2} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \right] \therefore$$

$$\bar{Z} = j \omega L_2 \left[\frac{(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)} \right] \quad (12.112)$$

además de la Ec. (12.109):

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}} \quad (12.113)$$

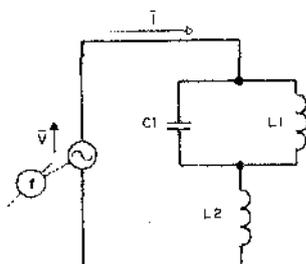


Fig. 12.48

y de la Ec. (12.110):

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_1 L_1 L_2}} \quad (12.114)$$

pero adviértase que en este caso ω_1 es un polo, mientras que ω_2 es un cero, y además que $\omega_2 > \omega_1$. De la observación de las Ecs. (12.111) y (12.112) se desprende que son formalmente iguales. En particular difieren por el sub-índice de las pulsaciones y el coeficiente de las mismas.

Puede demostrarse que la expresión de la impedancia para un dipolo sin pérdidas responde a:

$$\bar{Z} = \bar{A}_0 \frac{(\omega^2 - \omega_{Z1}^2)(\omega^2 - \omega_{Z2}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{Zk}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{Zm}^2)}{(\omega^2 - \omega_{P1}^2)(\omega^2 - \omega_{P2}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{Pk}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{Pn}^2)} \quad (12.115)$$

en la cual $\bar{A}_0 = j \omega K$ ó $\bar{A}_0 = -j \frac{K}{\omega}$

De la Ec. (12.115) se observa que cada pulsación ω_{ZK} es un cero, pues para $\omega = \omega_{ZK}$ la impedancia se anula. Estas pulsaciones se denominan *ceros*

internos, que resultan valores finitos y no nulos. También cada pulsación ω_{pK} es un polo interno, pues para $\omega = \omega_{pK}$ la impedancia se hace infinita.

Todas estas consideraciones desembocan en el llamado *Teorema de las reactivancias* o *Teorema de Foster* que indica que la impedancia de excitación de todo dipolo sin pérdidas está unívocamente definida por sus polos y ceros internos, los que corresponden a pulsaciones reales, además de un factor de escala K .

Si se observan las curvas de reactivancias ilustradas en la Fig. 12.47, es evidente que tendrán siempre pendiente positiva y puesto que la impedancia sólo cambia de signo en los polos y en los ceros resulta que los polos y ceros de un dipolo sin pérdidas ocupan posiciones alternadas sobre el eje de pulsaciones, que es la llamada propiedad de separación. Como consecuencia de esta propiedad resulta que el número de ceros y polos internos de la función reactivancia serán iguales o diferirán en una unidad.

En lo sucesivo se ordenarán los subíndices de las singularidades de tal manera que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, etc. En consecuencia convendrá presentar la Ec. (12.115) de las dos formas posibles, de acuerdo con la forma que adopte el factor A_0 .

Si en particular $A_0 = j\omega K$, resulta que para la componente de continua, o lo que es lo mismo para $\omega = 0$, la impedancia será nula, lo que constituye un cero externo. Debido a la propiedad de separación, si en $\omega = 0$ existe un cero, la siguiente singularidad ω_1 debe ser un polo, y luego se alternarán las singularidades, por lo que la Ec. (12.115) resulta:

$$\bar{Z} = j\omega K \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2n}^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2n+1}^2)} \quad (12.116)$$

Si por otra parte $A_0 = -j\frac{K}{\omega}$; para $\omega = 0$, o sea para la componente de continua, la impedancia tiende a un valor infinito, lo que constituye un polo externo en el origen. En consecuencia, debido a la propiedad de separación, si en $\omega = 0$ existe un polo, la siguiente singularidad ω_1 debe ser un cero, y luego se alternan las singularidades, por lo que la Ec. (12.115) resulta:

$$\bar{Z} = -j\frac{K}{\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2m+1}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)\cdots(\omega^2 - \omega_{2m}^2)} \quad (12.117)$$

Del examen de las Ecs. (12.116) y (12.117) se desprende que, al poder ser n y m iguales o diferir en la unidad, y puesto que existen dos ecuaciones y dos posibilidades en cada una de ellas, la impedancia poseerá cuatro posibles formas de realización. En otras palabras, pueden obtenerse sólo cuatro distintos tipos de curvas de reactivancia para los dipolos sin pérdidas.

Como se aclaró al principio del párrafo, el objetivo del mismo es presentar básicamente el tema, por lo cual el lector debe remitirse a los textos específicos para el tratamiento de la síntesis de las redes de Foster.

Es interesante aclarar, sin embargo, que las redes de Foster se consideran como formas canónicas, dado que emplean un número mínimo de elementos para sintetizar una curva de reactancia dada. Además, existen otras estructuras canónicas para sintetizar dipolos sin pérdidas llamadas redes de Cauer. La elección de una u otra forma se basa en razones de orden tecnológico y económico.

Finalmente, puede inferirse que cuando se desea sintetizar dipolos que incluyen elementos disipativos, en lugar de polos y ceros deberán considerarse máximos y mínimos de la función reactancia, lo cual complica mucho el problema.

12.7 Análisis de la resonancia de un circuito R L C serie en base a su diagrama de polos y ceros

Se realizará el análisis del circuito mencionado en el dominio transformado de Laplace para condiciones iniciales nulas con el objeto de simplificar el análisis. Además, a efectos de reducir la expresión se alegrará para el estudio a una sola variable. Para las demás se siguen procedimientos similares.

a) Determinación de la función del sistema y su diagrama de polos y ceros

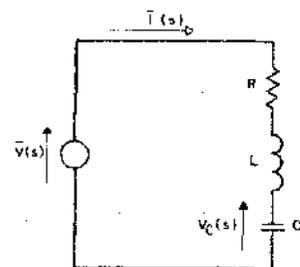


Fig. 12.49

Considérese el circuito ilustrado en la Fig. 12.49. Se elige como función de estudio a la transferencia de tensiones sobre el capacitor, a saber:

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} \quad (12.118)$$

Aplicando los conceptos de divisor de tensión, la Ec. (12.118) puede expresarse implícitamente como:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$H(s) = \frac{1}{sCR + s^2LC + 1}$$

dividiendo numerador y denominador por LC a efectos de hacer la unidad el coeficiente del término en s de mayor grado resulta:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (12.119)$$

donde los polos de $H(s)$ son los ceros del polinomio denominador, que resultan de hacer:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

cuyas raíces resultan:

$$p_{1-2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (12.120)$$

De los tres tipos posibles de raíces a obtener, se elegirá el caso de complejos conjugados, dado que interesa analizar el caso donde se produce la resonancia, es decir el régimen oscilatorio. Para ello debe cumplirse que:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad (12.121)$$

reemplazando la condición impuesta por la Ec. (12.121) en la Ec. (12.120) surge que:

$$p_{1-2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (12.122)$$

$$\text{Si se llama } \frac{R}{2L} = \alpha \text{ y } \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \beta$$

la Ec. (12.122) toma el aspecto:

$$p_{1-2} = -\alpha \pm j\beta \quad (12.123)$$

$$\begin{aligned} \text{además } \alpha^2 + \beta^2 &= \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \therefore \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \end{aligned} \quad (12.124)$$

Reemplazando la Ec. (12.124) en la Ec. (12.119), y si en la misma se factora el polinomio denominador en sus raíces según el resultado obtenido en la Ec. (12.123) resulta que:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \therefore \\ H(s) &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{[s + (\alpha - j\beta)][s + \alpha(\alpha + j\beta)]} \end{aligned} \quad (12.125)$$

donde $\alpha^2 + \beta^2$ resulta una constante.

La Ec. (12.125) indica que el diagrama de polos y ceros asociado estará constituido por un par de polos complejos conjugados con parte real negativa que se muestra en la Fig. 12.50.

Es evidente, que conocidos α y β , en base a la Ec. (12.124) puede determinarse la pulsación de resonancia como:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (12.126)$$

en consecuencia, disponiendo del diagrama de polos y ceros, dicha pulsación puede determinarse por proyección sobre el eje imaginario de la hipotenusa correspondiente al triángulo que tiene por lados a α y β . Prácticamente puede efectuarse dicha proyección con un compás, donde un extremo se fija en el eje de coordenadas y otro en el polo en cuestión según se ilustra en la Fig. 12.51.

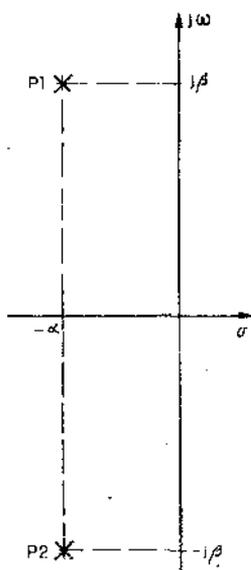


Fig. 12.50

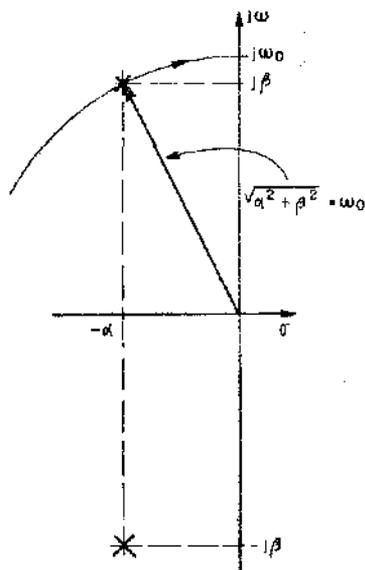


Fig. 12.51

En base a los resultados obtenidos puede hallarse una expresión para el factor de selectividad en función de α y β . Por la Ec (12.3), que se reproduce es:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (12.3)$$

además $\alpha = \frac{R}{2L} \therefore R = 2\alpha L$ (12.127)

en consecuencia, reemplazando las Ecs. (12.126) y (12.127) en la Ec. (12.3) será:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} \quad (12.128)$$

Una conclusión interesante puede derivarse relacionando la Ec. (12.128) con la Ec. (12.9), es decir:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \therefore \Delta\omega = 2\alpha \quad (12.129)$$

es decir, que el ancho de banda de la curva de la corriente resulta el doble de la distancia de los polos al eje imaginario.

- b) Obtención de la frecuencia correspondiente al máximo de la función, las frecuencias de corte y las amplitudes de la función que corresponde.

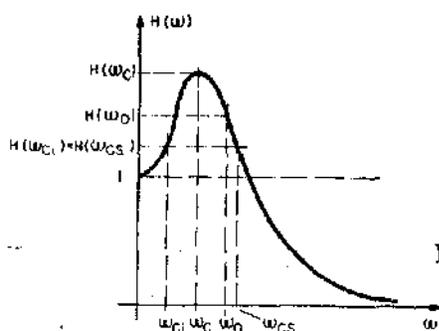


Fig. 12.52

Como se ilustra en la Fig. 12.52 debe conocerse el valor de ω_0 y el correspondiente de amplitud $H(\omega_0)$. Además interesa conocer la pulsación ω_c correspondiente al máximo de la función, y la amplitud de la misma $H(\omega_c)$ como así también las frecuencias de corte y las amplitudes de la función correspondientes a esas frecuencias. Adicionalmente es útil conocer también el valor de la función en el origen $H(0)$ y en el infinito $H(\infty)$.

De lo expresado anteriormente se deduce que, deseando conocer la respuesta en frecuencia, según se expuso en el Cap. 11, en la Ec. (12.125) debe tomarse el límite para $s \rightarrow j\omega$ ó bien $\sigma \rightarrow 0$, obteniéndose:

$$\bar{H} = H(j\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{[j\omega + (\alpha - j\beta)][j\omega + (\alpha + j\beta)]}$$

$$\bar{H} = H(j\omega) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{[\alpha + j(\omega - \beta)][\alpha + j(\omega + \beta)]} \quad (12.130)$$

Si de la Ec. (12.130) se toma su módulo resulta:

$$|H(j\omega)| = H(\omega) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\omega - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega + \beta)^2]}} \quad (12.131)$$

A partir de la Ec. (12.131) en forma analítica, o en el conocimiento del diagrama de polos y ceros en forma gráfica, podrán determinarse los valores indicados en la Fig. 12.52 de la siguiente manera:

b.1) ω_0 y $H(\omega_0)$

Como se explicó anteriormente, la pulsación de resonancia puede determinarse analíticamente con la Ec. (12.126) que se reproduce:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (12.126)$$

y que gráficamente se corresponde con el segmento \overline{OB} u \overline{OC} según se indica en la Fig. 12.53.

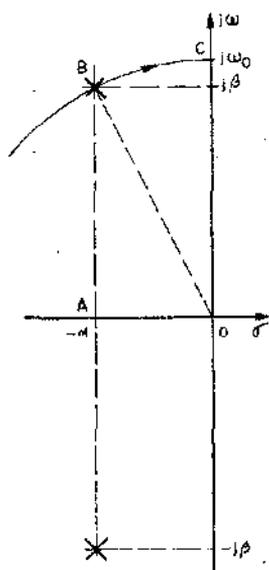


Fig. 12.53

Por otra parte por la Ec. (12.7) es:

$$Q_0 = \frac{Vc_0}{V} = H(\omega_0) \quad (12.132)$$

y de la Ec. (12.8) también $Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$ (12.8)

relacionando la Ec. (12.132) con la Ec. (12.8):

$$H(\omega_0) = Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \quad (12.133)$$

Reemplazando en la Ec. (12.133) las Ecs. (12.126) y (12.129) resulta la expresión analítica para el cálculo de la amplitud de la función para la pulsación de resonancia:

$$H(\omega_0) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} \quad (12.134)$$

que en forma gráfica puede determinarse relacionando la Ec. (12.134) con la Fig. (12.53) resultando:

$$H(\omega_0) = \frac{\overline{OB}}{2 \overline{OA}} \quad (12.135)$$

b.2) ω_C y $H(\omega_C)$

En forma analítica ω_C puede encontrarse a partir de la Ec. (12.131) que se reproduce:

$$H(\omega) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\omega - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega + \beta)^2]}} \quad (12.131)$$

y el máximo de dicha función resultará para cuando $\frac{dH(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_C$.

Dado que $\alpha^2 + \beta^2 = cte = A_0$, se pasa a derivar solamente la cantidad sub-radical.

$$\frac{d}{d\omega} [(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)[\alpha^2 + (\omega + \beta)^2]] = 0$$

$$2(\omega_C - \beta)[\alpha^2 + (\omega_C + \beta)^2] + [\alpha^2 + (\omega_C - \beta)^2] 2(\omega_C + \beta) = 0 \therefore$$

$$(\omega_C - \beta)\alpha^2 + (\omega_C - \beta)(\omega_C + \beta)^2 + (\omega_C + \beta)\alpha^2 + (\omega_C + \beta)(\omega_C - \beta)^2 = 0 \text{ por lo cual}$$

$$\alpha^2(\omega_C - \beta + \omega_C + \beta) + (\omega_C - \beta)(\omega_C^2 + \beta^2 + 2\omega_C\beta) + (\omega_C + \beta)(\omega_C^2 + \beta^2 - 2\omega_C\beta) = 0$$

operando con la última expresión se llega:

$$2\alpha^2\omega_C + 2\omega_C^3 - 2\omega_C\beta^2 = 0 \therefore$$

$\alpha^2 + \omega_C^2 - \beta^2 = 0$ en consecuencia la pulsación correspondiente al máximo de la función resulta:

$$\omega_C = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad (12.136)$$

En forma gráfica puede determinarse relacionando la última ecuación con la Fig. 12.54. De lo cual resulta que:

$$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 \quad \therefore \quad \overline{AD}^2 = \beta^2$$

$$\overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{OA}^2 \quad \text{y como} \quad \overline{OA} = \alpha^2$$

resulta que $\omega_C = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{OA}^2}$ (12.137)

por lo que ω_C puede determinarse también con un compás, uno de cuyos extremos esté en el punto A y el otro en el polo o punto B y proyectando sobre el eje imaginario.

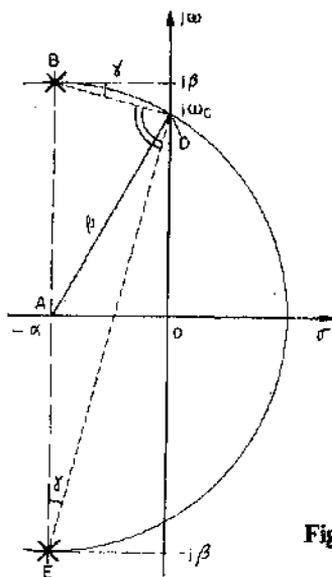


Fig. 12.54

En lo que respecta a la amplitud que corresponde, puede determinarse en forma gráfica de acuerdo a lo expuesto en el Cap. 11 y de la Fig. 12.54 resulta:

$$H(\omega_C) = \frac{A_0}{\overline{BD} \overline{ED}}$$

pero de la Ec. (12.131) es $A_0 = \alpha^2 + \beta^2 = \overline{OB}$ por lo cual:

$$H(\omega_C) = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD} \overline{ED}} \quad (12.138)$$

Análiticamente podrá determinarse reemplazando en la Ec. (12.138) los valores de los segmentos que surgen de analizar la Fig. 12.54.

$$\overline{OB} = \alpha^2 + \beta^2 \quad (12.139)$$

$$\overline{BD} = \frac{\alpha}{\cos \gamma} \quad (12.140)$$

$$\overline{ED} = 2 \beta \cos \gamma \quad (12.141)$$

reemplazando las Ecs. (12.139), (12.140) y (12.141) en la Ec. (12.138) será:

$$H(\omega_C) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2 \alpha \beta} \quad (12.142)$$

Previo a continuar el estudio, es oportuno analizar los distintos casos que se presentan para las diferentes relaciones entre la parte real e imaginaria de los polos complejos conjugados. En la Fig. 12.55 se ha graficado para tres posibles relaciones.

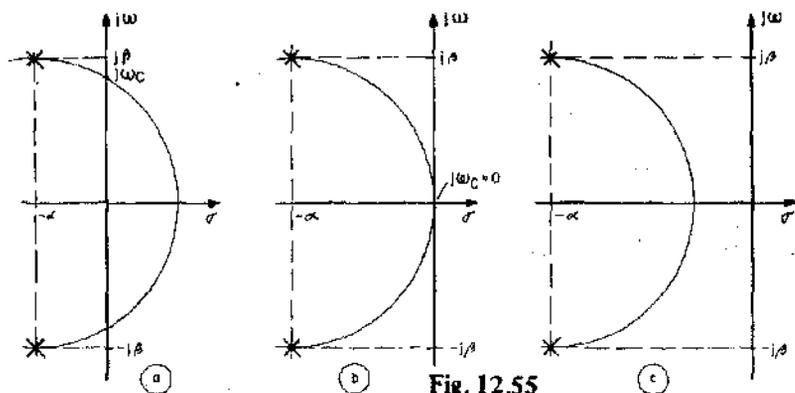


Fig. 12.55

El caso a) corresponde para $\beta > \alpha$. Dado que:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} \quad (12.128)$$

es evidente que por la condición impuesta, esto sucede para Q_0 elevados. Nótese que cuanto mayor sea β respecto de α , o sea cuanto mayor sea el Q_0 , más se aproximará ω_C a ω_0 .

El caso b) corresponde para $\beta = \alpha$ en el cual $\omega_C = 0$. Reemplazando la condición impuesta en la Ec. (12.128) resulta:

$$Q_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalmente, en el caso c) en el cual $\beta < \alpha$; no puede determinarse ω_C , que se da evidentemente para $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Es importante relacionar los resultados recientemente obtenidos con los encontrados al realizar el análisis cuantitativo clásico sobre V_C , y que gráficamente se encuentran resumidos en la Fig. 12.20.

b.3) ω_{CS} y $H(\omega_{CS})$

La amplitud para la llamada frecuencia de corte superior, es por definición:

$$H(\omega_{CS}) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega_C) \text{ y por la Ec. (12.142):}$$

$$H(\omega_{CS}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \quad (12.143)$$

y gráficamente relacionándola con la Ec. (12.138):

$$H(\omega_{CS}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\overline{OB}}{\overline{BD} \overline{ED}}$$

Respecto de la expresión analítica para ω_{CS} puede derivarse a partir de la Ec. (12.131). La misma para $\omega = \omega_C = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ toma el aspecto de:

$$H(\omega_{CS}) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \beta)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \beta)^2]}} \quad (12.144)$$

y será a su vez para $\omega = \omega_{CS}$:

$$H(\omega_C) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\omega_{CS} - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega_{CS} + \beta)^2]}}$$

y como:

$$H(\omega_{CS}) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega_C)$$

relacionando las Ecs. (12.144) y (12.145) resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\omega_{CS} - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega_{CS} + \beta)^2]}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{[\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \beta)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \beta)^2]}} \end{aligned}$$

simplicando, elevando al cuadrado y operando:

$$\begin{aligned} & 2[\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \beta)^2][\alpha^2 + (\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \beta)^2] = \\ & = [\alpha^2 + (\omega_{CS} - \beta)^2][\alpha^2 + (\omega_{CS} + \beta)^2] \end{aligned}$$

Despejando ω_{CS} de la última expresión resulta:

$$\omega_{CS} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta} \quad (12.146)$$

Gráficamente, la pulsación anterior puede encontrarse a partir de la Fig. 12.56. En la misma:

$$\begin{aligned} \overline{GF}^2 &= \overline{OG}^2 + \overline{OF}^2 \quad \therefore \\ \overline{OG}^2 &= \overline{GF}^2 - \overline{OF}^2 \end{aligned} \quad (12.147)$$

pero como:

$$\begin{aligned} \overline{GF}^2 &= \overline{BF}^2 = \beta^2 + \beta^2 = 2\beta^2 \\ \overline{OF}^2 &= (\beta - \alpha)^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \end{aligned}$$

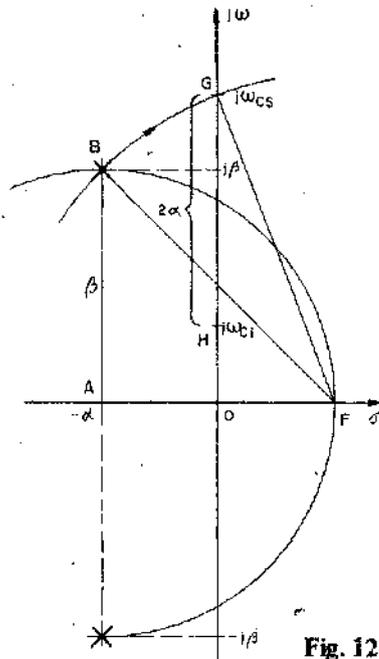


Fig. 12.56

resulta que:

$$\overline{GF}^2 - \overline{OF}^2 = 2\beta^2 - \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta = \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta$$

comparando el último resultado con la Ec. (12.146), la Ec. (12.147) será:

$$\overline{OG}^2 = \omega_{CS}^2 = \overline{GF}^2 - \overline{OF}^2 \therefore$$

$$\omega_{CS} = \sqrt{\overline{GF}^2 - \overline{OF}^2} \tag{12.148}$$

que puede determinarse prácticamente disponiendo del diagrama de polos y ceros de la siguiente manera. Se traza una circunferencia con centro en A y que pase por los polos encontrándose el punto F. Con un extremo del compás en F y el otro en B, se proyecta sobre el eje imaginario determinándose el punto G que corresponde a la ω_{CS} .

b.4) ω_{CI} y $H(\omega_{CI})$

Recuérdese que $\Delta\omega = \omega_{CS} - \omega_{CI}$. Según la Ec. (12.129) es:

$$\Delta\omega = 2\alpha \tag{12.129}$$

expresión que es válida para la curva de la corriente.

Se puede demostrar que, para $Q_0 > 5$, la Ec. (12.129) puede aplicarse en la curva de V_C con un error inferior al 1 por ciento, mientras que para $Q_0 = 2,5$ el error es inferior al 5 por ciento.

En consecuencia, para los límites de Q_0 indicados puede hallarse la pulsación de corte inferior mediante:

$$\omega_{Ci} = \omega_{Cs} - 2 \alpha$$

pero por la Ec. (12.146) la Ec. anterior resulta:

$$\omega_{Ci} = \omega_{Cs} - 2 \alpha = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2 \alpha \beta} - 2 \alpha \quad (12.149)$$

expresión esta última que permite el cálculo analítico de la pulsación de corte inferior con las limitaciones mencionadas. Las frecuencias de corte pueden ser calculadas en forma exacta mediante la expresión:

$$\left(\frac{\omega_{\text{Corte}}}{\omega_0} \right)_{s,i}^2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{Q_0^2} \right)^2 + \left[\frac{1}{Q_0^2} \left(2 - \frac{1}{2Q_0^2} \right) - 1 \right]} \quad (12.150)$$

En forma gráfica puede determinarse según se indica en la Fig. 12.56. Como:

$$\omega_{Ci} = \omega_{Cs} - 2 \alpha \quad \text{será}$$

$$\omega_{Ci} = \overline{OG} - 2 \overline{OA}$$

$$\text{si } 2 \overline{OA} = \overline{GH} \quad \text{resulta,}$$

$$\omega_{Ci} = \overline{OG} - \overline{GH} = \overline{OH} \quad (12.151)$$

y respecto de la amplitud se cumplirá en general que:

$$H(\omega_{Ci}) = H(\omega_{Cs}) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega_C)$$

como se detalló en b.3).

Pero puede presentarse un caso particular respecto de los valores a adoptar por ω_{Ci} y $H(\omega_{Ci})$. De la Ec. (12.149) se observa que si $2 \alpha > \omega_{Cs}$, la ω_{Ci} resulta

para frecuencias negativas, según también como puede apreciarse de la Fig. 12.56. En este caso por convención se toma $\omega_{C1} = 0$ y $H(\omega_{C1}) = H(0)$. En rigor, como ya se dijo, antes que esto ocurra, ya pierde su validez la Ec. (12.149), por ser insuficiente el valor de Q_0 .

Esto puede expresarse en otros términos observando la Fig. 12.52. Mientras que el valor $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot H(\omega_C)$ esté por encima de la unidad, existirán ω_{C1} y ω_{C2} . Pero si el circuito es muy poco selectivo, es decir la función en cuestión responde a una curva algo plana, $\frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega_C)$ puede estar debajo de la unidad y sólo podría definirse en forma práctica a ω_{C2} .

b.5) $H(0)$

Según el método detallado en el Cap. 11, puede determinarse según se indica en la Fig. 12.57.a).

$$H(0) = A_0 \frac{1}{M_1 M_2}$$

$$A_0 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$M_1 = M_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \therefore$$

$$H(0) = 1 \tag{12.152}$$

b.6) $H(\infty)$

De la Fig. 12.57.b) será:

$$H(\infty) = A_0 \frac{1}{M_1 M_2}$$

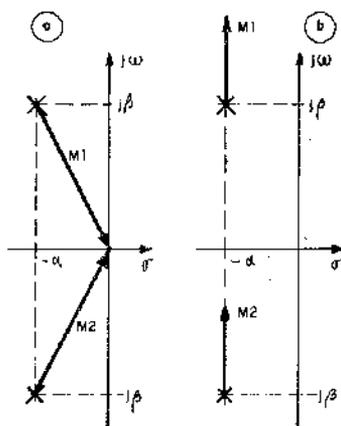


Fig. 12.57

dado que M_1 y $M_2 \rightarrow \infty$ resulta

$$H(\infty) \rightarrow 0 \quad (12.153)$$

Es evidente, que en base a los resultados precedentemente hallados queda unívocamente definida la respuesta en amplitud de la función elegida, en función de la pulsación ilustrada en la Fig. 12.52.

c) *Obtención de la respuesta de fase*

Se determinará la misma para tres puntos singulares según como se expuso en el Cap. 11, y se grafica en la Fig. 12.58. Recuérdese que como las fases corresponden a polos están precedidos por un signo negativo.

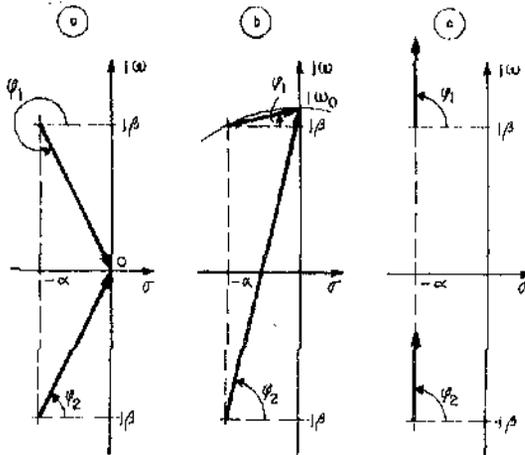


Fig. 12.58

$$\omega = 0$$

Según la Fig. 12.58.a):

$$\theta(0) = -(\varphi_1 + \varphi_2) = -360^\circ = 0$$

$$\omega = \omega_0$$

De acuerdo con la Fig. 12.58.b):

$$\theta(\omega_0) = -(\varphi_1 + \varphi_2) = -\pi/2$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

Según la Fig. 12.58.c), será:

$$\theta(\infty) = -(\varphi_1 + \varphi_2) \rightarrow -\pi$$

y la respuesta de fase de la función elegida se ilustra en la Fig. 12.59.

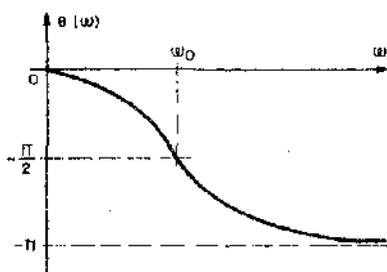


Fig. 12.59

12.8 Problemas resueltos

12.8.1) Un circuito $R L C$ resonante serie debe resonar a una frecuencia $f_0 = 1 \text{ MHz}$ tener un ancho de banda $\Delta f = 100 \text{ kHz}$ y a la frecuencia de resonancia debe presentar una impedancia $\bar{Z}_0 = 62,8 \Omega$. Para cumplir con las especificaciones enunciadas se desea calcular:

a) R ; Q_0 ; L y C

b) Los valores complejos eficaces de la impedancia para la frecuencia de corte superior \bar{Z}_{C3} , la correspondiente a la frecuencia de corte inferior \bar{Z}_{C1} y sus respectivos módulos.

Solución

a) Según se expuso en el parágrafo 12.2 a la frecuencia de resonancia se cumple que:

$$\bar{Z}_0 = R = 62,8 \Omega$$

El factor de selectividad se calcula a partir de:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1 \cdot 10^6}{100 \cdot 10^3} = 10$$

El valor de la inductancia de:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \therefore$$

$$L = \frac{Q_0 R}{\omega_0} = \frac{10 \cdot 62,8}{2 \pi \cdot 10^6} = 10^{-4} \text{ H} \quad \therefore$$

$$L = 0,1 \text{ mH}$$

y el valor de capacidad a partir de:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(6,28)^2 10^{12} 10^{-4}} = 0,0253 \cdot 10^{-8} \text{ F} \therefore$$

$$C = 253 \text{ pF}$$

b) Como las frecuencias de corte se definen para la condición $|X| = R$, dado que R se conoce, está determinado el valor de las reactivancias para esas frecuencias.

Para $f > f_0$ el circuito se comporta inductivamente, en consecuencia:

$$\bar{Z}_{Cs} = (62,8 + j 62,8) \Omega$$

para $f < f_0$ al comportarse capacitivamente será:

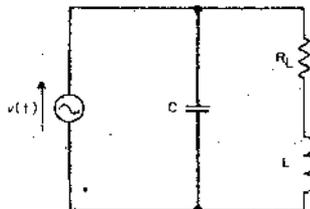
$$\bar{Z}_{Ci} = (62,8 - j 62,8) \Omega$$

Obviamente, el módulo de dichas impedancias debe coincidir y resulta:

$$Z_{Cs} = Z_{Ci} = \sqrt{62,8^2 + 62,8^2} = 88,81 \Omega$$

12.8.2) Para el circuito y datos ilustrados en la Fig. 12.60 se pide calcular:

- El valor del capacitor que lleva al circuito al estado de resonancia de factor de potencia unitario.
- El valor de la admitancia que presenta el circuito a la resonancia mencionada.
- El factor de selectividad.



$$R_L = 10 \Omega$$

$$L = 0,1 \text{ H y}$$

$$v(t) = 141 \text{ sen } 10^4 t \text{ (V)}$$

Fig. 12.60

- d) El valor del módulo de las corrientes en la rama inductiva y capacitiva en el estado de resonancia.

Solución

- a) La expresión de la admitancia total del circuito es:

$$\bar{Y} = j \omega C + \frac{1}{R_L + j \omega L} \quad \therefore$$

$$\bar{Y} = j \omega C + \frac{R_L - j \omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{por lo cual,}$$

$$\bar{Y} = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) \quad (12.154)$$

La resonancia de factor de potencia unitario resulta cuando en la Ec. (12.154):

$$\omega C_0 - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = 0 \quad \therefore$$

$$C_0 = \frac{L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = \frac{0,1}{10^2 + 10^8 \cdot 10^{-2}}$$

$$C_0 \approx 0,1 \mu F$$

- b) La admitancia del circuito en resonancia es la parte real de la Ec. (12.154):

$$\bar{Y} = Y_0 = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = \frac{10}{10^2 + 10^8 \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-5} \text{ U}$$

- c) Según se expuso en 12.5.3) el factor de selectividad resulta:

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{10^4 \cdot 0,1}{10} = 100$$

nótese que según se citó en el párrafo anteriormente mencionado, al ser tan elevado el factor de selectividad, para el juego de valores dado de R_L y L y el de C encontrado, la pulsación de resonancia en lugar de calcularse con la Ec. (12.99) que se reproduce:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \quad (12.99)$$

puede calcularse con la aproximada:

$$\omega'_0 \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

que si se reemplazan los valores de L y C resulta:

$$\omega'_0 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}} = 10^4 \text{ r/s}$$

d) En primer lugar se calculará la corriente que toma el circuito en resonancia:

$$\bar{I}_0 = \bar{V} \bar{Y}_0 \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$I_0 = V Y_0 = 100 \cdot 10^{-5} = 1 \text{ mA}$$

y de la Ec. (12.107) válida para $Q_0 \geq 10$ resulta:

$$I_{L_0} = I_{C_0} = Q_0 I_0 = 100 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ A}$$

12.8.3) Empleando la curva universal de resonancia se piden calcular los valores complejos que adopta la admitancia de un circuito $R L C$ resonante serie para las pulsaciones:

$$\omega_1 = 58 \cdot 10^3 \text{ r/s} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 62 \cdot 10^3 \text{ r/s}$$

Se conoce el valor de la pulsación de resonancia del circuito $\omega_0 = 60 \cdot 10^3 \text{ r/s}$ su factor de selectividad $Q_0 = 30$ y su admitancia en resonancia es de $0,8 \text{ } \Omega$

Solución

La desviación relativa de frecuencias, según se expuso en el párrafo 12.4 resulta:

$$\delta = \frac{f - f_0}{f_0} \quad \text{o lo que es lo mismo:}$$

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

para las pulsaciones en cuestión resultan:

$$\delta_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{(58 - 60) \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = -0,033$$

$$\delta_2 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{(62 - 60) \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = 0,033$$

por lo cual:

$$Q_0 \delta_1 = 30 (-0,033) = -0,99$$

$$Q_0 \delta_2 = 30 (0,033) = 0,99$$

Si con los dos valores hallados para el factor $Q_0 \delta$ se entra en la curva universal ilustrada en la Fig. 12.38 resulta que para la pulsación ω_1 :

$$\frac{Y_1}{G} = 0,44 \therefore Y_1 = 0,44 \cdot 0,8 = 0,352 \text{ } \Omega$$

$$\varphi_1 = 64^\circ$$

en consecuencia, $\bar{Y}_1 = 0,352 e^{j64^\circ} \text{ } \Omega$

Para la pulsación ω_2 :

$$\frac{Y_2}{G} = 0,44 \therefore Y_2 = 0,44 \cdot 0,8 = 0,352 \text{ } \Omega$$

$$\varphi_2 = -64^\circ$$

en consecuencia, $\bar{Y}_2 = 0,352 e^{-j64^\circ} \text{ } \Omega$

Obsérvese que las admitancias halladas resultan de igual módulo y opuestas en fase por el hecho de que la desviación de ω_1 y ω_2 respecto de ω_0 es la misma para ambas.

12.8.4) Considérese un circuito $R L C$ resonante serie del cual se conoce la función transferencia de tensiones sobre el capacitor.

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{20}{[s + (2 + j4)][s + (2 - j4)]}$$

Se pide hallar en forma analítica y gráfica:

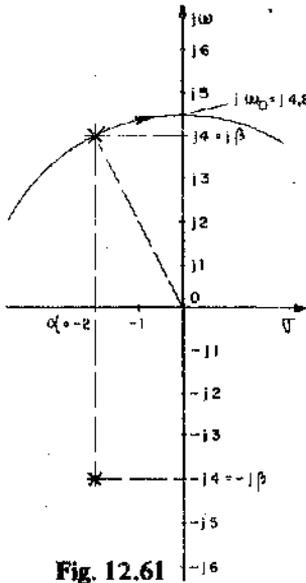
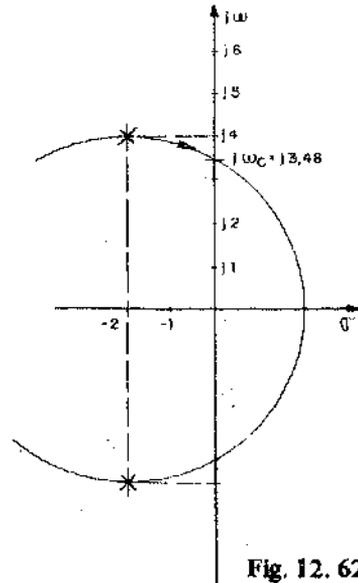
- La pulsación ω_0 de resonancia del circuito.
- La pulsación ω_C que corresponde al máximo de tensión sobre el capacitor.
- La pulsación ω_{Cs} que corresponde a la frecuencia de corte superior.
- La pulsación ω_{Ci} que corresponde a la frecuencia de corte inferior.
- El ancho de banda $\Delta \omega$ que corresponde a la función de estudio.

Solución

De acuerdo a las conclusiones encontradas en el párrafo 12.7 sobre las determinaciones analíticas y gráficas resulta:

$$a) \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ r/s}$$

nótese que en la función transferencia dato $20 = \omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$ que se corresponde con lo expuesto en el párrafo mencionado.

**Fig. 12.61****Fig. 12.62**

La determinación gráfica se ilustra en la Fig. 12.61 resultando $\omega_0 \approx 4,8 \text{ r/s}$

$$b) \omega_c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ r/s}$$

La determinación gráfica se muestra en la Fig. 12.62 resultando $\omega_c \approx 3,48 \text{ r/s}$.

$$c) \omega_{CS} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta} = \sqrt{4^2 - 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4} = 5,29 \text{ r/s}$$

La determinación gráfica se ilustra en la Fig. 12.63 de la que surge que $\omega_{CS} \approx 5,3 \text{ r/s}$.

d) En primer lugar se calculará el factor de selectividad para saber si puede aplicarse la fórmula aproximada 12.149.

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{4,47}{4} = 1,12$$

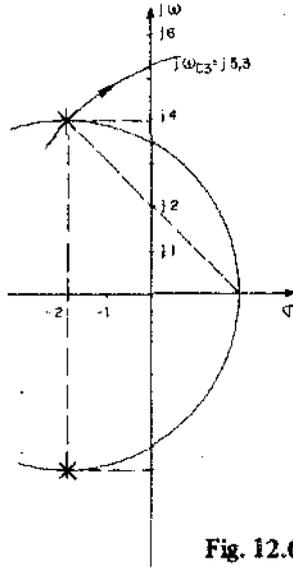


Fig. 12.63

Para este factor de selectividad debe utilizarse la fórmula exacta dada por la Ec. (12.160):

$$\left(\frac{\omega_{\text{Corte}}}{\omega_0} \right)_{s, f}^2 = 0,601 \pm \sqrt{0,362 + 0,277} = 0,601 \pm 0,799$$

$$\left(\frac{\omega_{\text{Corte}}}{\omega_0} \right)_{s, f}^2 = \begin{cases} 1,4 \\ -0,198 \end{cases} \therefore$$

$$\omega_{Cs} = \omega_0 \sqrt{1,4} = 5,29 \text{ r/s}$$

$$\omega_{Ci} = \omega_0 \sqrt{-0,198} \Rightarrow \text{imaginario}$$

En consecuencia no existe pulsación de corte inferior para la cual la tensión disminuya al 0,707 de V_{Cm} .

e) Por lo tanto en este caso $\Delta\omega = \omega_{Cs} = 5,29 \text{ r/s}$.

12.9 Problemas propuestos

12.9.1) Para el circuito resonante ilustrado en la Fig. 12.64 determinar:

- El valor de la pulsación de resonancia ω_0 .
- Los valores de las pulsaciones ω_1 y ω_2 para las cuales se cumple que $|X| = R$.
- Verificar a partir de ω_1 y ω_2 el valor de ω_0 hallado en a).
- El valor del módulo de las corrientes para las pulsaciones ω_0 , ω_1 y ω_2 .
- El valor del factor de selectividad Q_0 .
- El valor de la tensión sobre el resistor a la frecuencia de resonancia.
- El valor del módulo de las tensiones sobre los elementos reactivos a la frecuencia de resonancia.

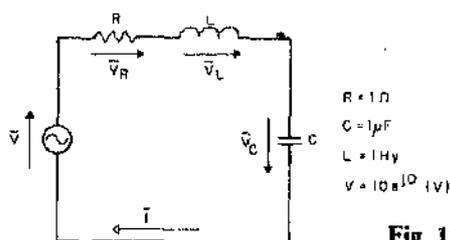


Fig. 12.64

Resultados:

- $\omega_0 = 10^3 \text{ r/s}$
- $\omega_1 = 999,5 \text{ r/s}$
 $\omega_2 = 1000,5 \text{ r/s}$
- $\omega_0 = 10^3 \text{ r/s}$
- $\bar{I}_0 \approx I_0 = 10 \text{ A}$
 $\bar{I}_1 = 7,07 e^{j 45} \text{ A}$
 $\bar{I}_2 = 7,07 e^{-j 45} \text{ A}$
- $Q_0 = 10^3$
- $\bar{V}_R = 10 e^{j 0} \text{ V}$
- $V_{C_0} = V_{L_0} = 10^4 \text{ V}$

12.9.2) Dado el circuito mostrado en la Fig. 12.65 se pide calcular:

- El valor de R_C que lleva al circuito al estado de resonancia de factor de potencia unitario.
- El valor de la impedancia que presenta el circuito en dicho estado.
- El valor del factor de selectividad Q_0 del circuito.
- Los valores que deberían adoptar R_L y R_C , considerando fijos los de los elementos reactivos, para que el circuito presente resonancia para todas las frecuencias.
- El valor de la impedancia que presenta el circuito para el estado indicado en d).

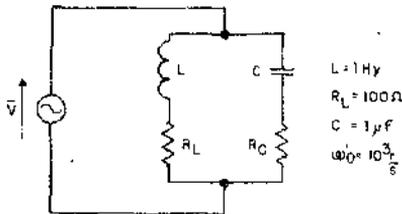


Fig. 12.65

Resultados

- $R_{C_0} = 100 \Omega$
- $Z_0 = 5050 \Omega$
- $Q_0 = 10$
- $R_L = R_C \cdot 10^3 \Omega$
- $Z = 10^3 \Omega$

12.9.3) Un circuito $R L C$ serie posee un factor de selectividad $Q_0 = 25$ y una frecuencia de resonancia $f_0 = 10^3 \text{ Hz}$. Para el caso en que su admitancia se reduce a 0,707 del valor correspondiente a resonancia, empleando la curva universal se desea calcular:

- El valor del factor $Q_0 \delta$ para la condición indicada.
- Las desviaciones relativas de frecuencias respecto de la resonancia.
- Las frecuencias para las cuales se cumple la condición impuesta.

Resultados

a) $Q_0 \delta = \pm 0,5$

b) $\delta_{1-2} = \pm 0,02$

c) $f_1 = 980 \text{ Hz}$

$f_2 = 1020 \text{ Hz}$

12.9.4) Para el circuito ilustrado en la Fig. 12.66 se pide determinar:

- a) La frecuencia de resonancia de factor de potencia unitario f'_0 .
 b) El valor de la impedancia que presenta el circuito a la frecuencia mencionada.

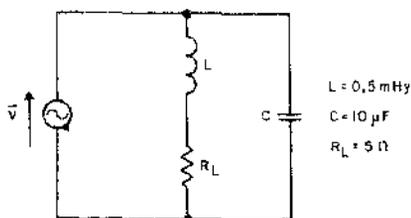


Fig. 12.66

Resultados

a) $f'_0 = 1.587,57 \text{ Hz}$

b) $Z_0 = 9,97 \Omega$

Resolución sistemática de circuitos

13.1) **Introducción:** Los métodos de análisis de circuitos expuestos hasta el presente permiten resolver la mayor parte de los problemas que se presentan en la práctica, pero pueden no ser muy prácticos para una geometría circuital complicada.

Es propósito de este capítulo llegar a una generalización para la resolución de circuitos planteando *métodos topológicos* directamente en el dominio transformado de Laplace.

Recuérdese que en términos generales la *topología* es el conjunto de normas para interpretar los signos de la *topografía*, proveniente esta última del griego, *topos*: lugar y *grapho*: describir. Naturalmente, que en este caso los lugares a describir estarán determinados por los circuitos eléctricos. En consecuencia se utilizará la topología para hallar relaciones generales entre nodos, mallas y demás elementos de circuito con el objeto de encontrar formas generalizadas para la resolución de circuitos eléctricos.

Se comenzará con un breve repaso de las principales propiedades de los determinantes y matrices que serán útiles en el presente capítulo y en los posteriores. Luego de plantear las nociones sobre el análisis topológico de circuitos, se vincularán las variables eléctricas a través de las reglas de Kirchhoff, arribando a dos herramientas muy importantes que son el *método de las mallas* y el *método de los nodos*. Para facilitar su aplicación se darán reglas prácticas y criterios de selección de métodos.

Finalmente, se concluirá con una aplicación del ya presentado *principio de dualidad*.

13.2) Revisión sobre determinantes y matrices

Se resumirán a continuación algunas de las propiedades más importantes acerca de los determinantes y matrices, algunas de las cuales serán de utilidad en el presente capítulo, y otros en los Cap. 14, 15 y 16.

13.2.1) Determinantes:

a) Definiciones y propiedades:

Se entiende por determinante al número que está determinado en forma unívoca por una forma de cálculo específica a realizarse con los elementos de un cuadro de valores, encerrado entre barras.

Un determinante de *segundo orden* y su forma de cálculo está indicado por la Ec. (13.1):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (13.1)$$

El cálculo para un determinante de *tercer orden* puede efectuarse rápidamente por aplicación de la regla de Sarrus. Otra forma de resolución útil para determinantes de orden superior a dos, es el llamado *desarrollo laplaciano*, que se ilustra en la Ec.(13.2), ejemplificando para *tercer orden*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (13.2)$$

La Ley de formación del desarrollo anterior, puede en principio recordarse introduciendo el concepto de *menor complementario* y el de *cofactor* o *adjunto*.

El menor complementario $M_{k\ell}$, de un determinante, es otro determinante que se halla suprimiendo la fila k -ésima y la columna ℓ -ésima del determinante. En el ejemplo de tercer orden desarrollado en la Ec.(13.2), considerando un elemento $a_{k\ell}$, y eliminando la fila k y la columna ℓ , se obtiene

un determinante de segundo orden llamado menor complementario $M_{K\ell}$ del elemento $a_{K\ell}$, y para el determinante dado sus menores resultan los indicados por las Ecs. (13.3), (13.4) y (13.5):

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (13.3)$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (13.4)$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (13.5)$$

El menor complementario con su signo adecuado es el llamado cofactor o adjunto del elemento con igual par de subíndices. Cuando la suma de los subíndices en cuestión resulta par, el signo del cofactor es positivo, y si es impar negativo. En consecuencia el cofactor o adjunto $A_{K\ell}$ del elemento $a_{K\ell}$, está dado por la Ec. (13.6):

$$A_{K\ell} = (-1)^{K+\ell} M_{K\ell} \quad (13.6)$$

Otra forma rápida para encontrar el signo del adjunto es la siguiente. Tómese como ejemplo el determinante de tercer orden, o de cualquier orden si se desea, y asígnesele los signos positivo y negativo en forma alternativa a columnas y filas tal como muestra la Ec. (13.7):

$$\begin{array}{ccc} & (+) & (-) & (+) \\ (+) & \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| & a_{13} & \\ (-) & \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| & a_{23} & \\ (+) & \left| \begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right| & a_{33} & \end{array} \quad (13.7)$$

y el signo del adjunto en cuestión resultará de la multiplicación de los signos de la fila y columna que lo ubican en el determinante. Por ejemplo:

$$A_{21} = (+) (-) M_{21} = - M_{21}$$

Nótese que en el ejemplo precedente se ha elegido para el desarrollo laplaciano la primer columna. El mismo resultado se obtiene efectuando los productos de los elementos de cualquier otra fila o columna, llamados en general líneas, por sus respectivos adjuntos.

Generalizando el problema un determinante de orden n se obtiene a partir de un cuadro de n^2 elementos mediante la suma de los productos de los elementos de una línea elegida arbitrariamente, por sus correspondientes adjuntos o cofactores.

Finalmente cabe destacar, que teniendo en cuenta las propiedades de que gozan los determinantes pueden efectuarse simplificaciones en el cálculo de los mismos. Las principales propiedades son:

- a.1) Cambiando filas por columnas no se modifica el valor del determinante.
- a.2) Cambiando dos líneas paralelas se mantiene el valor absoluto del determinante pero cambia su signo.
- a.3) Multiplicando todos los elementos de una línea por un mismo número, el valor del determinante se multiplica por dicho número.
- a.4) El valor de un determinante es nulo si posee dos líneas proporcionales o bien iguales.
- a.5) El valor de un determinante no se modifica cuando a los elementos de una línea se le suman los elementos de una línea paralela multiplicados cada uno por un mismo número.
- a.6) Resulta nula la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra que sea paralela.

Es interesante destacar, que por medio del desarrollo laplaciano, expuesto anteriormente, puede calcularse un determinante de orden n en base a la resolución de n determinantes de orden $(n - 1)$. En base a algunas de las propiedades enunciadas anteriormente, puede llegarse a la llamada Regla de Chio, que facilita mediante un solo paso de operación transformar un determinante de orden n en otro igual de orden $(n - 1)$.

b) Solución de sistema de ecuaciones lineales mediante la regla de Leibniz-Cramer

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas como el que se muestra en la Ec. (13.8):

$$\begin{aligned}
 a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \dots + a_{1i} s_i + \dots + a_{1n} s_n &= K_1 \\
 a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + \dots + a_{2i} s_i + \dots + a_{2n} s_n &= K_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 a_{n1} s_1 + a_{n2} s_2 + \dots + a_{ni} s_i + \dots + a_{nn} s_n &= K_n
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

Cualquiera de las incógnitas s_i pueden hallarse como:

$$s_i = \frac{\Delta_{si}}{\Delta} \tag{13.9}$$

donde en la Ec. (13.9) resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & k_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & k_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y por otra parte:

$$\Delta_{si} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & k_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & k_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El método puede aplicarse a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, siempre que el valor del determinante $\Delta \neq 0$.

13.2.2) **Matrices:** La matriz es una disposición ordenada, de números o funciones, en filas y columnas encerradas por corchetes, es decir que no tiene valor numérico. En consecuencia está caracterizada por sus elementos y la ubicación de los mismos en el cuadro, y toma el aspecto indicado por la Ec. (13.10).

En la misma los $a_{k\ell}$ se llaman elementos. El elemento $a_{k\ell}$ pertenece a la fila k y la columna ℓ . En consecuencia una matriz es un conjunto de $m \times n$ elementos $a_{k\ell}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (13.10)$$

Por ejemplo la Ec. (13.11) muestra una matriz rectangular de tres filas y dos columnas. Podrán considerarse además matrices de una sola columna como la indicada por la Ec. (13.12), o bien de una sola fila:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

Si en particular $m = n$, la matriz es cuadrada, y en consecuencia se podrá calcular el determinante correspondiente a la matriz. Si este último resulta no nulo la matriz se denomina regular, y si es nulo la matriz se denomina degenerada.

En adelante se empleará como notación para la matriz indicada por la Ec. (13.10): $A = [a_{K\ell}]$.

Las principales operaciones del álgebra matricial resultan:

a) *Igualdad de matrices*: Una matriz $A = [a_{K\ell}]$ es igual a otra matriz $B = [b_{K\ell}]$, si se verifica para todos los pares de subíndices K y ℓ que $a_{K\ell} = b_{K\ell}$.

b) *Suma de matrices*: Dadas dos matrices, los elementos de la matriz suma de ambas se hallan sumando los correspondientes elementos de las matrices, es decir:

$$A + B = [a_{K\ell} + b_{K\ell}]$$

c) *Diferencia de matrices*: Por lo expresado anteriormente será:

$$A - B = [a_{K\ell} - b_{K\ell}]$$

d) *Matriz nula*: Una matriz se considera nula sólo si todos los elementos de la misma son nulos, es decir que:

$$A = 0 \quad \text{si} \quad a_{K\ell} = 0$$

e) *Matriz unidad*: Se denomina así a aquella matriz cuadrada que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad, y los demás elementos nulos, resultando:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

f) *Producto de matrices*: El mismo se realiza multiplicando filas por columnas.

El producto de una matriz $A = [a_{K\ell}]$ de m filas y r columnas por otra matriz $B = [b_{K\ell}]$ de r filas y n columnas es otra matriz $C = [C_{K\ell}]$ de m filas y n columnas, siendo:

$$C_{K\ell} = \sum_{i=1}^r a_{Ki} b_{i\ell}$$

$$\text{con: } K = 1; 2; \dots \dots m$$

$$\ell = 1; 2; \dots \dots n$$

Si se toma por ejemplo, el producto de matrices indicado más abajo resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} \\ a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33} \\ a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo puede ser:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + a_{23} b_{13} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{12} + a_{33} b_{13} \end{bmatrix}$$

Se vislumbra, a través de los ejemplos, que la consideración de las matrices permitirá estudiar desde otro punto de vista los sistemas de ecuaciones lineales.

En particular, nótese que el sistema de ecuaciones lineales dado por la Ec. (13.8) se podrá presentar en forma matricial como lo indica la Ec. (13.13):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ \dots \\ K_n \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

donde las incógnitas s_i se determinan con la Ec. (13.9).

Debe recordarse también, por otra parte, que el *producto de matrices* no es conmutativo en general, pero es asociativo y además distributivo respecto de la adición o sustracción. Téngase en cuenta, que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sea ninguno de los factores.

g) *Matriz diagonal*: Se denomina así aquella matriz cuyos únicos elementos no nulos están sobre la diagonal principal. En el caso del producto de dos matrices diagonales, el mismo resulta conmutativo.

h) *Matriz traspuesta*: Dado una matriz A se denomina matriz traspuesta A_t , a la resultante de cambiar filas por columnas en la matriz A . Es decir que si:

$$A = [a_{K\ell}] \quad \text{será} \quad A_t = [a_{\ell K}]$$

i) *Matriz inversa*: Cuando se cumple que $AB = U$; es decir que el producto de dos matrices es igual a la matriz unidad, se dice que B es la matriz inversa de A , es decir:

$$B = A^{-1}$$

Dada una matriz cuadrada A , la determinación de su inversa A^{-1} , equivale a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales y se construye de acuerdo a la siguiente regla:

- 1) Dada la matriz A , se cambian filas por columnas formando la matriz A_t .
- 2) Cada elemento a_{ij} de A_t se reemplaza por su menor complementario M_{ij} .
- 3) Cada elemento de la matriz así formada se divide por el determinante Δ de la matriz A .
- 4) Se multiplica alternadamente cada elemento por $+1$ y -1 .

En base a la aplicación del concepto de matriz inversa resulta otra expresión de la regla de Leibniz-Cramer para la solución de un sistema de ecuaciones lineales como el indicado por la Ec. (13.8), y se demuestra que las incógnitas s_i pueden encontrarse a partir del producto de la matriz inversa del sistema y la matriz correspondiente a los términos independientes, que en forma abreviada puede expresarse como:

$$s = A^{-1} K$$

Téngase en cuenta que la revisión superficial efectuada sobre determinantes y matrices tiene sólo por objeto recordar las propiedades y aplicaciones más importantes de las mismas. Para su estudio detallado debe remitirse el lector a los textos de álgebra específicas sobre dichos temas.

13.3 Clasificación de los tipos de problemas y métodos de resolución utilizados

En la teoría de circuitos, es general que se plantee, cuando se desea obtener las respuestas de un circuito, dos problemas típicos.

El *primero* de ellos se refiere a los circuitos en los cuales hay una *única excitación* e interesa conocer el valor de *una corriente* o *una tensión*, en función de dicha excitación.

El *segundo* problema típico es aquél en el cual existen *una o varias excitaciones*, e interesa conocer el valor de *todas las corrientes* y/o *todas las tensiones* resultantes en el circuito.

El *primer problema* es el caso típico en el cual basta con analizar la función transferencia entre dos puntos del circuito para resolverlo, es decir que se resuelve hallando la *función transferencia* que liga a la única excitación con la única incógnita. Cuando la geometría circuital es simple este tipo de problema se resuelve fácilmente mediante las funciones de transferencia estudiados en capítulos anteriores, hallados agrupando immitancias. Cuando la configuración circuital es geoméricamente alargada, una forma eficiente de resolver el problema es utilizando la Teoría de los Cuadripolos. Alternativamente, podrán emplearse los Diagramas de Flujo de Señal, o bien el Método de los Diagramas en Bloques. La Teoría de los Cuadripolos es un tema de análisis de circuitos que se incluye en este libro, en tanto que los Diagramas de Flujo de Señal es un método empleado en cursos posteriores a los que abarca este libro, y el Método de los Diagramas en Bloques es preferentemente empleado en el estudio de los Sistemas de Control.

En el *segundo problema*, ya no resulta eficiente calcular la transferencia entre puntos distantes del circuito, para hallar la totalidad de las corrientes y/o tensiones dado que no es práctico. En lugar de la función transferencia sería útil disponer de la *matriz transferencia total del circuito*. Estos tipos de

problemas pueden resolverse mediante la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales derivados de las leyes de Kirchhoff, o más prácticamente, por métodos de resolución sistemáticos derivados de aquellos, conocidos como el *método de las mallas* y el *método de los nodos*.

13.4 Nociones sobre análisis topológico de circuitos

La topología se ocupa del estudio de la geometría de las configuraciones circuitales sin particularizar sobre los tipos de elementos que se hallan interconectados en el circuito.

Puede decirse que existen dos tipos de análisis topológico: el *cualitativo* y el *cuantitativo*.

En el *análisis cualitativo*, que se desarrollará en este capítulo, se obtienen propiedades generales asociadas a la geometría de circuitos, es decir las *relaciones* entre las variables de los circuitos.

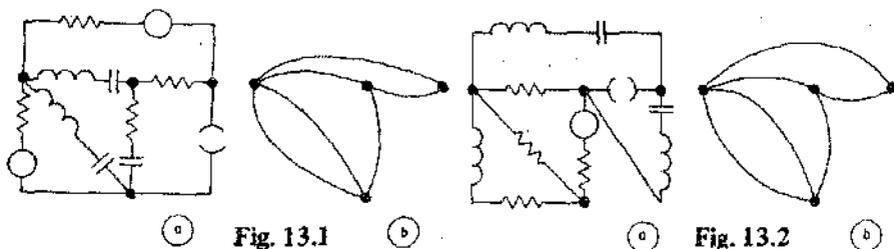
En el *análisis cuantitativo*, motivo de estudios posteriores al de este libro, se obtienen resultados asociados a un dado circuito, analizando los diagramas de flujo de señal, que son una aplicación de la topología de circuitos.

13.4.1) Definiciones fundamentales:

a) *Gráfico lineal*: Es la construcción geométrica que se obtiene al reemplazar el circuito original por líneas rectas o curvas, trazadas entre las uniones o vértices de este, en reemplazo de los elementos existentes. A esta construcción se la llama también *gráfico de un circuito* o *gráfico de una red*.

Debe tenerse en cuenta que al construir el gráfico lineal deben desactivarse los generadores. En el caso de considerar generadores ideales, los de tensión se reemplazan por un cortocircuito y los de corriente por un circuito abierto.

En las Figs. 13.1 y 13.2 se dan ejemplos de construcción. De ambos ejemplos puede deducirse que a pesar que el circuito de la Fig. 13.1.a) posee una configuración eléctrica distinta al de la Fig. 13.2.a) sus gráficos lineales correspondientes ilustradas en las Figs. 13.1.b) y 13.2.b) respectivamente, son iguales. Esto reafirma lo dicho a comienzos del párrafo, de que el análisis topo-



lógico cualitativo permite obtener propiedades generales, pues las relaciones que se obtienen para un dado gráfico lineal son válidas para todos los circuitos que tienen un mismo gráfico lineal, cualquiera sea su configuración eléctrica.

Otro ejemplo de construcción de gráfico lineal se muestra en la Fig. 13.3.b), correspondiente al circuito eléctrico de la Fig. 13.3.a). Nótese que la cantidad de líneas del gráfico se reducen al coincidir el punto B con el C cuando se construye dicho gráfico lineal.

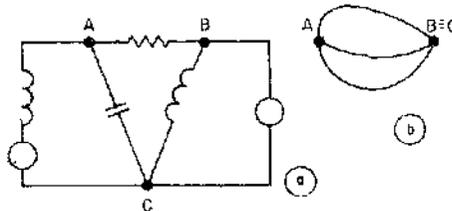


Fig. 13.3

- b) *Rama*: Se denomina así a la línea del gráfico lineal tendida entre dos vértices o uniones del mismo. También llamado brazo.
- c) *Nodo*: Es todo punto al cual convergen una o más ramas. También es llamado *nudo*, y desde el punto de vista eléctrico puede considerarse como todo punto del circuito cuyo potencial desea ponerse en evidencia.
- d) *Malla*: Es el conjunto de ramas que forma un camino cerrado en el gráfico lineal de un circuito. También es llamado *lazo*.
- e) *Arbol de un gráfico*: Es la figura que se obtiene al tender entre los nodos del gráfico lineal, la mayor cantidad posible de ramas de este, sin llegar a formar ningún lazo.

Considérese por ejemplo el gráfico lineal de la Fig. 13.1.b). Presenta cuatro nodos y 6 ramas. Evidentemente, para dicho circuito existirá solamente ese gráfico lineal; en cambio si pueden existir muchos árboles, como se ilustra en la Fig. 13.4.a); b); c).

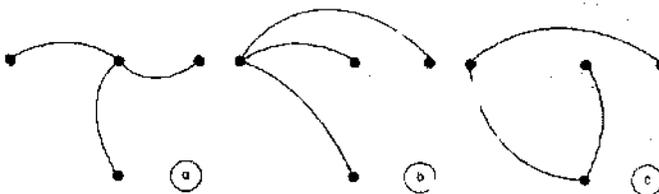


Fig. 13.4

Pero adviértase, que los árboles del gráfico lineal poseen siempre el mismo número de ramas, y que si bien tienen igual cantidad de nodos que la configuración eléctrica, poseen menos ramas que ésta.

- f) *Ramas de árbol*: Son aquéllas que se incluyen en cualquiera de los posibles árboles de un gráfico lineal. Nótese en el ejemplo de la Fig. 13.4 que la cantidad de ramas de árbol resulta el número de nodos disminuido en la unidad.
- g) *Ramas de enlace*: Son aquéllas que al ser agregadas al árbol, van formando lazos, hasta llegar al gráfico lineal del circuito.

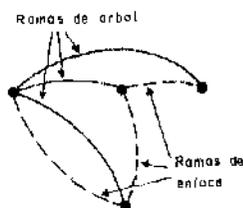


Fig. 13.5

En la Fig. 13.5 se ha tomado por ejemplo el árbol de la Fig. 13.3.b) y se le han agregado las ramas de enlace. Naturalmente, que la suma de las ramas de árbol y de enlace coincide con el número de ramas del gráfico lineal. En general, el número de ramas de árbol no coincide en el número de ramas de enlace, como puede verse en la Fig. 13.6. En la Fig. 13.6.a) se ha dibujado un gráfico lineal cualquiera; en la Fig. 13.6.b) se ha dibujado uno de los posibles árboles, y en la Fig. 13.6.c) las ramas de enlace que corresponden al árbol elegido.

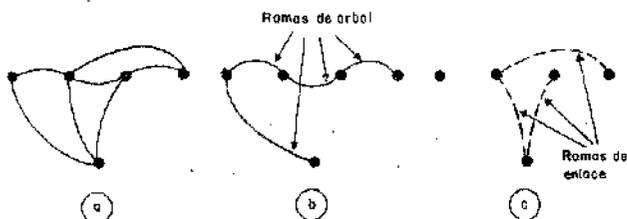


Fig. 13.6

- h) *Gráficos planos*: Se denominan así aquéllos en los cuales las líneas se cruzan sólo en los nodos del mismo, y son los efectuados hasta el presente.
- i) *Gráficos espaciales*: Son aquéllos en los cuales las líneas se cortan fuera de los nodos. Es decir que, para un circuito si se aplican las reglas para cons-

truir un gráfico lineal, éste no podrá dibujarse sin que se crucen sus ramas. Un ejemplo se ilustra en la Fig. 13.7. En la Fig. 13.7.a) se ha elegido una red de resistores que forman un cubo en el espacio, y en la Fig. 13.7.b) su gráfico lineal.

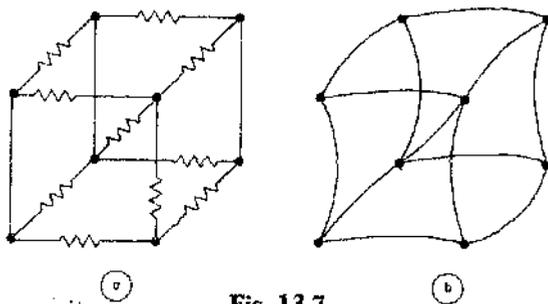


Fig. 13.7

13.4.2) Notación

- n = número total de nodos.
- r = número total de ramas.
- r_a = número total de ramas de árbol.
- r_e = número total de ramas de enlace.
- I = corriente de rama.
- I_e = corriente de rama de enlace o corriente de enlace.
- V = tensión de rama o diferencia de potencial entre los nodos de rama.
- V_a = tensión de rama de árbol.
- m_i = número de corrientes de malla independiente.
- n_i = número de tensiones de rama independiente.

13.4.3) Corrientes de malla independiente: *El número de corriente de malla independiente es igual al número de ramas de enlace.*

La afirmación anterior puede ser fácilmente justificada analizando un sencillo circuito como el mostrado en la Fig. 13.8.a). En la Fig. 13.8.b); c); y d) se han dibujado algunos de los árboles posibles. Se observa que para todos los árboles indicados no existirá ninguna corriente en el circuito. Pero si se agrega una rama de enlace r_{e1} se establece una corriente independiente que llamamos I_{e1} . Adicionando otra rama de enlace r_{e2} surgirá otra corriente in-

dependiente I_{e2} y así sucesivamente, como se ejemplifica en la Fig. 13.9 para el árbol de la Fig. 13.8.b).

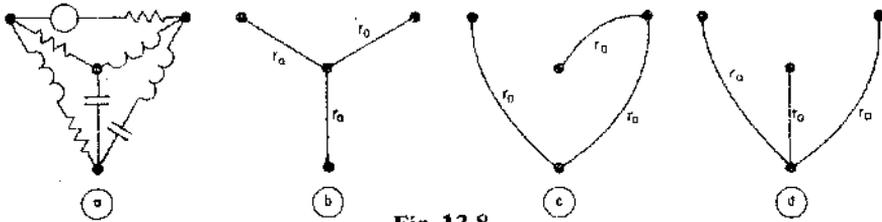


Fig. 13.8

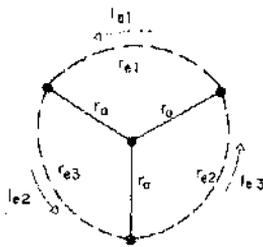


Fig. 13.9

Obviamente, para todos los demás árboles la conclusión es la misma, el número de ramas de enlace coincide con el número de corrientes independientes, por lo cual:

$$m_l = r_e \quad (13.14)$$

De lo visto anteriormente surgen inmediatamente dos corolarios:

Primer Corolario: *Todas las corrientes de una rama pueden expresarse en función de las corrientes de rama de enlace mediante la primera regla de Kirchhoff.*

Lo anterior puede deducirse de la observación de la Fig. 13.9. Es evidente que conociendo las corrientes en las ramas de enlace se podrán determinar las correspondientes a las de rama de árbol, y en consecuencia se conocerán todas las corrientes. Al aplicar la primera regla de Kirchhoff para vincular las variables eléctricas, se arriba a un sistema de ecuaciones lineales, que al sistematizarse puede expresarse en forma matricial como:

$$[I] = [\alpha] [I_e] \quad (13.15)$$

que puede interpretarse pensando que la matriz columna de las corrientes de rama, es igual al producto de una matriz α , llamada matriz de transformación de corrientes o de interconexión de corrientes, que se analizará próximamente, por la matriz columna de las corrientes de rama de enlace.

Segundo Corolario: *El número de mallas independientes o corrientes de malla independiente, es igual al número de ramas menos el número de nodos disminuido en la unidad.*

Lo anteriormente expresado puede deducirse en base a la Ec. (13.14) que se reproduce:

$$m_i = r_e \quad (13.14)$$

pero del párrafo 13.4.1.g) es:

$$r = r_a + r_e \quad (13.16)$$

$$r_e = r - r_a$$

y del párrafo 13.4.1.f) es:

$$r_a = n - 1 \quad (13.17)$$

por lo que reemplazando la Ec. (13.17) en la Ec. (13.16) y teniendo en cuenta la Ec. (13.14), resulta que:

$$m_i = r - (n - 1) \quad (13.18)$$

que es lo afirmado por el segundo corolario.

13.4.4) Tensiones de rama independiente: *El número de tensiones de rama independiente es igual al número de ramas de árbol.*

La afirmación anterior puede ser fácilmente justificada analizando la Fig. 13.10.a) y b). En la misma se han reproducido dos árboles de la Fig. 13.8, a los que se agregaron las ramas de enlace correspondientes hasta llegar al gráfico lineal del circuito en cuestión. Se observa que en ambos casos, conocidas las tensiones en las ramas de árbol podrán determinarse inmediatamente las tensiones que faltan conocer, recorriendo las mallas por ejemplo, como se indica en la Fig. 13.10. Nótese que si se elimina cualquiera de las ramas de árbol, ya no podrán expresarse todas las tensiones desconocidas en función de las existentes, por lo que no cabe otra posibilidad que el número de tensiones de rama independiente sea igual al número de ramas de árbol, según se afirmó, por lo cual:

$$n_i = r_a \quad (13.19)$$

De lo visto anteriormente surgen inmediatamente dos corolarios.

Primer Corolario: Todos los potenciales de rama pueden ser expresados en función de los potenciales de rama de árbol o potenciales de rama independiente mediante la segunda regla de Kirchoff.

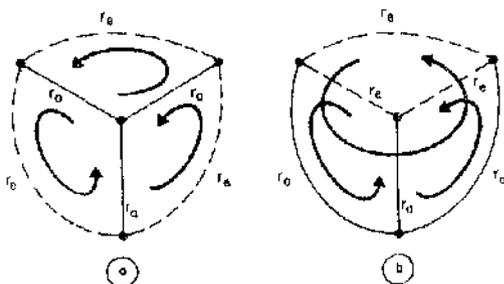


Fig. 13.10

Lo anteriormente expresado puede derivarse de la observación de la Fig. 13.10. Es obvio que conociendo los potenciales de las ramas de árbol se podrán determinar los correspondientes a los de las ramas de enlace, y en consecuencia se conocerán todos los potenciales. Al aplicar la segunda regla de Kirchoff para vincular las variables eléctricas se obtiene un sistema de ecuaciones lineales, que al sistematizarse puede escribirse en forma matricial como:

$$[V] = [\beta] [V_a] \quad (13.20)$$

que puede interpretarse como que la matriz columna de tensiones de rama es igual al producto de una matriz β , llamada matriz de transformación de tensiones o de interconexión de tensiones, que se analizará próximamente, por la matriz columna de tensiones de rama de árbol.

Segundo Corolario: El número de nodos independientes es igual al número total de nodos disminuido en la unidad.

Lo anteriormente expresado puede justificarse a partir de la Ec. (13.19) que se reproduce.

$$n_i = r_a$$

pero según la Ec. (13.17) es:

$$r_a = n - 1$$

por lo cual la Ec. (13.19) resulta:

$$n_i = n - 1 \quad (13.21)$$

que es lo afirmado por el segundo corolario.

13.4.5) **Relación entre las corrientes y las tensiones de rama:** Como se anunció en la introducción del capítulo, el mismo se desarrolla en el dominio transformado, y en consecuencia las corrientes y tensiones de rama quedan vinculadas a través de la impedancia o admitancia de excitación transformadas.

Es de resaltar que, conocida una de ellas para una rama, puede calcularse la restante para esa misma rama aun cuando sean desconocidas las otras corrientes y tensiones de rama.

En cambio, cuando se quiere expresar la corriente de una rama en función de las corrientes en todas las demás ramas se tendrá que resolver el conjunto del circuito para conocer esa corriente. Análogamente, cuando se quiere expresar una tensión en función de las tensiones de todas las otras ramas, se tendrá que resolver toda la configuración eléctrica para calcular dicha tensión. En cambio, como se mencionó antes, tensión y corriente en una misma rama pueden vincularse independientemente del resto de la configuración circuital. Esta es una característica muy importante para establecer el número de incógnitas y el número de ecuaciones que va a ser necesario plantear para resolver una configuración eléctrica.

Nótese que a pesar que el capítulo se desarrolla íntegramente en el *dominio transformado de Laplace*, por razones de simplicidad en la nomenclatura, se suprime en esta ocasión el subíndice (*s*), a lo largo de todo el capítulo.

13.4.6) **Elección de las variables y número de incógnitas. Número de ecuaciones independientes que se derivan de la primera y segunda regla de Kirchhoff:** Si un circuito dado está formado por r ramas, las incógnitas serán r tensiones de rama y r corrientes de rama, es decir $2r$ incógnitas. Pero como cada corriente y tensión en una rama están ligadas a través de la ley de Ohm, obviamente, el número de incógnitas se reduce a r .

Si el problema se encara empleando las reglas de Kirchhoff, con la primera de ellas podrán plantearse un número de ecuaciones igual a $r_a = n_i = n - 1$ y con la segunda $r_e = m_i = r - (n - 1)$. Es decir que por aplicación de ambas reglas se dispondrán de $r_e + r_a = r$ ecuaciones. En consecuencia aplicando las reglas de Kirchhoff podrá resolverse totalmente la configuración eléctrica, dado que se forma un sistema de r ecuaciones independientes con r incógnitas.

Particularizando, si las incógnitas fuesen las corrientes de rama, puede in-

ferirse que en lugar de r incógnitas, se puede, a través de la matriz de transformación de corrientes, reducir dicho número a $m_i = r - (n - 1)$ incógnitas. Si por algún medio práctico, como se verá luego es el llamado *método de las mallas*, se determinan las corrientes de malla independientes o rama de enlace, inmediatamente por la primera regla de Kirchoff podrán hallarse las corrientes en las ramas de árbol, quedando así totalmente resuelta la configuración eléctrica.

Si en cambio, las incógnitas fuesen las tensiones de rama, en lugar de r incógnitas, se puede, a través de la matriz de transformación de tensiones, reducir dicho número a $n_i = n - 1$ incógnitas. Si por algún medio práctico, que como se verá luego es el llamado *método de los nodos*, se determinan los potenciales de rama de árbol, por aplicación de la segunda regla de Kirchoff se pueden hallar los potenciales de las ramas de enlace, quedando de esta manera solucionada la configuración eléctrica.

Se apreciará mas adelante los dos métodos de resolución indicados pueden plantearse en forma sistemática, por lo cual permitirán resolver la configuración eléctrica de manera menos laboriosa.

Previo a la descripción de los mencionados métodos, se estudiará la forma de construir las *matrices de interconexión de corrientes y de tensiones*. Pero nótese que estas matrices que permiten determinar las incógnitas restantes luego de aplicar el método sistemático adecuado, *pueden omitirse para problemas sencillos, donde las incógnitas restantes son pocas y pueden hallarse por simple inspección*.

13.4.7) **Matriz de transformación de corrientes:** Considérese el gráfico lineal de un circuito, que se muestra en la Fig. 13.11.a). El mismo posee cinco nodos y ocho ramas por donde circulan corrientes en sentidos arbitrarios. En la Fig. 13.11.b) se ha elegido un árbol cualquiera del gráfico lineal, quedando en consecuencia definidas las ramas de árbol y de enlace. Nótese que en dicha figura, por razones de simplicidad se coloca solamente el subíndice de las

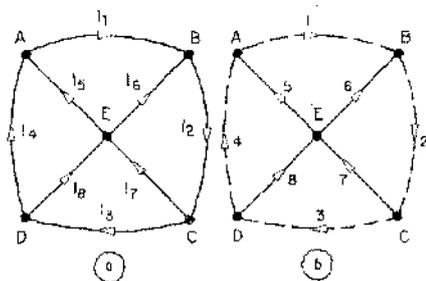


Fig. 13.11

corrientes, entendiéndose que las flechas indican el sentido de referencia para las mismas.

Aplicando la primera regla de Kirchhoff a los cinco nodos resulta:

$$\text{nodo } A \quad I_1 - I_4 - I_5 = 0 \quad (13.22)$$

$$\text{nodo } B \quad -I_1 + I_2 - I_6 = 0 \quad (13.23)$$

$$\text{nodo } C \quad -I_2 + I_3 + I_7 = 0 \quad (13.24)$$

$$\text{nodo } D \quad -I_3 + I_4 + I_8 = 0 \quad (13.25)$$

$$\text{nodo } E \quad I_5 + I_6 - I_7 - I_8 = 0 \quad (13.26)$$

Se observa que si se suman miembro a miembro las ecuaciones recientemente planteadas se encuentra una identidad del tipo $0 = 0$, que para evitarla se deberá suprimir alguna de las ecuaciones que está dando información redundante. Esto es de esperar, pues el número de ecuaciones independientes que puede obtenerse a partir de la primera regla de Kirchhoff es $n_i \neq n - 1$ que para el circuito es cuestión resulta $n_i = 5 - 1 = 4$ ecuaciones. Para continuar el análisis, se suprimirá entonces, una de las ecuaciones por ejemplo la Ec. (13.26).

Se encontrará ahora la *expresión de las corrientes de rama en función de las corrientes de enlace*. Téngase en cuenta que las ramas 1, 2, 3 y 4 son ramas de enlace. Las restantes corrientes se ponen en función de las anteriores a partir de las Ecs. (13.22), (13.23), (13.24) y (13.25) resultando:

$$I_1 = I_{e1}$$

$$I_2 = I_{e2}$$

$$I_3 = I_{e3}$$

$$I_4 = I_{e4}$$

$$I_5 = I_{e1} - I_{e4}$$

$$I_6 = -I_{e1} + I_{e2}$$

$$I_7 = I_{e2} - I_{e3}$$

$$I_8 = I_{e3} - I_{e4}$$

el sistema anterior de r ecuaciones, que expresa todas las corrientes de rama en función de las corrientes de rama de enlace, puede presentarse en forma matricial como se muestra en la Ec. (13.27):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +I_{e1} + 0 + 0 + 0 \\ + 0 + I_{e2} + 0 + 0 \\ + 0 + 0 + I_{e3} + 0 \\ + 0 + 0 + 0 + I_{e4} \\ + I_{e1} + 0 + 0 - I_{e4} \\ - I_{e1} + I_{e2} + 0 + 0 \\ + 0 + I_{e2} - I_{e3} + 0 \\ + 0 + 0 + I_{e3} - I_{e4} \end{bmatrix} \quad (13.27)$$

la matriz del segundo miembro de la Ec. (13.27) puede expresarse como producto de dos matrices, como lo indica la Ec. (13.28), apareciendo en el primer término del segundo miembro la llamada matriz de transformación de corrientes α .

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{e1} \\ I_{e2} \\ I_{e3} \\ I_{e4} \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

y las matrices anteriores pueden expresarse en forma condensada como se presentaron anteriormente, a saber:

$$[I] = [\alpha] [I_e]$$

que dice que la matriz columna de corrientes de rama se obtiene como producto de la matriz de transformación de corrientes por la matriz columna de corrientes de rama de enlace.

La matriz α puede escribirse sencillamente mediante la aplicación de una regla.

Regla práctica para escribir la matriz α por simple inspección:

- a) Se construye un cuadro de r filas y r_e columnas.
- b) Se recorren en el gráfico lineal del circuito las mallas correspondientes a cada una de las corrientes de enlace en el sentido de dichas corrientes. Cada malla corresponde a una columna de la matriz α y en la columna asociada a cada corriente de enlace se escribe:
 - 1 si la corriente en esa rama coincide con el sentido en que se está recorriendo la malla que la contiene.
 - 1 si dichos sentidos son opuestos.
 - 0 en los lugares correspondientes a las filas asociadas a las corrientes de rama no contenidas en la malla recorrida.

Ejemplo:

Se toma el correspondiente al de la Fig. 13.11.b) que se redibuja en la Fig. 13.12, donde se indican los sentidos de circulación para cada malla según lo indica la regla.

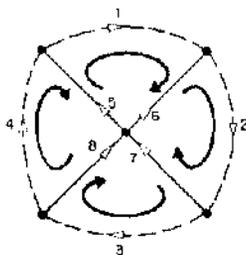


Fig. 13.12

Se construye el cuadro de r filas y r_e columnas ilustrado en la Fig. 13.13. Este cuadro es una construcción auxiliar para el ordenamiento, que se suprime, naturalmente al hallar la matriz α .

$r \backslash r_e$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	1	0	0	-1
6	-1	1	0	0
7	0	1	-1	0
8	0	0	1	-1

Fig. 13.13

Se detallará la forma de construcción (o llenado) de la primera columna, definida por la rama de enlace 1. Como por imposición de la regla el sentido de corriente en la rama 1 coincide con el de circulación se coloca + 1 en la fila correspondiente.

Como las corrientes en las ramas 2, 3 y 4 no están contenidas en la malla en cuestión se coloca un cero en las filas asociadas a esas ramas. Continuando el recorrido de la malla se encuentra la corriente en la rama 5 coincidente con el sentido de circulación y se coloca + 1 en la fila correspondiente. La corriente en la rama 6 tiene sentido de referencia opuesto al de circulación, por lo tanto se coloca -1 en la fila asociada. Las corrientes de las ramas 7 y 8 no están contenidas en la malla en cuestión, por lo cual se coloca un cero en las filas asociadas a esas ramas. De manera análoga se completan las demás columnas.

Adviertase que la matriz encontrada en la Fig. 13.13 coincide con la matriz α incluida en la Ec. (13.28), pues ambas responden al mismo gráfico lineal, y en particular a las mismas ramas de árbol y de enlace.

13.4.8) **Matriz de transformación de tensiones:** Considérese el mismo gráfico lineal de la Fig. 13.11.a) que se reproduce en la Fig. 13.14.a). En la Fig. 13.14.b) se ha elegido un árbol, y las cuatro ramas de enlace definen las mallas independientes indicadas. Nótese que en este gráfico se colocan las flechas correspondientes a la tensión que resultan opuestas a las de corriente, y por razones de simplicidad se coloca solamente el subíndice de dichas tensiones.

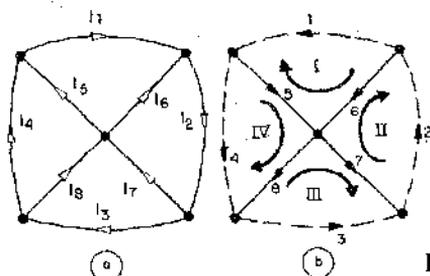


Fig. 13.14

Se asignan los sentidos de circulación indicados y se aplica la segunda regla de Kirchhoff a las cuatro mallas, resultando:

$$\text{malla I} \quad -V_1 + V_6 - V_5 = 0 \quad (13.29)$$

$$\text{malla II} \quad -V_2 - V_7 - V_6 = 0 \quad (13.30)$$

$$\text{malla III} \quad -V_3 - V_8 + V_7 = 0 \quad (13.31)$$

$$\text{malla IV} \quad -V_4 + V_5 + V_8 = 0 \quad (13.32)$$

Naturalmente que podría plantearse otra ecuación para la malla exterior, pero al igual que en el caso anterior se obtiene una identidad del tipo $0 = 0$. Esto es lógico pues el número de ecuaciones independientes que puede obtenerse a partir de la segunda regla de Kirchhoff es $m_i = r - (n - 1)$ que para el circuito en cuestión resulta $m_i = 8 - (5 - 1) = 4$ ecuaciones.

Se encontrará ahora la *expresión de las tensiones de rama en función de las tensiones de árbol*. Téngase en cuenta que las ramas 5, 6, 7 y 8 son ramas de árbol. Las restantes tensiones se ponen en función de las tensiones de rama de árbol a partir de las Ecs. (13.29), (13.30), (13.31) y (13.32), resultando:

$$V_1 = -V_{a5} + V_{a6}$$

$$V_2 = -V_{a6} - V_{a7}$$

$$V_3 = V_{a7} - V_{a8}$$

$$V_4 = V_{a5} + V_{a8}$$

$$V_5 = V_{a5}$$

$$V_6 = V_{a6}$$

$$V_7 = V_{a7}$$

$$V_8 = V_{a8}$$

el sistema anterior de r ecuaciones, que expresa todas las tensiones de rama en función de las tensiones de rama de árbol, puede presentarse en forma matricial como ilustra la Ec. (13.33):

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{a5} + V_{a6} + 0 + 0 \\ 0 - V_{a6} - V_{a7} + 0 \\ 0 + 0 + V_{a7} - V_{a8} \\ V_{a5} + 0 + 0 + V_{a8} \\ V_{a5} + 0 + 0 + 0 \\ 0 + V_{a6} + 0 + 0 \\ 0 + 0 + V_{a7} + 0 \\ 0 + 0 + 0 + V_{a8} \end{bmatrix} \quad (13.33)$$

La matriz del segundo miembro de la Ec. (13.33) puede expresarse como producto de dos matrices, como la indica la Ec. (13.34), apareciendo en el primer término del segundo miembro la llamada matriz de transformación de tensiones β :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a5} \\ V_{a6} \\ V_{a7} \\ V_{a8} \end{bmatrix} \quad (13.34)$$

y las matrices anteriores pueden expresarse en forma condensada como se presentaron anteriormente, a saber:

$$[V] = [\beta] [V_a]$$

que dice que la matriz columna de tensiones de rama es igual a la matriz de transformación de tensiones multiplicada por la matriz columna de tensiones de rama de árbol. La matriz β puede escribirse fácilmente por la aplicación de una regla.

Regla práctica para escribir la matriz β por simple inspección:

- a) Se forma un cuadro de r filas y r_a columnas.
- b) Se recorre el árbol correspondiente a cada una de las mallas definidas por cada rama de enlace, en el sentido necesario para pasar del origen al extremo de la flecha del sentido de referencia de la tensión de enlace.

Cada malla corresponde a una fila de la matriz β y de dicha fila se escribe:

- 1 para la columna correspondiente a una tensión de árbol, si al recorrer ésta lo hacemos en el mismo sentido que el que corresponde a su referencia.
 - 1 si los sentidos son opuestos.
 - 0 para las columnas correspondientes a las ramas de árbol no encontradas a lo largo del trayecto recorrido.
- c) En las filas correspondientes a las tensiones de árbol, se coloca 1 en la columna de dicha tensión de árbol, y cero en las restantes.

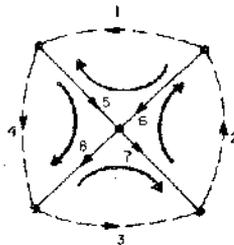


Fig. 13.15

Ejemplo:

Se toma el correspondiente al de la Fig. 13.14.b) que se redibuja en la Fig. 13.15, donde se indican los sentidos de circulación de mallas según lo indica la regla. Se construye el cuadro auxiliar que se ilustra en la Fig. 13.16, compuesto de r filas y r_a columnas. Se detallará a continuación el llenado de

$r \backslash r_a$	5	6	7	8
1	-1	1	0	0
2	0	-1	-1	0
3	0	0	1	-1
4	1	0	0	1
5	1	0	0	0
6	0	1	0	0
7	0	0	1	0
8	0	0	0	1

Fig. 13.16

la primera fila. Al recorrer el árbol en cuestión se encuentra la tensión en la rama 5 con sentido de referencia opuesto al de circulación, y en consecuencia en la columna correspondiente a dicha tensión de árbol se coloca -1 . La tensión en la rama 6 se encuentra coincidente con el sentido de circulación y en consecuencia se coloca 1 en la columna correspondiente a dicha rama. Como las tensiones en las ramas 7 y 8 no están contenidas en el árbol en cuestión se coloca cero en las columnas que corresponden a dichas tensiones. Por aplicación de la regla puede completarse el cuadro.

Nótese que la matriz encontrada en la Fig. 13.16 obviamente coincide con la matriz β incluida en la Ec. (13.34), por corresponder al mismo problema y verificarse la regla aplicada.

13.5 Método de las mallas

a) Inducción de las ecuaciones

Considérese el circuito arbitrario ilustrado en la Fig. 13.17. El número de mallas independientes resulta $m_i = r - (n - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$.

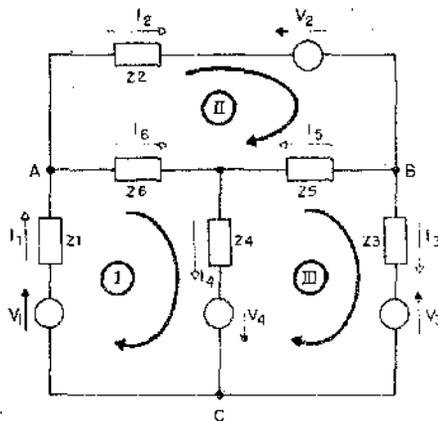


Fig. 13.17

Se numeran las mallas y se asigna un mismo sentido de circulación para recorrer las mismas, con el objeto de obtener una ley de formación y poder sistematizar el método. Con el mismo objeto el sentido de referencia para las corrientes de malla independiente I_1 , I_2 e I_3 se eligen todos coincidentes entre sí e iguales al sentido de circulación adoptado.

Por aplicación de la segunda regla de Kirchhoff resulta:

$$\text{malla I} \quad V_1 + V_4 = Z_1 I_1 + Z_4 I_4 + Z_6 I_6 \quad (13.35)$$

$$\text{malla II} \quad -V_2 = Z_2 I_2 + Z_5 I_5 - Z_6 I_6 \quad (13.36)$$

$$\text{malla III} \quad -V_3 - V_4 = Z_3 I_3 - Z_4 I_4 - Z_5 I_5 \quad (13.37)$$

En el grupo de ecuaciones anteriores se desean expresar ahora las corrientes compartidas entre dos mallas en función de las corrientes de malla independiente. Con ese objeto conviene elegir para plantear la primera regla de Kirchhoff a los nodos indicados como A , B y C y en consecuencia:

$$\text{nodo A} \quad -I_1 + I_2 + I_6 = 0$$

$$\text{nodo B} \quad -I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$\text{nodo C} \quad I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

de este conjunto de ecuaciones pueden despejarse las corrientes compartidas en función de las independientes:

$$I_6 = I_1 - I_2 \quad (13.38)$$

$$I_5 = I_2 - I_3 \quad (13.39)$$

$$I_4 = I_1 - I_3 \quad (13.40)$$

reemplazando adecuadamente las Ecs. (13.38), (13.39) y (13.40) en las Ecs. (13.35), (13.36) y (13.37) será:

$$\begin{aligned} V_1 + V_4 &= Z_1 I_1 + Z_4 (I_1 - I_3) + Z_6 (I_1 - I_2) && \text{malla I} \\ -V_2 &= Z_2 I_2 + Z_5 (I_2 - I_3) - Z_6 (I_1 - I_2) && \text{malla II} \\ -V_3 - V_4 &= Z_3 I_3 - Z_4 (I_1 - I_3) - Z_5 (I_2 - I_3) && \text{malla III} \end{aligned}$$

ordenando las ecuaciones anteriores en función de las corrientes de malla independiente:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_4 + Z_6) I_1 - Z_6 I_2 - Z_4 I_3 &= V_1 + V_4 && \text{malla I} \\ -Z_6 I_1 + (Z_2 + Z_5 + Z_6) I_2 - Z_5 I_3 &= -V_2 && \text{malla II} \\ -Z_4 I_1 - Z_5 I_2 + (Z_3 + Z_4 + Z_5) I_3 &= -V_3 - V_4 && \text{malla III} \end{aligned}$$

Nótese que en las tres ecuaciones de malla planteadas, el coeficiente de la corriente independiente de las mismas está formado por la suma de las impedancias que se obtienen al recorrer la malla en cuestión. Además, por ejemplo en la ecuación correspondiente a la malla I, el coeficiente de la corriente independiente de la malla II es la impedancia de la rama compartida entre las mallas I y II. Análogamente, el coeficiente de la corriente independiente de la malla III está dado por la impedancia de la rama compartida entre las mallas I y III. Estas impedancias compartidas aparecen precedidas por un signo negativo.

Procesos similares ocurren para las ecuaciones correspondientes a las mallas II y III.

Finalmente, se observa que cada ecuación de malla tiene como término independiente a la suma de las tensiones de los generadores hallados al recorrer la malla correspondiente, computados con signo positivo cuando su sentido de referencia es coincidente con el de circulación adoptado, y con signo negativo en caso contrario.

A través del análisis se advierte que existe una ley de formación que permite escribir las ecuaciones en forma sistemática, y que pueden tomar el siguiente aspecto:

$$Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1mi} I_{mi} = \sum_{(I)} V$$

$$Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2mi} I_{mi} = \sum_{(II)} V$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$Z_{mi1} I_1 + Z_{mi2} I_2 + \dots + Z_{mi mi} I_{mi} = \sum_{(mi)} V$$

que en forma matricial pueden presentarse:

$$\begin{bmatrix} \sum_{(I)} V \\ \sum_{(II)} V \\ \dots \\ \sum_{(mi)} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1mi} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2mi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{mi1} & Z_{mi2} & \dots & Z_{mi mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{mi} \end{bmatrix} \quad (13.41)$$

en forma condensada puede escribirse:

$$[\Sigma V] = [Z] [I]$$

y dice que la matriz columna de tensiones de excitación es igual a la matriz impedancia de malla o matriz impedancia del método de las mallas multiplicada por la matriz columna de corrientes de malla independiente.

En la Ec. (13.41) se observa, principalmente, que aparecen dos tipos de impedancia, unas con subíndices repetidos y otras con distintos subíndice, y se denominan:

$Z_{\alpha\alpha}$ = impedancias propias de malla.

$Z_{\alpha\beta}$ = impedancias mutuas o compartidas.

Es de aclarar que $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$ para circuitos constituidos por elementos que se comporten en forma eléctricamente simétrica, es decir que la transferencia de energía puede realizarse con igual facilidad en ambos sentidos. En otras palabras, debe cumplirse que la corriente de un circuito produzca una tensión en el otro, y que la misma corriente circulando por este último produzca la misma tensión en el primero. Los elementos pasivos estudiados hasta aquí cumplen con esa condición y se llaman bilaterales. Esto no resulta así, por ejemplo, para los transistores, que si bien permiten transferir energía en ambos sentidos, no son bilaterales pues no presentan simetría eléctrica o para el caso de las válvulas que son unilaterales.

b) *Regla práctica para escribir las ecuaciones del método de las mallas por simple inspección*

b.1) Se determina el número de mallas independientes, se numeran las mismas asignando un mismo sentido para todas las corrientes en las mismas, en coincidencia con el sentido de circulación adoptado.

b.2) En el primer miembro se forma una matriz columna con tantos elementos como mallas independientes tenga el circuito. Cada uno de los elementos es igual a la sumatoria, para la malla correspondiente a la fila en que se encuentran, de las tensiones excitadoras halladas al recorrerlas íntegramente. Se considerarán positivas aquellas tensiones de los generadores cuyo sentido de referencia sea coincidente con el de circulación adoptado, y negativas en caso contrario.

El segundo miembro está constituido por el producto de dos matrices.

b.3) La matriz cuadrada de impedancia de malla se construye formando un cuadro con tantas filas y columnas como mallas independientes tenga el circuito. Se coloca en cada uno de los elementos definidos una impedancia caracterizada con la letras, Z con doble subíndice. El primer subíndice corresponde a la malla a la cual pertenece la ecuación, o lo que es lo mismo, al número de fila. El segundo subíndice corresponde a la corriente de la cual es coeficiente, o lo que es igual, a la columna correspondiente.

Las impedancias con subíndices repetidos resultan de las sumas de las impedancias encontradas al recorrer la malla identificada por dicho doble subíndice, siendo siempre positivas.

Las impedancias con subíndices distintos son iguales a la impedancia de la rama compartida entre las dos mallas identificadas por dichos subíndices, *cambiada de signo*.

- b.4) La matriz columna de corrientes incógnitas está constituida por tantos elementos como mallas independientes tenga el circuito.

NOTA:

En el ejemplo de la Fig. 13.17 de la cual se derivó el método incluye generadores de tensión. En el caso de que existan en la configuración a resolver generadores de corriente, con el objeto de aplicar la regla anterior, debe convertírselos en generadores de tensión aplicando el Teorema de Thévenin, que se analizará en el Cap. 14. En forma abreviada, puede adelantarse que permite reemplazar un dipolo dado por un generador ideal de tensión en serie con una impedancia. La impedancia es la que presenta el dipolo con los generadores que contiene desactivados, y la tensión del generador es la existente entre las terminales del dipolo cuando se encuentran a circuito abierto.

En la Fig. 13.18 se da un ejemplo típico que aparece en la resolución sistemática de circuitos. En la Fig. 13.18.a) se dibuja un dipolo que incluye un generador de corriente, y en la Fig. 13.18.b) su equivalente de Thévenin.

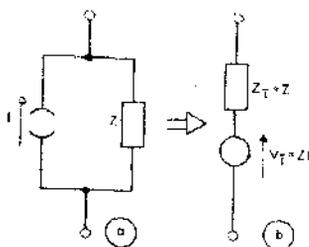


Fig. 13.18

c) Número de ecuaciones ahorradas y ventajas del método

Para resolver una configuración dada de r ramas, por aplicación de la primera y segunda Reglas de Kirchhoff deben plantearse r ecuaciones.

En cambio, aplicando el método en las mallas se determinan las corrientes en las ramas de enlace por lo cual se plantean $r_e = r - (n - 1)$ ecuaciones. Las restantes incógnitas se hallan como ya se explicó anteriormente.

En consecuencia, una de las ventajas del método de las mallas es que conduce a un sistema de $n - 1$ ecuaciones menos que las que surgen de la aplicación directa de las reglas de Kirchhoff. Otra es que las ecuaciones pueden plantearse por simple inspección en forma sistemática, lo cual en principio

minimiza la posibilidad de cometer errores. Finalmente, como las ecuaciones resultan ordenadas para su resolución en forma matricial, brindan comodidad y rapidez en las operaciones.

d) *Impedancia de entrada*

A través del método de las mallas puede calcularse la impedancia de entrada de un dipolo pasivo, o bien la de un dipolo activo con sus generadores desactivados.

Para justificar la forma de cálculo puede partirse de la Ec. (13.41). Si se llama Δ_Z al determinante de la matriz impedancia, las corrientes se calcularán como:

$$I_1 = \frac{\begin{array}{c} \Sigma V \\ (I) \\ \Sigma V \\ (II) \\ \dots \\ \Sigma V \\ (mi) \end{array} \quad \begin{array}{c} Z_{12} \dots \dots Z_{1 \ mi} \\ Z_{22} \dots \dots Z_{2 \ mi} \\ \dots \dots \dots \\ Z_{mi2} \quad Z_{mi \ mi} \end{array}}{\Delta_Z}$$

$$I_2 = \frac{\begin{array}{c} Z_{11} \quad \Sigma V \dots \dots Z_{1 \ mi} \\ Z_{21} \quad \Sigma V \dots \dots Z_{2 \ mi} \\ \dots \dots \dots \\ Z_{mi1} \quad \Sigma V \dots \dots Z_{mi \ mi} \end{array} \quad \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ \dots \\ (mi) \end{array}}{\Delta_Z}$$

y así

subsiguientemente hasta:

$$I_{mi} = \frac{\begin{array}{c} Z_{11} \quad Z_{12} \dots \dots \Sigma V \\ Z_{21} \quad Z_{22} \dots \dots \Sigma V \\ \dots \dots \dots \\ Z_{mi1} \quad Z_{mi2} \dots \dots \Sigma V \end{array} \quad \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ \dots \\ (mi) \end{array}}{\Delta_Z}$$

desarrollando los determinantes de los numeradores de las ecuaciones anteriores, por los elementos de las columnas de tensiones, resulta:

$$I_1 = \left(\frac{A_{11}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(I)} V + \left(\frac{A_{21}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(II)} V + \dots + \left(\frac{A_{mi1}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(mi)} V$$

$$I_2 = \left(\frac{A_{12}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(I)} V + \left(\frac{A_{22}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(II)} V + \dots + \left(\frac{A_{mi2}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(mi)} V$$

$$I_{mi} = \left(\frac{A_{1mi}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(I)} V + \left(\frac{A_{2mi}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(II)} V + \dots + \left(\frac{A_{mimi}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(mi)} V$$

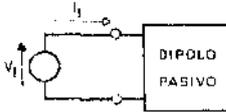


Fig. 13.19

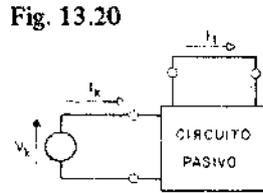


Fig. 13.20

Considerando ahora el dipolo pasivo que se muestra en la Fig. 13.19, excitado solamente por un generador ideal de tensión V_1 circulará una corriente I_1 de entrada al dipolo, y la ecuación de la corriente para la malla 1 resulta:

$$I_1 = \left(\frac{A_{11}}{\Delta_Z} \right) V_1 + \left(\frac{A_{21}}{\Delta_Z} \right) 0 + \dots + \left(\frac{A_{mi1}}{\Delta_Z} \right) 0$$

por lo cual la impedancia de entrada resulta:

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\Delta_Z}{A_{11}} \quad (13.42)$$

e) Impedancia de transferencia

La impedancia de transferencia se define como el cociente entre la tensión aplicada en una malla, y el valor de la corriente circulante en otra malla debido a la causa mencionada, con todos los generadores restantes desactivados.

Considérese el circuito de la Fig. 13.20. En la malla κ se aplica una tensión V_K dando lugar a la circulación de una corriente I_K , y de una corriente I_ϱ en la malla ϱ . La ecuación de la corriente para la malla ϱ resulta:

$$I_\varrho = \left(\frac{A_{1\varrho}}{\Delta_Z} \right) 0 + \dots \dots \dots \left(\frac{A_{K\varrho}}{\Delta_Z} \right) V_K + \dots \dots \dots \left(\frac{A_{m\varrho}}{\Delta_Z} \right) 0$$

por lo cual la impedancia de transferencia resulta:

$$Z_{TK\varrho} = \frac{V_K}{I_\varrho} = \frac{\Delta_Z}{A_{K\varrho}} \tag{13.43}$$

13.6 Método de los nodos

a) Inducción de las ecuaciones

Considérese el circuito arbitrario ilustrado en la Fig. 13.21. El número de nodos independientes resulta $n_i = n - 1 = 3 - 1 = 2$.

Se numeran los dos nodos independientes, y el nodo 3 se elige como referencia, computando respecto de él, los potenciales de los demás nodos. Los generadores de corriente proveen I_5 e I_6 , obviamente conocidas; los sentidos de referencia para las demás corrientes se han tomado en forma arbitraria.

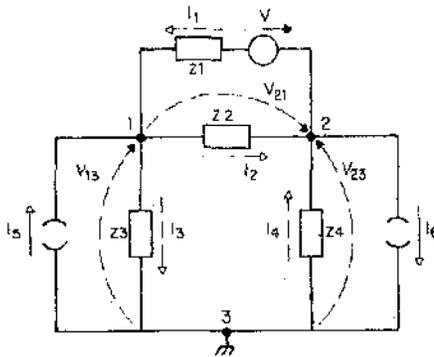


Fig. 13.21

De la aplicación de la primera regla de Kirchhoff resulta:

$$\text{nodo 1} \quad -I_1 + I_2 + I_3 - I_5 = 0 \quad (13.44)$$

$$\text{nodo 2} \quad I_1 - I_2 - I_4 + I_6 = 0 \quad (13.45)$$

En las ecuaciones anteriores I_5 e I_6 son las corrientes independientes impuestas por los generadores. Las demás pueden expresarse en función de los potenciales y las admitancias aplicando la ley de Ohm en las ramas del circuito de la Fig. 13.21, y en consecuencia:

$$V_{21} = V_2 - V_1 = V + Z_1 I_1 \quad \therefore \quad I_1 = (V_2 - V_1 - V) Y_1 \quad (13.46)$$

$$V_{21} = V_2 - V_1 = -I_2 Z_2 \quad \therefore \quad I_2 = (V_1 - V_2) Y_2 \quad (13.47)$$

$$V_{13} = V_1 - 0 = I_3 Z_3 \quad \therefore \quad I_3 = V_1 Y_3 \quad (13.48)$$

$$V_{23} = V_2 - 0 = -I_4 Z_4 \quad \therefore \quad I_4 = -V_2 Y_4 \quad (13.49)$$

reemplazando adecuadamente las Ecs. (13.46), (13.47), (13.48), y (13.49) en las Ecs. (13.44) y (13.45) será:

$$\text{nodo 1} \quad - (V_2 - V_1 - V) Y_1 + (V_1 - V_2) Y_2 + V_1 Y_3 - I_5 = 0$$

$$\text{nodo 2} \quad (V_2 - V_1 - V) Y_1 - (V_1 - V_2) Y_2 + V_2 Y_4 + I_6 = 0$$

ordenando las ecuaciones anteriores en función de los potenciales de nodo independiente:

$$\text{nodo 1} \quad (Y_1 + Y_2 + Y_3) V_1 - (Y_1 + Y_2) V_2 = I_5 - VY_1$$

$$\text{nodo 2} \quad -(Y_1 + Y_2) V_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_4) V_2 = -I_6 + VY_1$$

Nótese que en las dos ecuaciones de nodo planteadas, los potenciales de nodo independiente tienen como coeficiente a la suma de las admitancias que concurren a los respectivos nodos. Además, en la ecuación correspondiente al nodo 1, el potencial del nodo 2 tiene como coeficiente la suma de las admitancias tendidas entre los nodos 1 y 2, precedidos de un signo negativo. Pro-

ceso análogo ocurre en la ecuación del nodo 2, respecto al potencial del nodo 1.

Finalmente, se observa que cada ecuación de nodo tiene como término independiente a la suma de las corrientes independientes, provistas por los generadores, que convergen al nodo al cual corresponde la ecuación, computadas con signo positivo si son entrantes en nodo, y negativo en caso contrario. Adviértase que en el circuito en estudio, además de los generadores de corriente, se ha incluido una de tensión, y que en las ecuaciones aparece transformado en uno de corriente. Al respecto se insistirá sobre esto en la regla práctica.

A través del análisis se advierte que existe una ley de formación que permite escribir las ecuaciones en forma sistemática, y que pueden tomar el siguiente aspecto:

$$Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + \dots + Y_{1ni} V_{ni} = \sum_1 I$$

$$Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + \dots + Y_{2ni} V_{ni} = \sum_2 I$$

.....

$$Y_{ni1} V_1 + Y_{ni2} V_2 + \dots + Y_{nini} V_{ni} = \sum_{ni} I$$

que en forma matricial pueden presentarse:

$$\begin{bmatrix} \sum_1 I \\ \sum_2 I \\ \dots \\ \sum_{ni} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1ni} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{ni1} & Y_{ni2} & \dots & Y_{nini} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_{ni} \end{bmatrix} \quad (13.50)$$

en forma condensada puede escribirse:

$$[\Sigma I] = [Y] [V]$$

y dice que la matriz columna de corrientes de excitación es igual a la matriz admitancia de nodo o matriz admitancia del método de los nodos, multiplicada por la matriz columna de tensiones de nodo independiente.

En la Ec. (13.50) se observa, principalmente, que existen dos tipos de admitancias, unas con subíndices repetidos y otras con distintos subíndices, y se denominan:

$Y_{\alpha\alpha}$ = admitancias propias de nodos.

$Y_{\alpha\beta}$ = admitancias mutuas.

respecto de las admitancias mutuas $Y_{\alpha\beta}$ e $Y_{\beta\alpha}$ valen las mismas consideraciones realizadas en el método de las mallas para $Z_{\alpha\beta}$ y $Z_{\beta\alpha}$. Esto es $Y_{\alpha\beta} = Y_{\beta\alpha}$ para circuitos constituidos por elementos bilaterales.

b) *Regla práctica para escribir las ecuaciones del método de los nodos por simple inspección*

- b.1) Se determina el número de nodos independientes, eligiendo la referencia y numerándolos.
- b.2) En el primer miembro se forma una matriz columna con tantos elementos como nodos independientes tenga el circuito. Cada uno de los elementos es igual a la sumatoria, para el nodo correspondiente a la fila en que se encuentra, de las corrientes excitadoras que convergen al nodo en cuestión. Se considerarán positivas aquellas corrientes de los generadores cuyo sentido de referencia es entrante al nodo, y negativo en caso contrario.

El segundo miembro está constituido por el producto de dos matrices.

- b.3) La matriz cuadrada de admitancia de nodo se construye formando un cuadro con tantas filas y columnas como nodos independientes tenga el circuito. En cada uno de los elementos definidos se coloca una admitancia caracterizada con la letra Y con doble subíndice. El primer subíndice corresponde al nodo al cual pertenece la ecuación, o lo que es lo mismo, al número de fila. El segundo subíndice corresponde a la tensión de la cual será coeficiente, o lo que es igual, a la columna correspondiente.

Las admitancias con subíndices repetidos resultan de la suma de las admitancias de las ramas que concurren al nodo identificado por el doble subíndice, siendo siempre positivas.

Las admitancias con distintos subíndices resultan de la suma de las admitancias de las ramas tendidas entre los dos nodos identificados por los subíndices *cambiada de signo*.

b.4) La matriz columna de tensiones incógnitas está constituida por tantos elementos como nodos independientes tenga el circuito.

NOTA: En el caso de que existan en la configuración a resolver generadores de tensión, con el objeto de aplicar la regla anterior, debe convertírselos en generadores de corriente aplicando el Teorema de Norton, que se analizará en el Cap. 14. En forma abreviada, puede adelantarse, que permite reemplazar un dipolo dado por un generador ideal de corriente en paralelo con una admitancia. La admitancia es la que presenta el dipolo dado con los generadores que contiene desactivados, y la corriente del generador será la que circula por el mencionado par de terminales cuando se los cortocircuita.

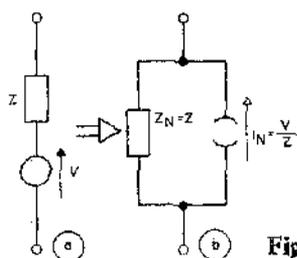


Fig. 13.22

En la Fig. 13.22 se da un ejemplo típico que aparece en la resolución sistemática de circuitos. En la Fig. 13.22.a) se dibuja un dipolo que incluye un generador de tensión, y en la Fig. 13.22.b) su equivalente de Norton.

c) Número de ecuaciones ahorradas y ventajas del método

Es sabido que para resolver una configuración de r ramas por aplicación de las reglas de Kirchhoff deben plantearse r ecuaciones.

En cambio, aplicando el método de los nodos se determinan los potenciales de los nodos independientes, por lo cual se plantean $r_o = n_i = n - 1$ ecuaciones. Las restantes incógnitas se hallan como ya se explicó anteriormente.

En consecuencia, una de las ventajas del método de los nodos es que conduce a un sistema de r_o ecuaciones menos que las que surgen de la aplicación directa de la regla de Kirchhoff. Otra, es que las ecuaciones pueden plantearse por simple inspección en forma sistemática, lo que en principio reduce la posibilidad de cometer errores. Finalmente, como las ecuaciones resultan ordenadas, para su resolución en forma matricial, ofrecen rapidez y facilidad para las operaciones.

d) Admitancia de entrada

Por medio del método de los nodos puede calcularse la admitancia de entrada de un dipolo pasivo, o bien la de un dipolo activo con sus generadores desactivados.

Considérese al dipolo pasivo que se ilustra en la Fig. 13.23, excitado solamente por un generador ideal de corriente I_1 , que produce una tensión V_1 entre el nodo 1 y la referencia. Debido a que la única fuente es I_1 , de la Ec. (13.50) resulta que la ecuación de la tensión para el nodo 1 es:

$$V_1 = \left(\frac{A_{11}}{\Delta_Y} \right) I_1 + 0 + \dots + 0$$

por lo cual la admitancia de entrada resulta:

$$Y_e = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta_Y}{A_{11}} \quad (13.51)$$

e) Admitancia de transferencia

La admitancia de transferencia se define como el cociente entre la corriente que se inyecta a un nodo y el valor de la tensión que aparece en otro nodo respecto de la referencia, con todos los generadores restantes desactivados.

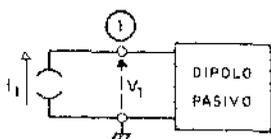


Fig. 13.23

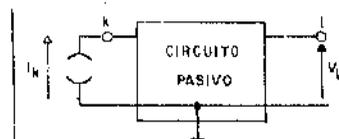


Fig. 13.24

En el circuito de la Fig. 13.24 se inyecta al nodo K una corriente I_K lo que da lugar a una tensión V_L en un nodo L del circuito. La ecuación de la tensión para el nodo L resulta:

$$V_L = \left(\frac{A_{L1}}{\Delta_Y} \right) 0 + \dots + \left(\frac{A_{LK}}{\Delta_Y} \right) I_K + \dots + \left(\frac{A_{LL}}{\Delta_Y} \right) 0$$

por lo cual la admitancia de transferencia resulta:

$$Y_{TK\ell} = \frac{I_K}{V_\ell} = \frac{\Delta_Y}{A_{K\ell}} \quad (13.52)$$

13.7 Comparación de los métodos de las mallas y los nodos.

Campo de aplicación de cada uno

El método de las mallas permite la determinación de las corrientes de malla independiente, y conociendo éstas pueden determinarse todas las demás incógnitas. Deben plantearse $r_e = m_i = r - (n - 1)$ ecuaciones.

El método de los nodos permite la determinación de las tensiones de nodo independiente, y de allí se pueden determinar las demás incógnitas. Deben plantearse $r_n = n_i = n - 1$ ecuaciones.

En el caso de querer determinar una configuración, una *primera selección* del método a emplear puede hacerse teniendo en cuenta a aquél que provee el menor número de ecuaciones. Es evidente que si $m_i < n_i$ conviene emplear el método de las mallas, y si en cambio $m_i > n_i$ es recomendable emplear el método de los nodos.

Una *segunda selección* resulta si la diferencia es del orden de una ecuación. Hay que tener en cuenta si el propósito inmediato es la determinación de corrientes o tensiones, en el primer caso se empleará el método de las mallas y en el segundo el de los nodos.

13.8 Aplicación del principio de dualidad.

Obtención por simple inspección del circuito dual

En el Cap. 3 se presentó el principio de dualidad. Dos circuitos son duales cuando sus ecuaciones de equilibrio son formalmente iguales, es decir que mediante un cambio de variables se puede pasar de unas a otras. Se encontró además la dualidad existente entre elementos de circuito, y variables eléctricas.

A la luz de lo antedicho, si se analizan las ecuaciones del método de las mallas y de los nodos precedentemente halladas se llega a la conclusión de que dichos métodos son duales.

La ventaja del principio de dualidad es que, una vez determinado que dos circuitos son duales, basta con determinar el comportamiento de uno de ellos, pues todas las ecuaciones halladas serán válidas para el otro con el correspondiente cambio de nomenclatura que indique la dualidad.

Pero, para saber que dos circuitos son duales deben encontrarse las ecuaciones de equilibrio de ambos, lo que es realmente trabajoso para configura-

ciones complicadas, y este trabajo hace que se pierda gran parte de la ventaja del mencionado principio. Sería recomendable entonces, encontrar algún método cualitativo que por simple inspección permita hallar el dual de un circuito dado.

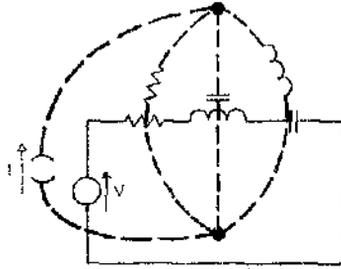


Fig. 13.25

Considérese el circuito R L C sería alimentado por un generador de tensión que se muestra en la Fig. 13.25. Como el mismo posee una malla independiente, el dual poseerá un solo nodo independiente, en consecuencia estará constituido por dos nodos. En la misma Fig. 13.25 se construye el circuito dual, colocando uno de los nodos dentro de la malla dada y otro fuera. Se tienden luego entre los nodos ramas que pasen por cada uno de los elementos, en las cuales se colocan sus duales.

Nótese que se obtiene el circuito R L C paralelo excitado por un generador de corriente que se sabe que es el dual del serie dado. Este método puede extenderse para cualquier configuración, en consecuencia se puede proceder a sistematizarlo.

Regla práctica para hallar por simple inspección el circuito dual a uno dado

- a) Se fija un nodo dentro de cada una de las mallas independientes y un nodo externo.
- b) Entre cada dos nodos se tiende una rama a través de cada uno de los elementos de la rama que separa ambos nodos. En cada una de dichas ramas se incluye el elemento dual del que se atraviesa.
- c) En una malla en la cual la tensión de un generador tenga un sentido horario, en el nodo correspondiente a dicha malla la corriente del generador dual deberá ser entrante y viceversa.

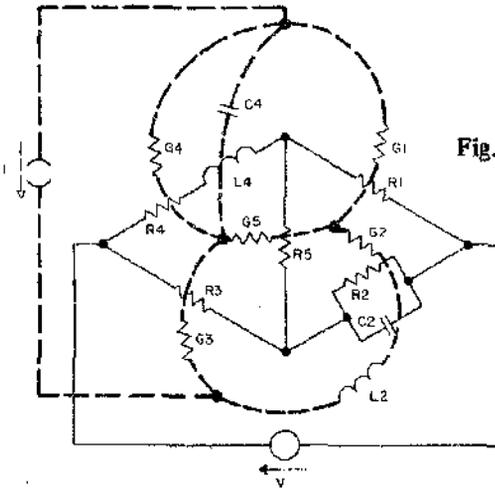


Fig. 13.26

Ejemplo:

En la Fig. 13.26 se dibuja en línea llena un circuito dado, y por aplicación de la regla anterior, en línea de trazo se construye el circuito dual correspondiente.

13.9 Problemas resueltos

Como ya se aclaró, los métodos descritos se desarrollaron en el dominio transformado de Laplace, y por razones de simplicidad en la exposición se suprimió el subíndice "s" a lo largo del capítulo. En la realización de los problemas se retomará la nomenclatura utilizada hasta el presente, según sea para problemas que se desarrollan en el dominio de frecuencia compleja, en el temporal o en el de frecuencia imaginaria correspondiente al régimen senoidal permanente.

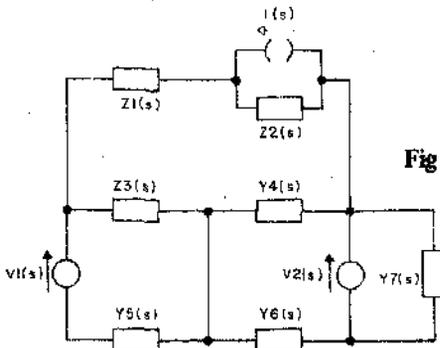


Fig. 13.27

13.9.1) Para el circuito dado en la Fig. 13.27, aplicando el método de las mallas se pide:

- Redibujar nuevamente el circuito efectuando las transformaciones que fuesen necesarias. Determinar el número de mallas independientes, elegir un árbol, e indicar las corrientes de malla independientes o de rama de enlace, y asignar sentidos de circulación.
- Plantear las ecuaciones matriciales correspondientes al método de las mallas indicando en forma explícita la expresión de cada uno de los elementos constitutivos de las mismas.
- Indicar como podría determinarse la corriente a través de la impedancia $Z_3(s)$, que se denomina como $I_{Z_3}(s)$, y su expresión temporal asociada, que se denomina $i_{z_3}(t)$.

Solución:

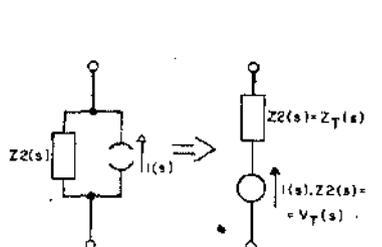


Fig. 13.28

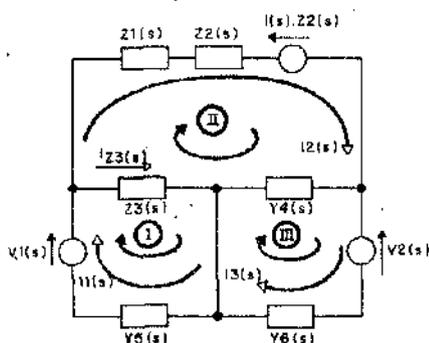


Fig. 13.29

- En primer lugar se reemplaza el generador de corriente $I(s)$ y la impedancia asociada $Z_2(s)$ por el equivalente de Thévenin, como se indica en la Fig. 13.28. Obsérvese que si se construye el gráfico lineal del circuito dado, la rama que contiene a la admitancia $Y_7(s)$ quedará suprimida. Es natural, la corriente en dicha rama puede calcularse en forma inmediata, por lo que no vale la pena agregar una ecuación más al sistema, en consecuencia se pasa a eliminar $Y_7(s)$ por superflua. En estas condiciones resulta el circuito mostrado en la Fig. 13.29. Para el mismo, el número de mallas independientes es $m_i = r - (n - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$. En la misma figura se numeran las mallas, eligiendo para todas las corrientes de malla independiente el mismo sentido de referencia, que es coincidente con el de circulación, con el objeto de poder aplicar la regla práctica.

b) Por aplicación de la regla práctica dada en 13.5.b) resulta:

$$\begin{bmatrix} \sum_{(I)} V(s) \\ \sum_{(II)} V(s) \\ \sum_{(III)} V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & Z_{13}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & Z_{23}(s) \\ Z_{31}(s) & Z_{32}(s) & Z_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}$$

donde:

$$\sum_{(I)} V(s) = V_1(s)$$

$$\sum_{(II)} V(s) = -I(s) Z_2(s)$$

$$\sum_{(III)} V(s) = -V_2(s)$$

$$Z_{11}(s) = Z_3(s) + \frac{1}{Y_5(s)}$$

$$Z_{22}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s)}$$

$$Z_{33}(s) = \frac{1}{Y_4(s)} + \frac{1}{Y_6(s)}$$

$$Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = -Z_3(s)$$

$$Z_{13}(s) = Z_{31}(s) = -0 = 0$$

$$Z_{23}(s) = Z_{32}(s) = -\frac{1}{Y_4(s)}$$

c) La corriente $I_{Z_3}(s)$ es una corriente compartida que debe calcularse en función de las corrientes de rama de enlace o malla independiente. Por aplicación de la primera regla de Kirchhoff al nodo A resulta:

$$-I_1(s) + I_2(s) + I_{Z_3}(s) = 0 \quad \therefore$$

$$I_{Z_3}(s) = I_1(s) - I_2(s)$$

donde:

$$I_1(s) = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta_Z} \quad e \quad I_2(s) = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta_Z}$$

finalmente, la expresión temporal de la corriente puede hallarse según se expresó en el Cap. 10 por antitransformación de $I_{Z_3}(s)$, a saber:

$$i_{Z_3}(t) = \mathcal{L}^{-1} [I_{Z_3}(s)]$$

naturalmente, deberán conocerse las expresiones transformadas de las immitancias y las correspondientes a tensiones de los generadores.

13.9.2) Aplicando el método de los nodos determinar el valor complejo eficaz de la corriente que circula por R_4 , para el circuito ilustrado en la Fig. 13.30.

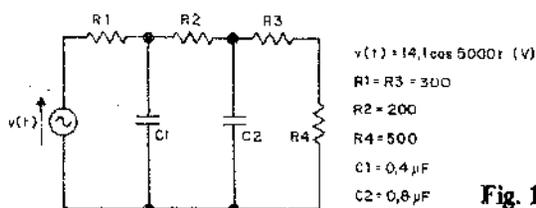


Fig. 13.30

Solución:

Se calcula en primer lugar el valor complejo eficaz de la tensión aplicada a partir de:

$$v(t) = 14,1 \operatorname{sen} (5\,000 t + \pi/2) \text{ V} \therefore$$

$$\bar{V} = 10 e^{j \pi/2} = j \, 10 \text{ V}$$

Se reemplaza luego el generador de tensión en serie con R_1 por su equivalente de Norton según se indica en la Fig. 13.31. En la misma resulta:

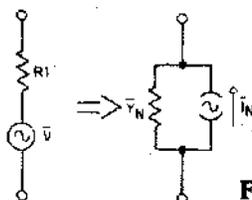


Fig. 13.31

$$\bar{Y}_N = \frac{1}{R_1} \text{ o bien } \bar{Z}_N = R_1$$

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{V}}{R_1} = \frac{j 10}{300} = j 333 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

El número de nodos independientes, resulta:

$$n_i = n - 1 = 3 - 1 = 2$$

redibujándose el circuito como lo indica la Fig. 13.32.

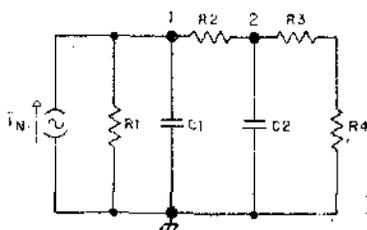


Fig. 13.32

Adviértase que se toma como nodo de referencia al más conveniente para el problema.

Por aplicación de la regla práctica dada en 13.6.b) resulta:

$$\begin{bmatrix} \Sigma \bar{I} \\ 1 \\ \Sigma \bar{I} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} \quad (13.53)$$

haciendo:

$$\Sigma \bar{I} = \bar{I}_N = j 333 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$\Sigma \bar{I} = 0 \text{ A}$$

$$\bar{Y}_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1 = 85,4 \cdot 10^{-4} e^{j 13,5^\circ} \text{ } \Omega$$

$$\bar{Y}_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} + j\omega C_2 = 74,2 \cdot 10^{-4} e^{j 32,6^\circ} \text{ } \Omega$$

$$\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21} = -\frac{1}{R_2} = -50 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega$$

Por lo que reemplazando los valores anteriores en la Ec. (13.53) y resolviendo para \bar{V}_2 es:

$$\bar{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 85,4 \cdot 10^{-4} e^{j 135^\circ} & j 333 \cdot 10^{-4} \\ -50 \cdot 10^{-4} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 85,4 \cdot 10^{-4} e^{j 135^\circ} & -50 \cdot 10^{-4} \\ -50 \cdot 10^{-4} & 74,2 \cdot 10^{-4} e^{j 32,6^\circ} \end{vmatrix}} = \frac{1,66 \cdot 10^{-4} e^{j 90^\circ}}{0,48 \cdot 10^{-4} e^{j 62,2^\circ}}$$

$$\bar{V}_2 = 3,46 e^{j 27,8^\circ} \text{ [V]}$$

por lo que la corriente en el resistor R_4 valdrá:

$$\bar{I}_4 = \frac{\bar{V}_2 - 0}{R_3 + R_4} = \frac{3,46 e^{j 27,8^\circ}}{300 + 500} = 43,2 \cdot 10^{-4} e^{j 27,8^\circ} \text{ A}$$

13.9.3) Con relación al circuito ilustrado en la Fig. 13.33, aplicar el método de las mallas con el objeto de calcular la impedancia de entrada, mediante la siguiente secuencia.

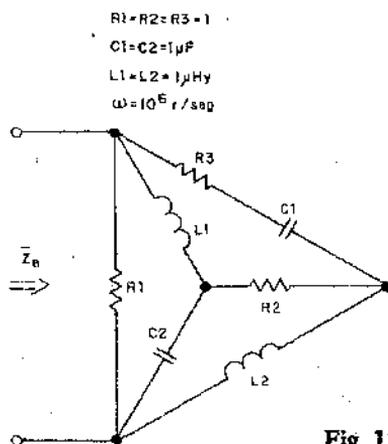


Fig. 13.33

- a) Redibujar el circuito, determinando el número de mallas independientes, indicar los sentidos de referencia para las corrientes de malla independiente y el sentido de circulación.

- b) Plantear las ecuaciones matriciales del método de las mallas, calculando el valor de cada una de los elementos de las matrices.
- c) Calcular el valor número de la impedancia de entrada.

Solución:

- a) La configuración empleada para el cálculo de la impedancia de entrada es la mostrada en la Fig. 13.34. Nótese que al construir el gráfico lineal del circuito dado, el resistor R_1 queda eliminado al reemplazar el generador ideal por un cortocircuito, como se indica en la Fig. 13.35, y el número de mallas independientes será $m_i = r - (n - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$. Esto se debe a que el cálculo de la corriente en R_1 es inmediato y no es necesario para su determinación plantear una ecuación más de malla. Pero como en el cálculo de la impedancia debe incluirse a R_1 , puede optarse por el circuito mostrado en la Fig. 13.36, donde por el método de las mallas se calcula la impedancia de entrada a la derecha del generador que puede llamarse \bar{Z}'_e y luego ese resultado en paralelo con R_1 dará la impedancia de entrada \bar{Z}_e .

El mismo resultado puede obtenerse directamente si se consideran las cuatro mallas mostradas en la Fig. 13.34, a costa de resolver determinantes de un orden mayor.

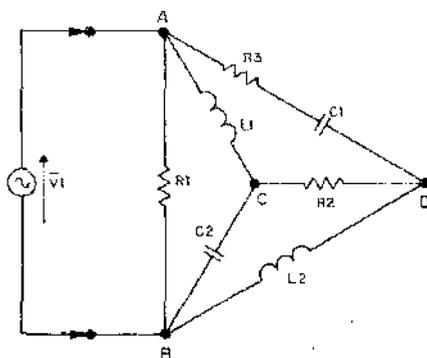


Fig. 13.34

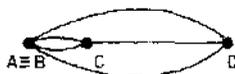


Fig. 13.35

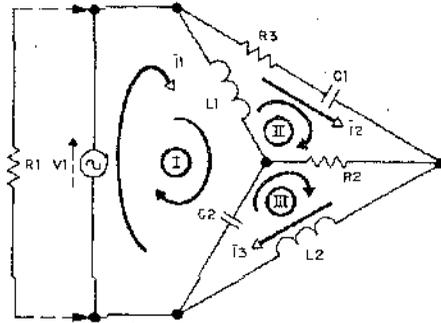


Fig. 13.36

$$b) \begin{bmatrix} \Sigma \bar{V} \\ \text{(I)} \\ \Sigma \bar{V} \\ \text{(II)} \\ \Sigma \bar{V} \\ \text{(III)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} \quad (13.54)$$

donde:

$$\Sigma \bar{V} = \bar{V}_1 \quad \Sigma \bar{V} = 0 \quad ; \quad \Sigma \bar{V} = 0$$

(I) (II) (III)

$$\bar{Z}_{11} = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_2} = 0 \quad \Omega$$

$$\bar{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_1 + R_3 - j \frac{1}{\omega C_1} = 2 \quad \Omega$$

$$\bar{Z}_{33} = R_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 1 \quad \Omega$$

$$\bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{31} = - \left(-j \frac{1}{\omega C_2} \right) = j \quad \Omega$$

$$\bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{32} = - (R_2) = -1 \quad \Omega$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = - (j\omega L_1) = -j \quad \Omega$$

$$c) \quad \bar{Z}'_e = \frac{\Delta_Z}{A_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j & j \\ -j & 2 & -1 \\ j & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \Omega$$

por lo cual la impedancia de entrada será:

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{Z}'_e R_1}{\bar{Z}'_e + R_1} = \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = 0,5 \quad \Omega$$

advértase que el circuito presenta estado de resonancia de factor de potencia unitario.

13.9.4) Mediante el empleo del concepto de admitancia de transferencia verificar el valor de \bar{V}_2 hallado para el circuito de la Fig. 13.32 correspondiente al problema 13.9.2. Empleense los valores ya calculados para la Ec. (13.53).

Solución:

Se ha definido a la admitancia de transferencia como $Y_{TK\varrho} = \frac{I_K}{V_\varrho} = \frac{\Delta_Y}{A_{K\varrho}}$ que adaptada a las necesidades del problema resulta:

$$\bar{Y}_{T12} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\Delta_Y}{A_{12}} = \frac{0,48 \cdot 10^{-4} e^{j62,2^\circ}}{-(-50 \cdot 10^{-4})}$$

$$\bar{Y}_{T12} = 96 \cdot 10^{-4} e^{j62,2^\circ} \quad \text{U}$$

por lo cual

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{I}_1}{Y_{T12}} = \frac{333 \cdot 10^{-4} e^{j90^\circ}}{96 \cdot 10^{-4} e^{j62,2^\circ}}$$

$$\bar{V}_2 = 3,46 e^{j27,8^\circ} \quad [V]$$

13.10 Problemas propuestos

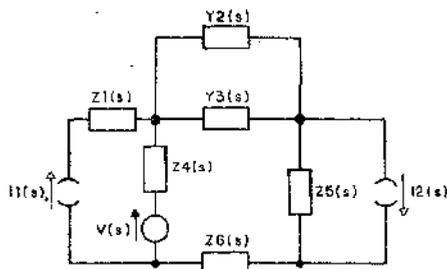


Fig. 13.37

13.10.1) Para el circuito dado en la Fig. 13.37, aplicando el método de los nodos se pide:

- Redibujar nuevamente el circuito efectuando las transformaciones que fuesen necesarias, determinando el número de nodos independientes y tomando la referencia adecuada.
- Plantear las ecuaciones matriciales correspondientes al método de los nodos, indicando en forma explícita la expresión de cada uno de los elementos constitutivos de los mismos.
- Indicar como podría determinarse la tensión en bornes de $Y_3(s)$ y su expresión temporal asociada.

Resultados:

- a) El circuito pedido se muestra en la Fig. 13.38 donde $n_i = 3$

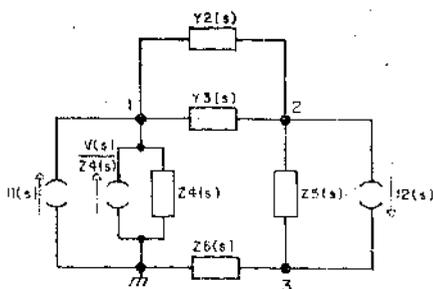


Fig. 13.38

$$b) \begin{bmatrix} \sum \bar{I}(s) \\ 1 \\ \sum I(s) \\ 2 \\ \sum I(s) \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) & Y_{13}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) & Y_{23}(s) \\ Y_{31}(s) & Y_{32}(s) & Y_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \end{bmatrix}$$

$$\sum_1 I(s) = I_1(s) + \frac{V(s)}{Z_4(s)}$$

$$\sum_2 I(s) = -I_2(s)$$

$$\sum_3 I(s) = I_2(s)$$

$$Y_{11}(s) = Y_2(s) + Y_3(s) + \frac{1}{Z_4(s)}$$

$$Y_{22}(s) = Y_2(s) + Y_3(s) + \frac{1}{Z_5(s)}$$

$$Y_{33}(s) = \frac{1}{Z_5(s)} + \frac{1}{Z_6(s)}$$

$$Y_{12}(s) = Y_{21}(s) = -(Y_2(s) + Y_3(s))$$

$$Y_{13}(s) = Y_{31}(s) = -0 = 0$$

$$Y_{23}(s) = Y_{32}(s) = -\frac{1}{Z_5(s)}$$

c) Determinando primeramente:

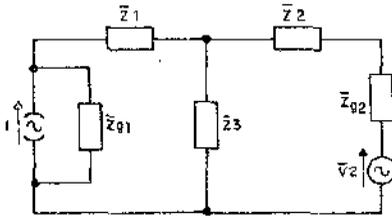
$$V_1(s) = \frac{\Delta V_1}{\Delta Y} \quad \text{y} \quad V_2(s) = \frac{\Delta V_2}{\Delta Y}$$

será:

$$V_{1-2}(s) = V_1(s) - V_2(s) \quad \text{y en consecuencia}$$

$$v_{1-2}(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_{1-2}(s)]$$

13.10.2) Para el circuito ilustrado en la Fig. 13.39 se desea calcular, aplicando el método de las mallas, el valor complejo eficaz de la corriente circulante por \bar{Z}_1 , presentando los resultados de la siguiente manera:



$$\bar{I}_1 = (10 - j30) \text{ (A)}$$

$$\bar{v}_2 = 50 e^{j0} \text{ (V)}$$

$$\bar{Z}_{q1} = (4 + j3) \Omega$$

$$\bar{Z}_{q2} = (1 + j5) \Omega$$

$$\bar{Z}_1 = (1 - j3) \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = (2 - j8) \Omega$$

$$\bar{Z}_3 = (2 + j4) \Omega$$

Fig. 13.39

- Redibujar nuevamente el circuito efectuando las transformaciones necesarias.
- Plantear las ecuaciones matriciales correspondientes al método de las mallas, calculando el valor de cada uno de los elementos constitutivos de las mismas.
- Determinar el valor de la corriente que circula por \bar{Z}_1 .

Resultados:

- Se muestra en la Fig. 13.40.

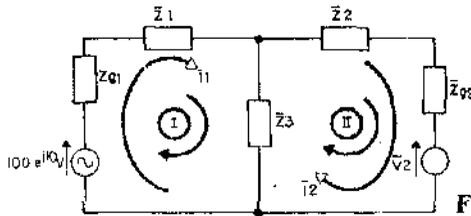


Fig. 13.40

$$\begin{bmatrix} \sum_{\text{(I)}} \bar{V} \\ \sum_{\text{(II)}} \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\text{(I)}} \bar{V} = 100 e^{j0} \text{ V}; \quad \sum_{\text{(II)}} \bar{V} = -50 e^{j0} \text{ V}$$

$$\bar{Z}_{11} = (4 + j4) \Omega$$

$$\bar{Z}_{22} = (5 + j1) \Omega$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = -(2 + j4) \Omega$$

- $\bar{I}_1 = (12,26 - j7,07) \text{ A}$

13.10.3) Para el circuito dado en la Fig. 13.33, aplicar el método de los nodos con el objeto de calcular la impedancia de entrada mediante la siguiente secuencia:

- Redibujar el circuito adaptándolo a los requerimientos del problema, determinando el número de nodos independientes y numerándolos, eligiendo la referencia adecuada.
- Plantear las ecuaciones matriciales del método de los nodos, calculando el valor de cada uno de los elementos de las matrices.
- Calcular el valor numérico de la impedancia de entrada.

Resultados:

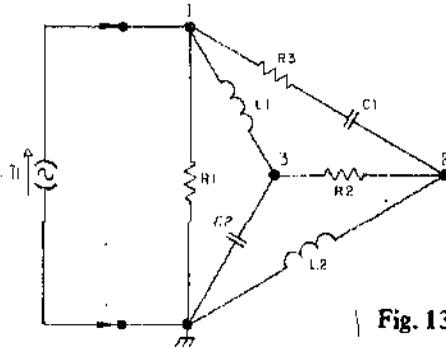


Fig. 13.41

a) Se ilustra en la Fig. 13.41.

$$b) \begin{bmatrix} \sum \bar{I}_1 \\ \sum \bar{I}_2 \\ \sum \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{13} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \bar{Y}_{23} \\ \bar{Y}_{31} & \bar{Y}_{32} & \bar{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} \sum_1 \bar{I} &= \bar{I}_1, \quad \sum_2 \bar{I} = 0, \quad \sum_3 \bar{I} = 0 \\ \bar{Y}_{11} &= (1,5 - j 0,5) \text{ } \Omega \\ \bar{Y}_{22} &= (1,5 - j 0,5) \text{ } \Omega \\ \bar{Y}_{33} &= 1 \text{ } \Omega \\ \bar{Y}_{12} &= \bar{Y}_{21} = (-0,5 - j 0,5) \text{ } \Omega \\ \bar{Y}_{13} &= \bar{Y}_{31} = j 1 \text{ } \Omega \\ \bar{Y}_{23} &= \bar{Y}_{32} = -1 \text{ } \Omega \\ \bar{Z}_e &= 0,5 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

Teorema de los circuitos

14.1 **Introducción:** Los métodos de resolución sistemática de circuitos presentados en el capítulo anterior brindan una herramienta de uso general para la solución de los problemas, apta para cualquier complicación circuital, a excepción de que la misma esté constituida por elementos lineales. Si bien estos métodos son generales, no proporcionan la solución más sencilla y rápida para ciertos casos determinados. Esto último puede lograrse mediante el auxilio de los llamados *Teoremas de los Circuitos*, que en realidad constituyen los métodos de ingenio para la resolución de los mismos, y es propósito de este capítulo exponer los Teoremas, *directamente en el dominio transformado de Laplace*. Esto último hace que el régimen permanente de los circuitos excitados por señales senoidales o continuas se presenten como casos particulares.

Se comenzará enunciando el ya aplicado *Principio o Teorema de Superposición*, que permite considerar la acción de los generadores excitadores actuando en forma separada.

Luego, en el conocimiento de que en los circuitos eléctricos existe una parte del esquema que se mantiene invariable, mientras que otra conectada al primero, llamada carga, generalmente es variable, se exponen los *Teoremas de Thévenin y de Norton*. Estos permiten reducir el esquema invariable, de geometría relativamente complicada, por una configuración circuital muy sencilla, lo que proporciona facilidad para el análisis.

Seguidamente se analizará el *Teorema de Compensación*, también conocido como *Teorema de Sustitución*, que permite reemplazar una impedancia por un generador y viceversa. La aplicación de este teorema permite determinar las variaciones de tensión y corriente en un elemento circuital cuando se modifica el valor de su impedancia.

A continuación se extenderá el *Teorema de Superposición para el caso de circuitos que cambian de estado*, como ser debido a la apertura o cierre de

un interruptor. Después se expondrá el *Teorema de Maxima Tráansferencia de Potencia*, que establece la relación que debe existir entre la impedancia de carga y la del generador, para que ella se lleve a cabo.

El *Teorema de Reciprocidad*, que se analiza luego, permite en definitiva, intercambiar un generador por un lugar de medición, pudiendo de esa manera ubicar el generador en un lugar más conveniente para el análisis del circuito.

Luego se expone la equivalencia entre las configuraciones T y Π o *estrella* y *triángulo*, llamada también *transformación de Kennelly* lo que permite simplificar algunos problemas.

Finalmente, se presenta un teorema referente a la *reducción de generadores* llamado también *Teorema de Millman*, que da la forma de combinar ciertos generadores en uno solo equivalente. Cuando este teorema puede aplicarse resulta más práctico que el de superposición.

Es interesante destacar, que tanto los métodos de resolución sistemáticos expuestos en el capítulo anterior, como los teoremas que se estudian en este, son aplicables a configuraciones circuitales compuestos por elementos lineales y generadores de tensión y/o corriente. En electrónica, estos generadores reciben el nombre de generadores independientes pues la magnitud de la variable eléctrica que imponen es independiente del circuito al cual esté conectado. Pero, es precisamente en los circuitos electrónicos, donde aparecen los llamados generadores controlados, en los cuales la magnitud de la variable eléctrica de salida depende de una variable eléctrica de control, la que a su vez depende del circuito al cual está conectado dicho generador. La aparición de estos generadores controlados alteran tanto la aplicación de los métodos sistemáticos de resolución, así como también la aplicación de algunos teoremas de circuitos, dando lugar a la aparición de otros. Si bien no es propósito de este capítulo analizar la aplicación de los teoremas para circuitos que contengan generadores controlados, puede adelantarse que la mayoría de los teoremas que se expondrán pueden ser útiles para su aplicación en circuitos lineales que contengan generadores controlados, guardando ciertas precauciones, a excepción del Teorema de Reciprocidad.

Para circuitos electrónicos se han desarrollado teoremas específicos. El *Teorema de reducción de generadores controlados* permite la eliminación de ciertos generadores, y el *Teorema de bisección* que proporciona una forma de emplear la simetría de ciertos circuitos electrónicos con el objeto de reducir trabajo en el análisis del mismo.

14.2 Teorema de superposición

“La respuesta, tensión o corriente, en un tramo de circuito idealizado debida a la acción de varias excitaciones puede ser obtenida como suma de las

respuestas individuales correspondientes a la acción de cada uno de los generadores con los restantes desactivados". Recuérdese que desactivar un generador es reemplazarlo por su impedancia interna. En la Fig. 14.1 se ejemplifica el enunciado anterior. En la Fig. 14.1.a) se muestra un circuito arbitrario, en el cual se han puesto en evidencia las excitaciones y el tramo en el cual se desea hallar la tensión y/o la corriente. En las Figs. 14.1.b), c) y d) se muestran los estados parciales donde se reemplazan los generadores que no actúan por sus impedancias internas. En consecuencia resulta que:

$$V(s) = V'(s) + V''(s) + V'''(s) \quad \text{o bien:}$$

$$I(s) = I'(s) + I''(s) + I'''(s)$$

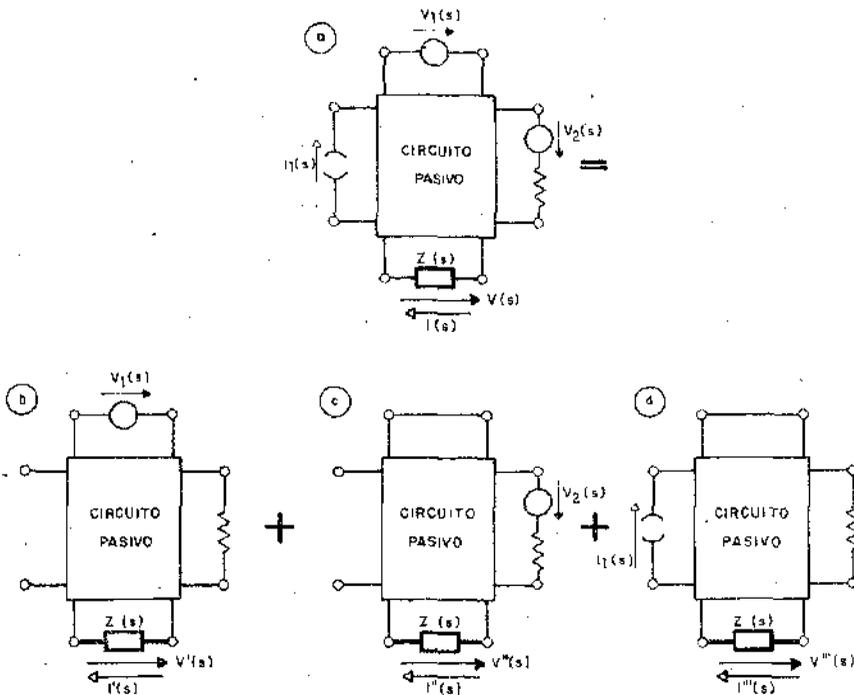


Fig. 14.1

Este teorema se presentó en forma explícita en los dos métodos de resolución sistemáticos expuestos en el Cap. 13, y puede verificarse a partir de

ellos. Si por ejemplo se parte del método de las mallas, considerando un circuito de m_i mallas según se analizó en 13.5.d) resulta que la ecuación de la corriente para una malla cualquiera es:

$$I_{m_i}(s) = \left(\frac{A_{1m_i}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(I)} V(s) + \left(\frac{A_{2m_i}}{\Delta_Z} \right) \sum_{(II)} V(s) + \dots + \left(\frac{A_{m_i m_i}}{\Delta_Z} \right) \sum_{m_i} V(s)$$

si los generadores están ubicados en ramas no compartidas, y existe uno solo por malla será:

$$I_{m_i}(s) = \left(\frac{A_{1m_i}}{\Delta_Z} \right) V_1(s) + \left(\frac{A_{2m_i}}{\Delta_Z} \right) V_2(s) + \dots + \left(\frac{A_{m_i m_i}}{\Delta_Z} \right) V_{m_i}(s)$$

lo que prueba la validez del teorema, dado que cada término del segundo miembro de la última ecuación indica el aporte de cada generador actuando individualmente sobre la corriente total en la malla m_i y que dicho aporte no depende de los generadores restantes.

De manera similar puede analizarse partiendo de las ecuaciones del método de los nodos.

La utilidad de este teorema es que permite resolver una configuración circuital obviando el planteo de una gran cantidad de ecuaciones simultáneas puesto que se tiene en cuenta una sola excitación a la vez. Para el caso de que al mismo circuito se le agreguen otros generadores, valdrán los resultados obtenidos anteriormente a los que habrá que sumar los que aporten las nuevas excitaciones, permitiendo así reducir trabajo.

Naturalmente, que este teorema *podrá aplicarse a circuitos y variables eléctricas lineales*, por lo que no será apta su aplicación por ejemplo para el cálculo de potencias, dado que la relación de la misma con la corriente o la tensión es cuadrática.

14.3 Teorema de Thévenin

"En toda configuración circuital arbitraria constituida por elementos de circuitos lineales, activos y pasivos, una parte del esquema que tenga un par de terminales de unión con el resto, puede ser reemplazada por un generador ideal de tensión en serie con una impedancia. Dicha impedancia es aquella que presenta el par de terminales mencionado con los generadores de la parte a reemplazar desactivados. La tensión del generador es la medida entre el mencionado par de terminales a circuito abierto, o lo que es lo mismo, con la parte no reemplazada desconectada".

El sentido de referencia para el generador equivalente de Thévenin debe elegirse de tal manera que impulse la corriente en la parte no reemplazada en el mismo sentido que lo haría el circuito reemplazado.

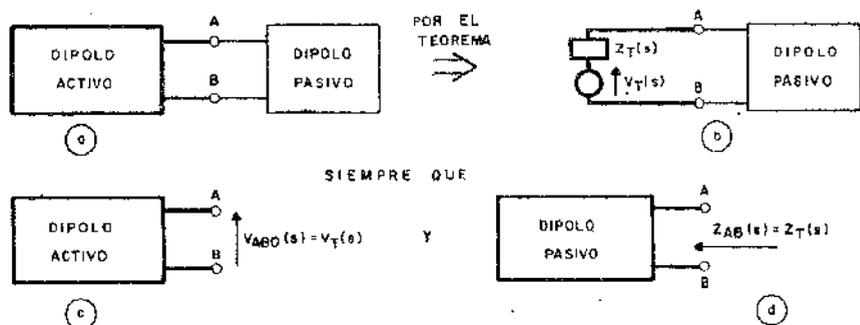


Fig. 14.2

En la Fig. 14.2 se describe gráficamente el enunciado anterior. En la Fig. 14.2.a) se muestra la parte del circuito a reemplazar, simbolizada como un dipolo activo, y la parte no reemplazada que puede suponerse como una carga de la primera, y en consecuencia se le asigna el nombre de dipolo pasivo. En la Fig. 14.2.b) se muestra el circuito resultante de la aplicación del teorema. En la Fig. 14.2.c) se ilustra la forma de cálculo para la tensión del generador de Thévenin, $V_T(s)$, que se mide entre los puntos A-B a circuito abierto, por lo tanto $V_{AB0}(s) = V_T(s)$.

Finalmente, en la Fig. 14.2.d) se indica que al desactivar el dipolo activo se convierte en uno pasivo, y la impedancia existente entre los terminales A-B es la impedancia equivalente de Thévenin es decir que $Z_{AB}(s) = Z_T(s)$.

La demostración del teorema puede efectuarse mediante la aplicación del Teorema de Superposición. En la Fig. 14.3.a) se muestra un dipolo activo con una carga conectada entre sus terminales, donde, obviamente, todos los elementos que incluye el dipolo son lineales. En la Fig. 14.3.b) se abre el circuito de carga con lo cual la corriente a través de esta se anula y la tensión en terminales del dipolo activo toma el valor $V_{AB0}(s)$ correspondiente a la condición de circuito abierto. De esta manera, no se produce caída de tensión en la $Z_C(s)$, y en consecuencia la tensión entre los puntos B-C es también $V_{AB0}(s)$.

Si se coloca ahora un generador ideal de tensión entre los puntos B-C cuyo valor numérico, signo, y sentido de referencia coincida con $V_{AB0}(s)$, como se ilustra en la Fig. 14.3.c) no se altera ninguna variable eléctrica en el circuito respecto del estado correspondiente a la Fig. 14.3.b).

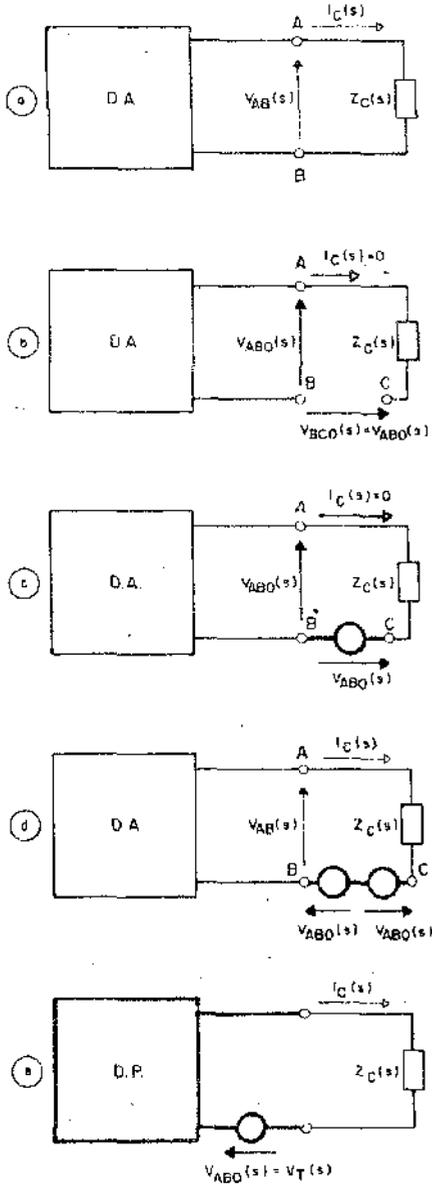


Fig. 14.3

Si ahora, como se indica en la Fig. 14.3.d) se adiciona un segundo generador ideal de tensión de valor $V_{AB_0}(s)$ pero con sentido de referencia opuesto al primer generador intercalado, la tensión entre los puntos $B-C$ resulta nula. Por lo tanto la tensión en terminales del dipolo $V_{AB}(s)$ y la corriente a través de la carga $I_C(s)$ adoptarán los mismos valores que los correspondientes al estado original del circuito que se ilustra en la Fig. 14.3.a).

Puede emplearse ahora el Teorema de Superposición con el objeto de calcular el valor de la corriente en la carga. Obsérvese, de acuerdo a la Fig. 14.3.c) que la acción conjunta del primer generador intercalado y todos los existentes en el dipolo activo ofrecen como resultado una contribución nula al valor de la corriente en la carga, por lo cual pueden desactivarse, como se indica en la Fig. 14.3.e). En consecuencia, la corriente que circula en la carga correspondiente al estado parcial en que sólo actúa el segundo generador intercalado, coincide con el valor de la corriente correspondiente al estado original del circuito ilustrado en la Fig. 14.3.a). De esta manera, *para el cálculo de la corriente y la tensión en la carga* sólo debe considerarse el estado parcial representado en la Fig. 14.3.e).

Se observa que el circuito original ha quedado reemplazado por una impedancia en serie con un generador ideal de tensión. Dicha impedancia es la que presenta el dipolo cuando se desactivan sus generadores, y la tensión del generador es la existente entre terminales del dipolo activo con la carga desconectada, por lo cual se satisface el enunciado del teorema.

Nótese que si bien se utilizó el Teorema de Superposición para la demostración del Teorema de Thévenin, este último *puede emplearse para el cálculo de potencia en la carga*, dado que la *equivalencia del circuito de Thévenin se refiere a la corriente en la carga*. Pero es debido a esto último, que surge una *limitación* en la aplicación del teorema; como la equivalencia no se refiere al estado del dipolo activo, *no podrá emplearse para el cálculo de rendimiento de un circuito*. Existe sin embargo una excepción a esta limitación. Adviértase que en el equivalente de Thévenin no hay potencia disipada a circuito abierto, en consecuencia podrá usarse para el cálculo de rendimiento cuando al desconectar la carga en el circuito original la potencia disipada sea nula.

Ejemplo:

Dado el circuito de la Fig. 14.4.a) se pide:

- Hallar el circuito equivalente en Thévenin, indicando en forma explícita las expresiones de $V_T(s)$ y $Z_T(s)$.
- ¿Puede emplearse el equivalente hallado para el cálculo de rendimientos?

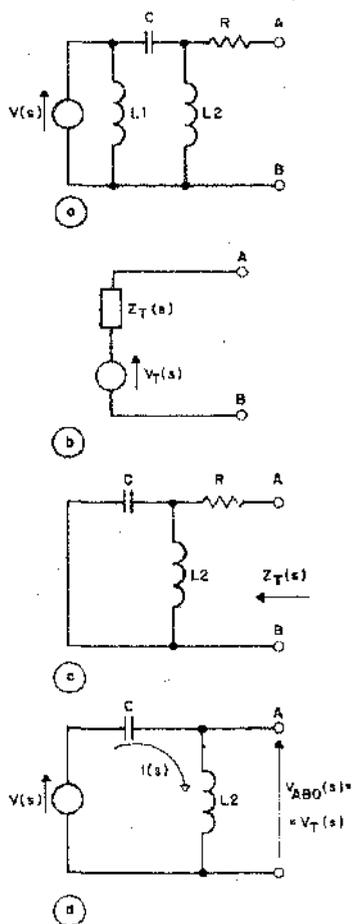


Fig. 14.4

Solución:

a) El equivalente de Thévenin se muestra en la Fig. 14.4.b) donde el sentido de referencia para el generador se obtiene por simple inspección del circuito original.

Reemplazando, en el circuito original, el generador por un cortocircuito, se elimina L_1 , por lo cual la impedancia equivalente de Thévenin se calcula por asociación de impedancias en el circuito de la Fig. 14.4.c).

resultando:

$$Z_T(s) = R + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + sC}$$

Para hallar la expresión del generador equivalente de Thévenin, en el circuito original puede eliminarse L_1 dado que se encuentra en paralelo con un generador ideal de tensión y calcular la tensión sobre L_2 , en el circuito de la Fig. 14.4.d) en consecuencia:

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL_2 + \frac{1}{sC}} \quad \therefore$$

$$V_{L_2}(s) = V_T(s) = \frac{V(s)sL_2}{sL_2 + \frac{1}{sC}}$$

b) Puede emplearse el equivalente hallado para el cálculo de rendimiento, pues en el circuito original mostrado en la Fig. 14.4. no se disipa potencia a circuito abierto.

14.4 Teorema de Norton

“En toda configuración circuital arbitraria constituida por elementos de circuito lineales, activos y pasivos, una parte del esquema que tenga un par de terminales de unión con el resto, puede ser reemplazada por un generador ideal de corriente en paralelo con una admitancia. Dicha admitancia es aquella que presenta el par de terminales mencionados con los generadores de la parte a reemplazar desactivados. La corriente del generador es la que circula entre dicho par de terminales, cuando se los cortocircuita”.

El sentido de referencia para el generador equivalente de Norton debe elegirse de tal manera que impulse la corriente en la parte no reemplazada en el mismo sentido que lo haría el circuito reemplazado.

En la Fig. 14.5 se describe gráficamente el enunciado anterior. En la Fig. 14.5.a) se muestra la parte de circuito a reemplazar, simbolizada como un dipolo activo, y la parte no reemplazada que puede suponerse como una carga de la primera, y por lo tanto se le asigna el nombre de dipolo pasivo. En la Fig. 14.5.b) se muestra el circuito resultante de la aplicación del teorema. En la Fig. 14.5.c) se ilustra la forma de cálculo para la corriente del

generador Norton, $I_N(s)$, que es la circulante entre los puntos $A-B$ cortocircuitados, por lo cual $I_{CC}(s) = I_N(s)$. Finalmente, en la Fig. 14.5.d) se indica que al desactivar el dipolo activo se convierte en uno pasivo, y la admitancia existente entre los terminales $A-B$ es la admitancia equivalente de Norton, es decir que $Y_{AB}(s) = Y_N(s)$.

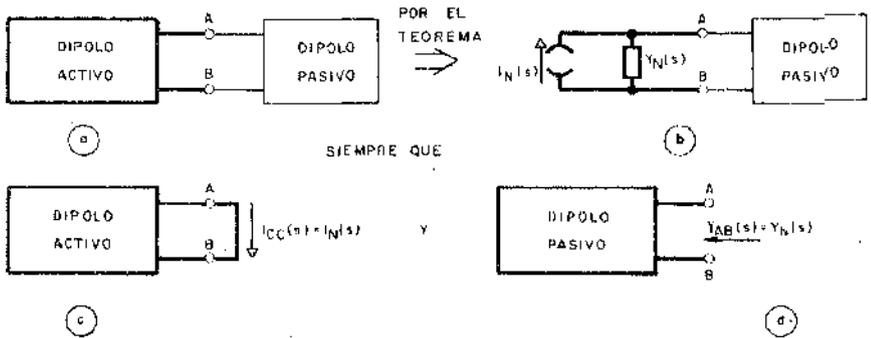


Fig. 14.5

La demostración del teorema puede efectuarse mediante la aplicación del Teorema de Superposición. En la Fig. 14.6.a) se muestra un dipolo activo con una carga conectada entre sus terminales, donde, obviamente todos los elementos que incluye el dipolo son lineales. En la Fig. 14.6.b) se cortocircuitan los puntos $A-B$, y entre dichos puntos la corriente toma el valor $I_{CC}(s)$ correspondiente a la condición de cortocircuito, y en consecuencia resultarán nulas la tensión y la corriente en la carga.

Si se coloca en reemplazo del cortocircuito un generador ideal de corriente cuyo valor numérico, signo y sentido de referencia coincida con $I_{CC}(s)$, como se ilustra en la Fig. 14.6.c), no se altera ninguna variable eléctrica en el circuito respecto del estado correspondiente a la Fig. 14.6.b).

Si ahora, como se indica en la Fig. 14.6.d) se adiciona un segundo generador ideal de corriente de valor $I_{CC}(s)$ pero con sentido de referencia opuesto al del primer generador intercalado, la corriente total en la rama de los generadores será nula, es decir $I(s) = 0$. Por lo tanto la tensión en terminales del dipolo $V_{AB}(s)$ y la corriente a través de la carga $I_C(s)$ adoptarán los mismos valores que los correspondientes al estado original del circuito que se ilustra en la Fig. 14.6.a).

Puede emplearse ahora el Teorema de Superposición con el objeto de calcular el valor de la corriente en la carga. Obsérvese, de acuerdo a la Fig. 14.6.c) que la acción conjunta del primer generador intercalado y todos los

existentes en el dipolo activo ofrecen como resultado una contribución nula al valor de la corriente en la carga, por lo cual pueden desactivarse, como se indica en la Fig. 14.6.e). En consecuencia, la corriente que circula en la carga correspondiente al estado parcial en que sólo actúa el segundo generador intercalado, coincide con el valor de la corriente correspondiente al estado original del circuito ilustrado en la Fig. 14.6.a). De esta manera, para el cálculo de la corriente y la tensión en la carga sólo debe considerarse el estado parcial representado en la Fig. 14.6.e).

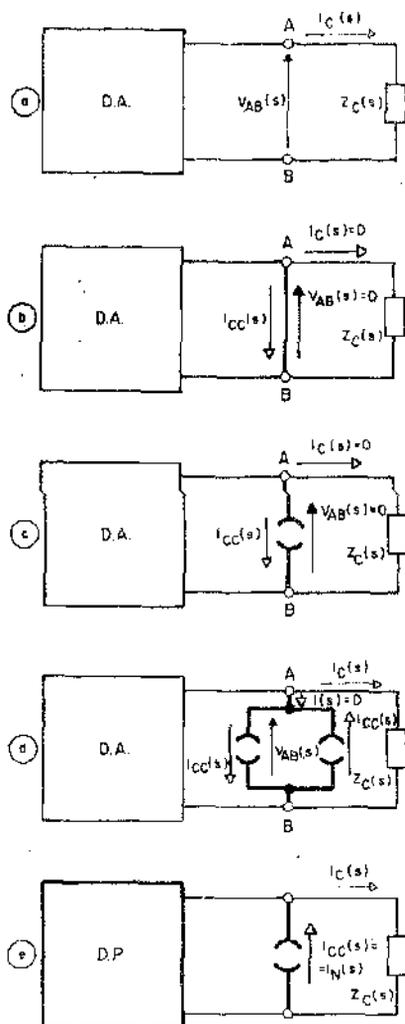


Fig. 14.6

Se observa que el circuito original ha quedado reemplazado por un generador ideal de corriente en paralelo con una admitancia. Dicha admitancia es la que presenta el dipolo cuando se desactivan sus generadores, y la corriente del generador es la circulante entre los terminales del dipolo activo cuando se los cortocircuita, por lo cual se satisface el enunciado del teorema.

Por las mismas razones que las expuestas para el teorema de Thévenin, el teorema de Norton *puede emplearse para el cálculo de la potencia en la carga, pero no podrá emplearse para el cálculo de rendimiento de un circuito*. Existe sin embargo una excepción a esta limitación. Adviértase que en el equivalente de Norton no hay potencia disipada con los terminales cortocircuitados; en consecuencia podrá usarse para el cálculo de rendimiento cuando al cortocircuitar el circuito original la potencia disipada sea nula.

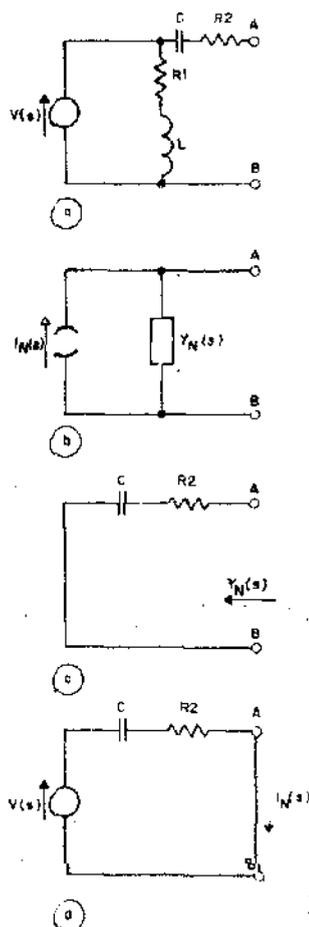


Fig. 14.7

Ejemplo:

Dado el circuito de la Fig. 14.7.a) se pide:

- Hallar el circuito equivalente de Norton, indicando en forma explícita las expresiones de $I_N(s)$ e $Y_N(s)$.
- ¿Puede emplearse el equivalente hallado para el cálculo de rendimiento?

Solución:

- El equivalente de Norton se muestra en la Fig. 14.7.b), donde el sentido de referencia para el generador se obtiene por simple inspección del circuito original.

Si en el circuito original, se reemplaza el generador por un cortocircuito, queda eliminada la rama $R_1 - L$, por lo cual la admitancia equivalente de Norton se calcula por asociación de impedancias en el circuito de la Fig. 14.7.c) y luego se halla su inversa, resultando:

$$Y_N(s) = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC}}$$

Para hallar la expresión del generador equivalente de Norton, en el circuito original puede eliminarse la rama $R_1 - L_1$ dado que se encuentra en paralelo con el generador ideal de tensión y la corriente de cortocircuito se halla a partir del circuito mostrado por la Fig. 14.7.d), donde:

$$I_N(s) = \frac{V(s)}{R_2 + \frac{1}{sC}}$$

- No puede emplearse el equivalente hallado para el cálculo de rendimiento pues en el circuito original mostrado en la Fig. 14.7.a) existe potencia disipada al cortocircuitar los terminales $A-B$.

14.5 Cálculo de las immitancias equivalentes de Thévenin y Norton en función de la tensión de circuito abierto y la corriente de cortocircuito

Todo dipolo activo, como se simboliza en la Fig. 14.8.a) que reúna requisitos ya especificados, poscerá un equivalente de Thevenin según se muestra

en la Fig. 14.8.b) y otro de Norton, como se ilustra en la Fig. 14.8.c). Comparando el desarrollo de ambos teoremas es fácil advertir la dualidad existente entre los mismos, es decir que los circuitos hallados por aplicación de ambos teoremas son equivalentes entre sí. Nótese que si bien los teoremas se expusieron en un planteo general, para un caso dado, conducirán a circuitos equivalentes válidos únicamente para la frecuencia a que se los calculó.

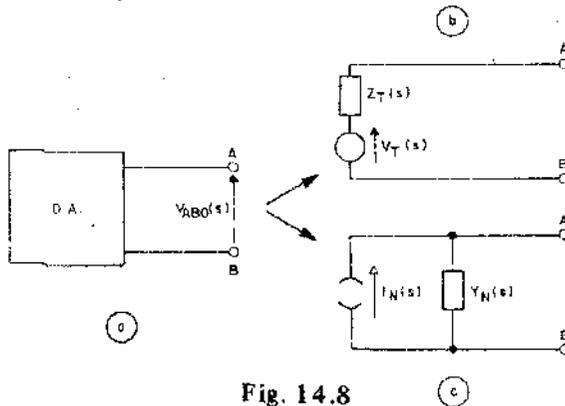


Fig. 14.8

En virtud de la dualidad expuesta, es de esperar que la impedancia equivalente de Thévenin sea la inversa de la admitancia de Norton. En función de las variables eléctricas, esas immitancias pueden calcularse de la siguiente manera. Si en el equivalente de Thévenin mostrado en la Fig. 14.8.b) se cortocircuitan los terminales A-B, resulta el mostrado en la Fig. 14.9.a), para el cual aplicando la segunda regla de Kirchhoff:

$$V_T(s) = V_{AB0}(s) = Z_T(s) I_{cc}(s) \therefore$$

$$Z_T(s) = \frac{V_{AB0}(s)}{I_{cc}(s)} \quad (14.1)$$

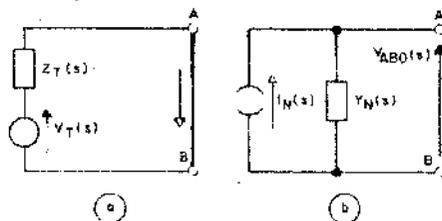


Fig. 14.9

Por otra parte, si en el equivalente de Norton, redibujado en la Fig. 14.9.b) se calcula la tensión a circuito abierto resulta:

$$V_{AB_0}(s) = \frac{I_N(s)}{Y_N(s)} = \frac{I_{CC}(s)}{Y_N(s)}$$

$$Y_N(s) = \frac{I_{CC}(s)}{V_{AB_0}(s)} \quad (14.2)$$

Las Ecs. (14.1) y (14.2) permiten calcular $Z_T(s)$ e $Y_N(s)$ en función de la tensión a circuito abierto del dipolo original y de la corriente en cortocircuito del mismo, verificándose que:

$$Z_T(s) = \frac{1}{Y_N(s)}$$

14.6 Teorema de compensación

“En una configuración circuital arbitraria constituida por elementos de circuito activos y pasivos, una impedancia cualquiera puede ser reemplazada por un generador ideal de tensión cuyo valor numérico, signo y sentido de referencia coincida con la tensión existente entre extremos de dicha impedancia”.

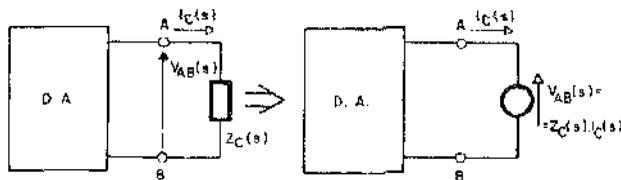


Fig. 14.10

En la Fig. 14.10 se describe gráficamente el enunciado anterior. La *demonstración del teorema* puede derivarse fácilmente analizando los gráficos de la Fig. 14.11. En la Fig. 14.11.a) se muestra un dipolo activo con una carga conectada entre sus terminales, donde, todos los elementos que incluye el dipolo son lineales. Se intercalan en la rama de la carga, como ilustra la Fig. 14.11.b) dos generadores ideales de tensión, cuyas tensiones sean numéricamente iguales, con sentidos de referencia opuestos entre sí y con valor absoluto coincidente con el de la tensión sobre la impedancia de carga. Dado que entre los puntos B-C la diferencia de potencial es nula, no se alterarán las

variables eléctricas respecto del estado que presenta el circuito en la Fig. 14.11.a). Pero, como la diferencia de potencial entre los puntos A - D es también nula, no se modificarán las variables eléctricas si se cortocircuitan dichos puntos como se realiza en la Fig. 14.11.c).

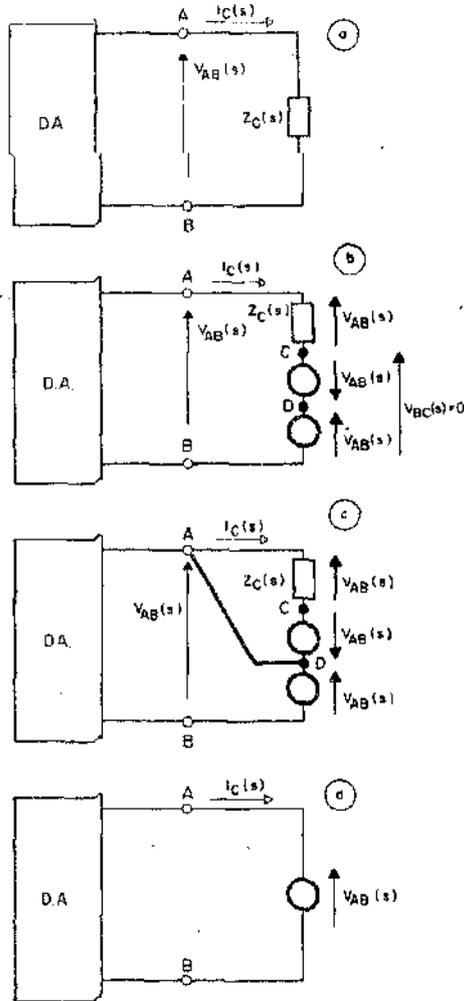


Fig. 14.11

Debido a lo mencionado anteriormente, el tramo A - D no cumple función alguna en el circuito, por lo cual puede eliminarse llegando así al circuito

mostrado en la Fig. 14.11.d). En esta última figura se observa que la impedancia $Z_C(s)$ queda reemplazada por un generador ideal de tensión cuyo valor numérico, signo y sentido de referencia coincide con la tensión existente entre extremos de dicha impedancia antes del reemplazo, quedando así satisfecho el enunciado del teorema.

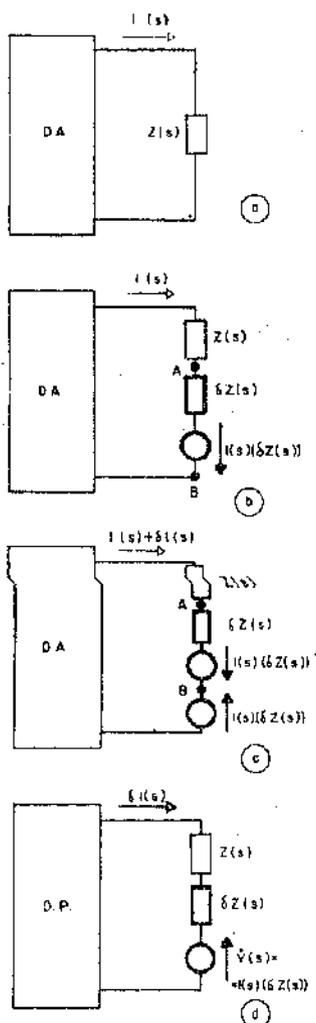


Fig. 14.12

Es de aclarar, que algunos autores asignan a este teorema el nombre de *Teorema de Sustitución*. Además de la utilidad específica enunciada por el teorema, *la aplicación del mismo permite determinar, por ejemplo, las variaciones de tensión y/o corriente en un elemento circuital cuando se modifica el valor de su impedancia*. En la Fig. 14.12 se muestra la aplicación mencionada. En la Fig. 14.12.a) se muestra un dipolo activo compuesto por elementos lineales, que alimenta a una impedancia $Z(s)$.

La variación de $Z(s)$ se simboliza en la Fig. 14.12.b) como el agregado de una impedancia incremental $\delta Z(s)$, pero para que la corriente en dicha rama siga valiendo $I(s)$ se intercala también un generador ideal de tensión $I(s) \delta Z(s)$ cuyo valor numérico es el mismo que el de la caída de tensión en la impedancia incremental pero con sentido de referencia opuesto a la misma. De esta manera, entre los puntos *A-B* la tensión es nula. Si ahora se intercala un segundo generador, ver Fig. 14.12.c), de igual valor que el primero pero con opuesto sentido de referencia, la corriente en la rama adopta un valor $I'(s) = I(s) + \delta I(s)$. Por el teorema de superposición puede afirmarse que $\delta I(s)$ es la corriente que circularía en la rama modificada por la adición del segundo generador intercalado. Es decir, si la acción del primer generador intercalado y los existentes dentro del dipolo activo dan lugar sólo a valor de $I(s)$ podrán desactivarse, y la variación de corriente $\delta I(s)$ se calculará a partir del circuito de la Fig. 14.12.d) donde el generador compensador tendrá un valor de:

$$V(s) = I(s) \delta Z(s)$$

y la mencionada variación de corriente se calculará como:

$$\delta I(s) = \frac{V(s)}{Z(s) + \delta Z(s) + Z_{DP}(s)}$$

siendo $Z_{DP}(s)$ la impedancia del dipolo activo cuando se desactivan sus generadores.

Una aplicación elemental de este tema ilustra claramente su utilidad.

Ejemplo:

En la Fig. 14.13 se muestra a un generador ideal de tensión senoidal que alimenta a una impedancia que puede modificar su valor. Se desea conocer la variación de corriente que da lugar si la impedancia toma un valor $(10 + j 10) \Omega$.

Solución:

La variación de impedancia es:

$$\delta \bar{Z} = (10 + j10) - (4 + j4) = (6 + j6) \Omega$$

y la tensión del generador de compensación es:

$$\bar{V} = \bar{I} (\delta \bar{Z}) = \frac{V_g}{\bar{Z}} (\delta \bar{Z}) \therefore$$

$$\bar{V} = \frac{10 e^{j0}}{(4 + j4)} (6 + j6) = 15 V$$

Como el generador posee impedancia interna nula, para el cálculo de la variación de corriente debe considerarse el circuito mostrado en la Fig. 14.13.b) para el cual:

$$\delta \bar{I} = - \frac{\bar{V}}{\bar{Z}'} = - \frac{\bar{V}}{\bar{Z} + \delta \bar{Z}} \therefore$$

$$\delta \bar{I} = - \frac{15}{(10 + j10)} = - 1,06 e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

El signo menos indica que corresponde a una disminución de corriente.

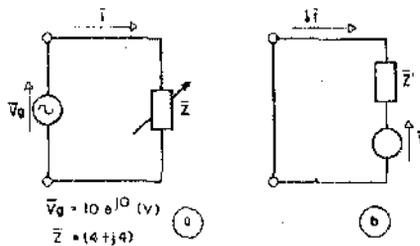


Fig. 14.13

14.6 Extensión del Teorema de Superposición al caso de circuitos que cambian de estado

Para la aplicación de los teoremas expuestos en este capítulo es evidente que los circuitos deben cumplir con la condición de linealidad y ser invariantes en el tiempo. Para el caso particular del teorema de superposición, se deriva que será aplicable cuando para todos los estados parciales la configuración geométrica es la misma. En consecuencia, no podrá ser directamente aplicado, por ejemplo, a circuitos en los cuales la variación de estado de un interruptor introduce modificaciones en la geometría del mismo. Sin embargo, puede extenderse dicho teorema para el caso de cierre y apertura de un interruptor de acuerdo a las siguientes consideraciones:

a) Cierre del interruptor

En la Fig. 14.14.a) se muestra un dipolo activo lineal donde se ha puesto en evidencia la rama que contiene un interruptor abierto para $t = 0^-$. En consecuencia, la tensión entre bornes del mismo corresponde a la condición de circuito abierto $V_{AB0}(s)$ y la corriente en dicha rama es nula.

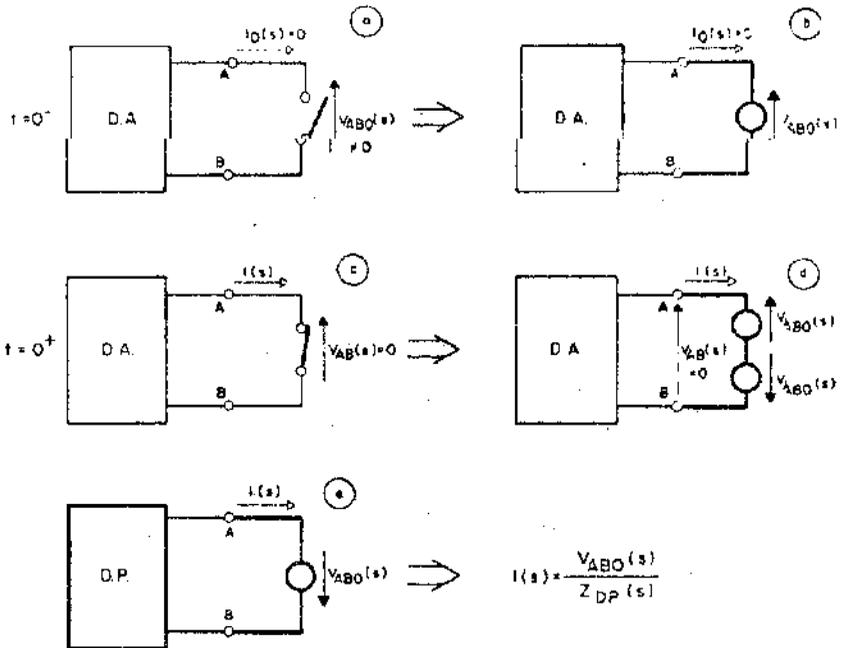


Fig. 14.14

En la Fig. 14.14.b) se ha reemplazado el interruptor por un generador ideal de tensión que impone en valor numérico, signo y sentido de referencia la misma tensión que la existente entre bornes del interruptor, y en consecuencia no se alteran las variables eléctricas respecto del circuito de la Fig. 14.14.a).

Si en $t = 0^+$ se cierra el interruptor, como se ilustra en la Fig. 14.14.c) se establece una corriente en dicha rama, anulándose la tensión entre los puntos $A-B$. Si en la Fig. 14.14.b) se intercala otro generador de igual valor numérico y signo del existente, pero con sentido de referencia opuesto, la tensión entre los puntos $A-B$ será nula y se establecerá la misma corriente que en circuito de la Fig. 14.14.c). Si bien los estados mostrados en las Figs. 14.14.b) y d) se corresponden con los de las Figs. 14.14.a) y c) respectivamente, presentan la ventaja de poseer la *misma geometría circuital*, admitiendo en consecuencia la aplicación del teorema de superposición.

En base a él, se observa que el primer generador agregado al circuito que se muestra en la Fig. 14.14.b) y la totalidad de los existentes dentro del dipolo activo ofrecen en conjunto una contribución nula al valor de la corriente en la rama del interruptor. En consecuencia, si en la Fig. 14.14.d) se desactiva el primer generador intercalado y todos los existentes en el dipolo activo se llega al circuito mostrado en la Fig. 14.14.e). Por lo tanto, el circuito empleado para el cálculo de la corriente que circula por la rama que se cierra el interruptor se encuentra desactivando todos los generadores del dipolo activo e incluyendo en reemplazo del interruptor un generador ideal de tensión cuyo valor numérico y signo sea coincidente con la tensión entre bornes del interruptor antes de cerrarlo, pero con sentido de referencia opuesto.

Se insiste en remarcar, que *la equivalencia hallada vale solamente para el cálculo de la corriente a través del interruptor que se cierra*, y que la misma se halla como el cociente entre la tensión del generador que se muestra en la Fig. 14.14.e) y la impedancia que presenta el dipolo en cuestión cuando se han desactivado sus generadores.

Al presente, es de destacar, que la solución del problema analizado puede encontrarse también por otro camino. *Si en el circuito de la Fig. 14.14.a) se halla el equivalente de Thévenin del dipolo activo y luego se cierra el interruptor, se llega al mismo circuito que se muestra en la Fig. 14.14.e).*

b) Apertura de interruptor

En la Fig. 14.15.a) se muestra un dipolo activo lineal donde se ha puesto en evidencia la rama que contiene al interruptor cerrado para $t = 0$. En consecuencia, la corriente en dicha rama corresponde a la condición de cortocircuito y la tensión a través de la misma es nula.

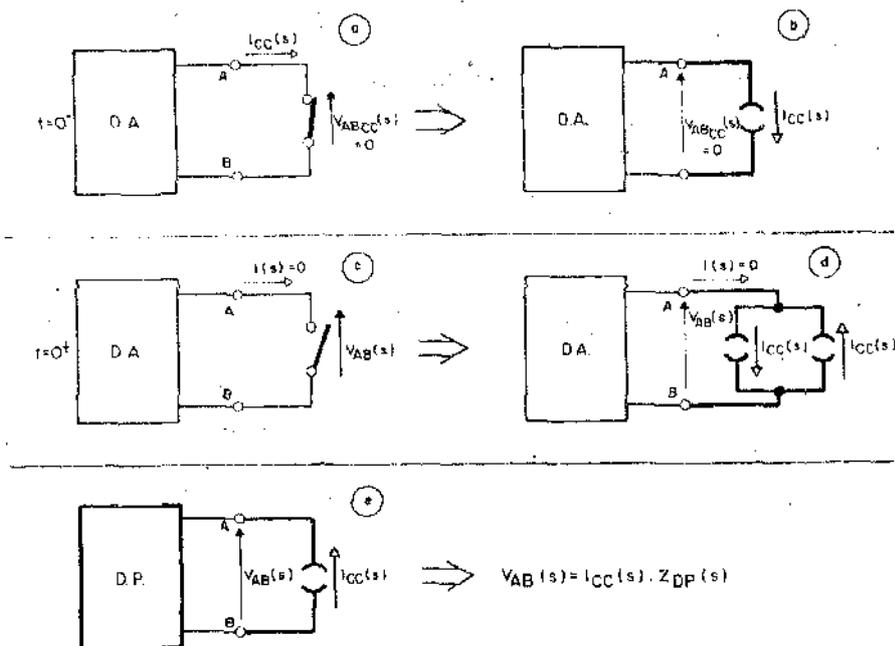


Fig. 14.15

En la Fig. 14.15.b) se reemplaza el interruptor por un generador ideal de corriente que impone en valor numérico, signo y sentido de referencia la misma corriente que la circulante por la rama del interruptor cuando este se encuentra cerrado y en consecuencia no se alteran las variables eléctricas respecto del circuito de la Fig. 14.15.a).

Si en $t = 0^+$ se abre el interruptor, como se ilustra en la Fig. 14.15.c) se anula la corriente en la rama del interruptor, estableciéndose una tensión entre sus bornes. Si en la Fig. 14.15.b) se intercala otro generador de igual valor numérico y signo que el existente, pero con sentido de referencia opuesto, la corriente a través de la rama del interruptor será nula estableciéndose entre los puntos $A-B$ la misma tensión que en el circuito de la Fig. 14.15.c). Como los estados parciales que se ilustran en las Figs. 14.15.b) y d) se corresponden con las de las Figs. 14.15.a) y c) respectivamente, al presentar los primeros la misma geometría circuital admiten la aplicación del teorema de superposición. Por ello, se observa que el primer generador intercalado que se muestra en la Fig. 14.15.b) y todos los existentes en el dipolo activo ofrecen en conjunto una contribución nula al valor de la tensión en bornes del interruptor. En consecuencia si en la Fig. 14.15.d) se desactiva el primer

generador intercalado y todos los existentes en el dipolo activo se llega al circuito mostrado en la Fig. 14.15.e).

Por lo tanto el circuito empleado para el cálculo de la tensión que aparece entre extremos del interruptor que se abre se encuentra desactivando todos los generadores del dipolo activo e incluyendo en reemplazo del interruptor un generador ideal de corriente cuyo valor numérico y signo sea coincidente con el de la corriente circulante en la rama antes de abrir el interruptor, pero con sentido de referencia opuesto.

Se insiste en remarcar, que *la equivalencia hallada vale solamente para el cálculo de la tensión entre terminales del interruptor que se abre, y que la misma se halla como el producto de la corriente del generador que se muestra en la Fig. 14.15.e) y la impedancia que presenta el dipolo en cuestión cuando se han desactivado sus generadores.*

Adviértase que *si en el circuito de la Fig. 14.15.a) se halla el equivalente de Norton del dipolo activo y se abre luego el interruptor, se llega al mismo circuito que se muestra en la Fig. 14.15.e).*

Finalmente, cabe recalcar el hecho de que si los circuitos se dan en el dominio del tiempo, deben hallarse los circuitos transformados antes de aplicar los dos métodos propuestos en este párrafo con el fin de poner en evidencia claramente los efectos de las condiciones iniciales sobre los elementos pasivos. Naturalmente que cualquier procedimiento de resolución de un circuito que esté dado en el dominio del tiempo lleva a encontrar el circuito transformado para su resolución por medio del dominio transformado de Laplace, pero es oportuno en este caso reafirmarlo a efecto de evitar cualquier duda.

14.8 Teorema de la máxima transferencia de potencia

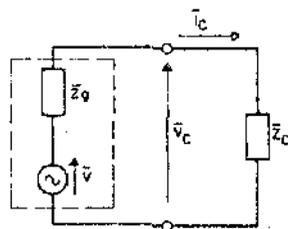


Fig. 14.16

Dado un dipolo activo, que puede sintetizarse como se muestra en la Fig. 14.16 por un generador ideal de tensión en serie con una impedancia, y que

en conjunto alimentan a una impedancia de carga, se desea determinar la relación que vincula a ambas impedancias para que se obtenga la máxima potencia del generador. Con el objeto de establecer dicha relación se trabajará en régimen senoidal permanente.

Como es sabido, lo que en realidad se trasfiere del generador a la carga es la energía, pero como a los efectos prácticos lo que interesa es la potencia en la carga, esto último da lugar a la denominación de transferencia de potencia a que se refiere el teorema.

En la mencionada figura, la impedancia del generador puede expresarse como:

$$\bar{Z}_g = R_g + jX_g \quad (14.3)$$

y la de la impedancia de carga como:

$$\bar{Z}_C = R_C + jX_C \quad (14.4)$$

a efectos de evitar confusiones respecto a la denominación de la reactancia téngase en cuenta que el subíndice "C" está indicando "carga" y no el tipo de reactancia.

En estas condiciones, la corriente resulta:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_C} \quad (14.5)$$

reemplazando las Ecs (14.3) y (14.4) en la Ec. (14.5) tenemos:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{(R_g + jX_g) + (R_C + jX_C)}$$

y su módulo es:

$$I_C = \frac{V}{\sqrt{(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2}}$$

En estas condiciones la potencia utilizada en la carga, o sea la potencia activa en la misma se calcula como:

$$P_C = R_C I_C^2 = V^2 \frac{R_C}{(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2} \quad (14.6)$$

y la potencia activa total puesta en juego se obtiene en base al teorema de adición de las potencias activas, por lo cual será:

$$P_T = P_g + P_C = R_g I_C^2 + R_C I_C^2 = I_C^2 (R_g + R_C)$$

en consecuencia:

$$P_T = V^2 \frac{(R_g + R_C)}{(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2} \quad (14.7)$$

Si se define al *rendimiento de transferencia* η como el cociente entre la potencia activa en la carga y la potencia activa total puesta en juego, puede exponerse como:

$$\eta = \frac{P_C}{P_T}$$

empleando las Ecs. (14.6) y (14.7) resulta:

$$\eta = \frac{R_C}{R_g + R_C} \quad (14.8)$$

Obsérvese que si bien las potencias dadas por las Ecs. (14.6) y (14.7) dependen de los componentes resistivos y reactivos del circuito, el rendimiento de transferencia hallado en la Ec. (14.8) depende sólo del valor de los componentes resistivos del mismo.

Considerando variable solamente la impedancia de carga, interesa ahora optimizar la potencia en la misma y encontrar el valor que adopta el rendimiento para esa condición.

En primera instancia se supondrá que la componente resistiva de la impedancia de carga es constante y la reactiva variable; es decir $R_C = cte$ y $X_C \neq cte$. Bajo esta imposición, de la Ec. (14.6) se desprende que el máximo se logrará para cuando:

$$X_C = -X_g \quad (14.9)$$

por lo que la potencia activa en la carga será:

$$P_{Cmax} \Big|_{X_C = cte} = V^2 \frac{R_C}{(R_g + R_C)^2} \quad (14.10)$$

El valor de P_{Cmax} dado por la Ec. (14.10) es un máximo relativo pues queda todavía la posibilidad de variar la parte real de la impedancia de carga. Por lo tanto, si a partir de la condición dada por la Ec. (14.9), se varía R_C a efectos de optimizar P_{Cmax} , el valor de R_C que cumple con esa condición se obtiene derivando la Ec. (14.10) respecto a R_C e igualándola a cero, es decir:

$$\frac{\delta P_{Cmax}}{\delta R_C} = V^2 \left[\frac{(R_g + R_C)^2 - R_C \cdot 2(R_g + R_C)}{(R_g + R_C)^4} \right] = 0 \quad (14.11)$$

dado que V^2 y el denominador de la Ec. (14.11) no son nulos deberá cumplirse que:

$$(R_g + R_C)^2 - 2R_C (R_g + R_C) = 0 \therefore$$

$$R_g + R_C - 2R_C = 0$$

en consecuencia el valor de R_C que optimiza la potencia en la carga será:

$$R_C = R_g \quad (14.12)$$

empleando entonces simultáneamente las condiciones dadas por las Ecs. (14.9) y (14.12) se llega a:

$$\bar{Z}_C = \bar{Z}_g^* \quad (14.13)$$

La Ec. (14.13) expresa la condición de máxima transferencia de potencia del generador a la carga y da lugar al enunciado del teorema: "en un circuito formado por un generador de tensión en serie con una impedancia de carga que represente la impedancia interna de un generador real y que alimenten en conjunto a una impedancia de carga, la transferencia de potencia del generador real a la carga es máxima cuando las impedancias del generador y la carga son mutuamente conjugadas".

Interesa analizar ahora, los valores que adoptan la potencia en la carga y el rendimiento para la condición impuesta por la Ec. (14.13). Si en la Ec.

(14.10) se introduce la condición dada por la Ec. (14.12) se obtiene la expresión del máximo absoluto de potencia activa en la carga:

$$P_{Cmax\ max} \Big|_{\bar{z}_C = \bar{z}_g^*} = V^2 \frac{R_C}{(R_C + R_C)^2} = \frac{V^2}{4 R_C} \quad (14.14)$$

y de la Ec. (14.8) el rendimiento resulta:

$$\eta \Big|_{\bar{z}_C = \bar{z}_g^*} = \frac{R_C}{R_C + R_C} = 0,5 \quad (14.15)$$

Puede considerarse además, otra posibilidad para el análisis, que es aquella para la cual se supone que la componente reactiva de la impedancia de carga no puede modificarse y sólo puede hacerlo la resistiva, es decir, $X_C = cte$ y $R_C \neq cte$. Por lo tanto, en este caso partiendo de la Ec. (14.6), derivarla respecto de R_C e igualarla a cero, resultando:

$$\frac{\delta P_C}{\delta R_C} \Big|_{\substack{X_C = cte \\ R_C \neq cte}} = V^2 \frac{(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2 - R_C 2(R_g + R_C)}{[(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2]^2} = 0 \quad (14.16)$$

dado que V^2 y el denominador de la Ec. (14.16) no son nulos deberá cumplirse que,

$$(R_g + R_C)^2 + (X_g + X_C)^2 - 2 R_C (R_g + R_C) = 0 \quad \therefore$$

$$R_g^2 + R_C^2 + 2 R_g R_C - 2 R_g R_C - 2 R_C^2 + (X_g + X_C)^2 = 0$$

por lo cual resulta que:

$$R_C = \sqrt{R_g^2 + (X_g + X_C)^2} \quad (14.17)$$

donde la Ec. (14.17) da el valor que debe adoptar la resistencia de carga, cuando la parte reactiva de la misma no puede modificarse. Naturalmente que si se reemplaza este valor de R_C en las Ecs. (14.6) y (14.8) se encuentra que

la potencia en la carga será menor que cuando se cumple la condición dada por la Ec. (14.13) y que el rendimiento será mayor, es decir que:

$$\left| \begin{array}{l} X_C = \text{cte} \\ R_C \neq \text{cte} \end{array} \right| < P_C \quad \text{y} \quad \eta \left| \begin{array}{l} X_C = \text{cte} \\ R_C \neq \text{cte} \end{array} \right| > \eta \left| \begin{array}{l} \bar{Z}_C = \bar{Z}_g^* \end{array} \right|$$

Un último caso a considerar sería aquél para el cual puede variarse la amplitud de la impedancia de carga pero no el ángulo de fase de la misma, es decir manteniendo la relación de X_C a R_C constante. Tomando la Ec. (14.6), reemplazando $R_C = Z_C \cos \varphi$ y $X_C = Z_C \sin \varphi$ y derivando dicha ecuación respecto de Z_C se encuentra que se absorberá máxima potencia del generador, cuando el módulo de la impedancia de carga sea igual al módulo de la impedancia interna del generador, es decir $Z_C = Z_g$.

En la Fig. 14.17.a) se grafica la variación de potencia en la carga para dos de las condiciones anteriormente mencionadas, y en la Fig. 14.17.b) el rendimiento, ambos en función de la resistencia de carga. Se observa que imponiendo la condición $X_C \neq -X_g$ se obtiene para la potencia un máximo desplazado y menor que al cumplirse $X_C = -X_g$ y el valor de resistencia de carga que logra ese máximo es obviamente mayor que R_g , y como se ve, el rendimiento es mayor que 0,5. Esto puede verificarse a partir de la Ec. (14.8), al existir más resistencia de carga mayor será el rendimiento, si en particular $R_C \gg R_g$ resulta que $\eta \rightarrow 1$.

La conclusión que se desprende es que a medida que se aumenta el rendimiento disminuye el valor de la potencia en la carga.

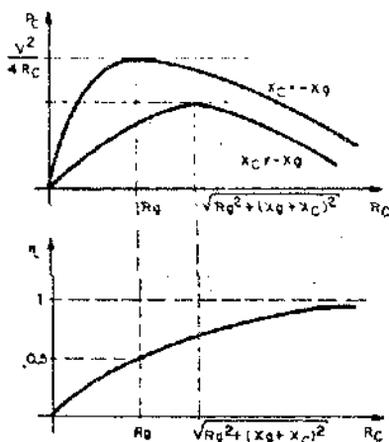


Fig. 14.17

Todo lo anterior sienta las bases para encarar la transferencia de potencia, ya sea para los procesos industriales donde se maneja elevada potencia, como para los procesos de comunicación y control donde en general se trabaja con baja potencia y lo importante es la información transportada por señales.

En las instalaciones de elevada potencia no se recurre a la igualación de impedancias pues en esas condiciones el rendimiento es bajo y el proceso anti-económico, además de que los generadores industriales no se diseñan para trabajar en esas condiciones. Lo que se desea es que el rendimiento sea alto y que la tensión en la carga sea prácticamente constante frente a las variaciones de la misma, para lo cual debe cumplirse que la impedancia de carga sea mucho mayor que la impedancia del generador.

Por otro lado en las instalaciones de baja potencia, se recurre a la igualación de impedancias puesto que en general el costo de la potencia empleada es muy bajo en comparación con los costos totales. En consecuencia, no es importante disponer de un elevado rendimiento, sino rescatar toda la información posible que provea, por ejemplo, una antena receptora que cumpla la función del generador, es decir que no importa que se pierda potencia mientras no se deforme la señal recibida. Si bien se habló de hacer cumplir la condición dada por la Ec. (14.13) en los procesos de comunicación, por razones prácticas no siempre es necesario realizarla rigurosamente. Además en muchos casos tanto la impedancia del generador y la de carga son casi resistivos puros por lo cual es suficiente realizar la igualación del módulo de los mismos, o bien directamente la igualación de sus partes resistivas cuando las reactivas son despreciables.

14.8 Teorema de reciprocidad.

Considérese el circuito activo ilustrado en la Fig. 14.18.a) en el que se ha puesto en evidencia un par de terminales en la entrada y otro en la salida con sus respectivos elementos de circuito asociados, llamado comúnmente cuadripolo activo.

Con el objeto de comprender claramente el enunciado del teorema, en la Fig. 14.18.b) se presenta un estado parcial del circuito anterior en el que se hace actuar solamente al generador $V_a(s)$ y se desactivan las restantes, por lo cual el cuadripolo pasa a ser pasivo. En la Fig. 14.18.c) se presenta otro estado parcial para el cual sólo actúa el generador $V_b(s)$ encontrándose todos los demás desactivados.

El enunciado del teorema es el siguiente: "en una configuración arbitraria de elementos de circuitos lineales, activos y pasivos, el cociente entre el valor de la tensión de un generador $V_a(s)$ ubicado en la rama a y el valor de la

componente $I'_b(s)$ que impulsa en la rama b, es igual al que se obtiene dividiendo el valor de la tensión de un generador $V_b(s)$ ubicado en la rama b, y la componente de corriente $I''_a(s)$ que impulsa a través de la rama a''

El enunciado anterior puede expresarse como:

$$\frac{V_a(s)}{I'_b(s)} = \frac{V_b(s)}{I''_a(s)} \quad (14.18)$$

En otras palabras, el teorema de reciprocidad afirma que las impedancias de transferencias entre dos ramas de un circuito lineal son iguales, y esto es precisamente lo que debe demostrarse.

Para demostrar el teorema se considerarán los dos estados parciales indicados anteriormente, resolviendo por el método de las mallas y luego unificando la relación principal.

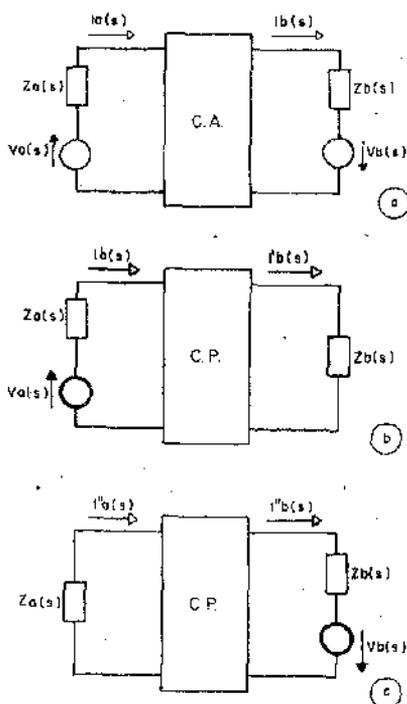


Fig. 14.18

Estado parcial Fig 14.18.b)

Para el mismo, las ecuaciones matriciales del método de las mallas resultan:

$$\begin{bmatrix} V_a(s) \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}(s) & Z_{ab}(s) & \dots & Z_{an}(s) \\ Z_{ba}(s) & Z_{bb}(s) & \dots & Z_{bn}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{na}(s) & Z_{nb}(s) & \dots & Z_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_a(s) \\ I'_b(s) \\ - \\ - \\ I'_n(s) \end{bmatrix}$$

resolviendo para $I'_b(s)$:

$$I'_b(s) = \frac{\begin{bmatrix} Z_{aa}(s) & V_a(s) & \dots & Z_{an}(s) \\ Z_{ba}(s) & 0 & \dots & Z_{bn}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{na}(s) & 0 & \dots & Z_{nn}(s) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} Z_{aa}(s) & Z_{ab}(s) & \dots & Z_{an}(s) \\ Z_{ba}(s) & Z_{bb}(s) & \dots & Z_{bn}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{na}(s) & Z_{nb}(s) & \dots & Z_{nn}(s) \end{bmatrix}}$$

que resulta:

$$I'_b(s) = V_a(s) \frac{A_{ab}(s)}{\Delta_Z(s)} + 0 + \dots + 0 \tag{14.19}$$

donde $\Delta_Z(s)$ es el determinante de la matriz impedancia y $A_{ab}(s)$ es el adjunto del elemento $Z_{ab}(s)$, que puede expresarse como:

$$A_{ab}(s) = (-1)^{a+b} M_{ab}(s)$$

donde $M_{ab}(s)$ es el menor complementario de $Z_{ab}(s)$. En virtud de lo antedicho, la Ec. (14.19) resulta:

$$I'_b(s) = V_a(s) (-1)^{a+b} \frac{M_{ab}(s)}{\Delta_Z(s)} \quad (14.20)$$

Estado parcial Fig. 14.18.c)

Para el mismo, las ecuaciones matriciales del método de las mallas resultan:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_b(s) \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}(s) & Z_{ab}(s) & Z_{an}(s) \\ Z_{ba}(s) & Z_{bb}(s) & Z_{bn}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{na}(s) & Z_{nb}(s) & Z_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I''_a(s) \\ I''_b(s) \\ - \\ - \\ I''_n(s) \end{bmatrix}$$

resolviendo en forma análoga que para el caso anterior, $I''_a(s)$ resulta:

$$I''_a(s) = 0 + V_b(s) \frac{A_{ba}(s)}{\Delta_Z(s)} + 0 + \dots + 0 \quad (14.21)$$

donde naturalmente, $\Delta_Z(s)$ es coincidente con el de la Ec. (14.19) y el adjunto $A_{ba}(s)$ puede expresarse como:

$$A_{ba}(s) = (-1)^{b+a} M_{ba}(s)$$

por lo cual la Ec. (14.21) será:

$$I''_a(s) = V_b(s) \frac{(-1)^{b+a} M_{ba}(s)}{\Delta_Z(s)} \quad (14.22)$$

Para las Ecs. (14.20) y (14.21) es evidente que $(-1)^{a+b} = (-1)^{b+a}$, y que $M_{ab}(s) = M_{ba}(s)$ pues la matriz es simétrica respecto de la diagonal

principal, y dividiendo miembro a miembro las ecuaciones mencionadas resultan:

$$\frac{I'_b(s)}{I''_a(s)} = \frac{V_a(s)}{V_b(s)} \quad \therefore$$

$$\frac{V_a(s)}{I'_b(s)} = \frac{V_b(s)}{I''_a(s)} = Z_{Tab}(s) = Z_{Tba}(s) \quad (14.23)$$

donde se verifica que la Ec. (14.23) es coincidente con la Ec. (14.18) que se quería demostrar.

Adviértase además, en la Ec (14.23) que si $V_a(s) = V_b(s)$ resultará $V_a(s) = I'_b(s)$, por lo tanto en un circuito en el que exista un único generador y un único amperímetro de igual resistencia interna y estén ubicados en ramas distintas, al permutarlos no se verá modificada la indicación del instrumento. Esta conclusión permite, en algunos circuitos ubicar al generador en un lugar más conveniente para el análisis del mismo.

14.10. Transformación estrella - triángulo

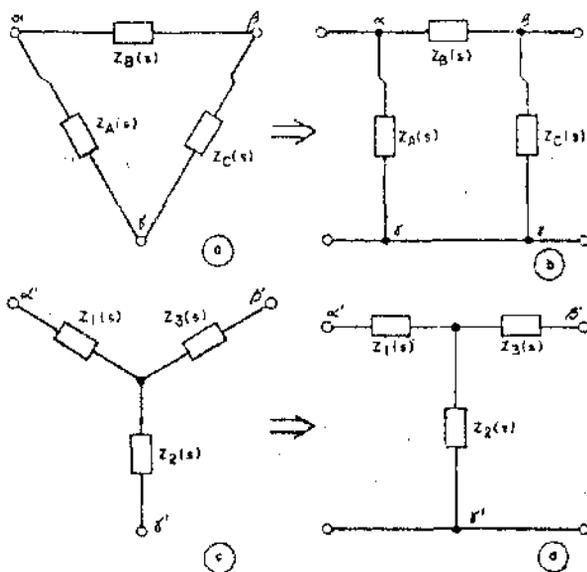


Fig. 14.19

En la Fig. 14.19 se muestran dos configuraciones típicas de tres terminales de amplia utilización en los circuitos eléctricos. En la Fig. 14.19.a) se ilustra la llamada conexión triángulo, o conexión Δ y en la Fig. 14.19.c) la denominada conexión estrella o conexión Y . Estas configuraciones son también empleadas en los circuitos electrónicos, dibujándose las como se muestra en la Fig. 14.19.b) y d), llevan como denominación T y configuración II respectivamente. Adviértase que esta forma de dibujarlas hace que en apariencia se presenten como de cuatro terminales, pero como ambos terminales inferiores están conectados a un mismo punto, eléctricamente sólo pueden distinguirse tres terminales.

Debido a que la conexión Y y la Δ poseen el mismo número de terminales podrá lograrse que ambas conexiones sean equivalentes, y en ese caso sustituir una por otra, lo que muchas veces facilita la solución de un circuito. Algunos autores también la denominan transformación de Kennelly.

Evidentemente, si se desea que ambos circuitos sean equivalentes, las impedancias medidas entre los bornes del circuito en triángulo deberán ser iguales a los correspondientes del estrella, es decir:

$$Z_{\alpha\beta}(s) = Z_{\alpha'\beta'}(s) \quad (14.24)$$

$$Z_{\beta\gamma}(s) = Z_{\beta'\gamma'}(s) \quad (14.25)$$

$$Z_{\gamma\alpha}(s) = Z_{\gamma'\alpha'}(s) \quad (14.26)$$

Nótese que por razones de simplicidad en la nomenclatura, en lo que resta de este párrafo se omitirá el subíndice "s", pero debe tenerse en cuenta que todos los resultados se encuentran en el dominio transformado.

La igualdad presentada por la Ec. (14.24) puede escribirse en forma explícita por simple inspección de las configuraciones triángulo y estrella respectivamente, resultando:

$$\frac{Z_B(Z_A + Z_C)}{Z_B + Z_A + Z_C} = Z_1 + Z_3 \quad (14.27)$$

para la igualdad dada por la Ec. (14.25) será:

$$\frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z_C + Z_A + Z_B} = Z_2 + Z_3 \quad (14.28)$$

y para la dada por la Ec. (14.26):

$$\frac{Z_A (Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C} = Z_1 + Z_2 \quad (14.29)$$

A partir de las Ecs. (14.27), (14.28) y (14.29) se encuentran los equivalentes entre ambas configuraciones.

Se deducirán al presente, los valores de la configuración en estrella en función de los del triángulo. Restando miembro a miembro las Ec. (14.27) y Ec. (14.28) resulta:

$$Z_1 - Z_2 = \frac{Z_A Z_B - Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (14.30)$$

sumando miembro a miembro las Ec's. (14.29) y (14.30) tenemos:

$$2 Z_1 = 2 \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad \therefore$$

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (14.31)$$

restando miembro a miembro las Ecs. (14.29) y (14.31) surge que:

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (14.32)$$

y restando miembro a miembro las Ecs. (14.27) y (14.31) resulta:

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (14.33)$$

Las Ecs. (14.31), (14.32) y (14.33) expresan los valores que deben adoptar las impedancias de la configuración estrella para que la misma sea equivalente a la triángulo. De la observación de los mismos se advierte que existe una ley de formación de las impedancias equivalentes que puede expresarse como: "la impedancia del circuito en estrella conectada a un cierto borne es igual al producto de las impedancias que en la configuración triángulo concurren al

borne homólogo en cuestión, dividida por la suma de todas las impedancias del triángulo”:

Si se resuelven las Ecs. (14.27), (14.28) y (14.29) con el objeto de encontrar los valores de la configuración triángulo en función de los de estrella se encuentra que:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (14.34)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (14.35)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (14.36)$$

Para este caso, se observa que la ley de formación de las impedancias equivalentes puede expresarse como: “la impedancia entre dos bornes del circuito en triángulo es igual a la suma de los tres productos de los pares de las impedancias de la estrella, dividida por la impedancia de la estrella que se encuentra en la rama no contenida por los bornes homólogos de la impedancia a calcular”.

14.11 Teorema de reducción de generadores

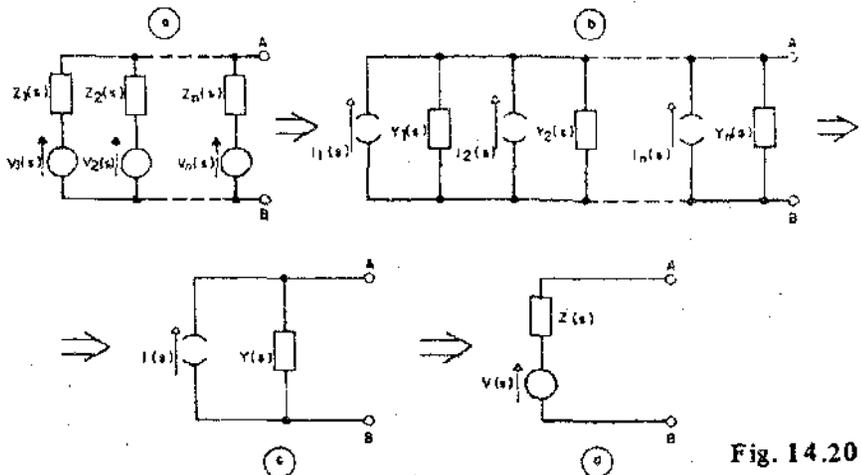


Fig. 14.20

El procedimiento a describir, llamado también Teorema de Millman, permite representar la acción de varios generadores por uno solo, lo que en ciertas configuraciones circuitales brinda más operatividad para su resolución. Si bien el problema mencionado puede resolverse empleando el Teorema de Superposición, para ciertos casos específicos puede resultar más eficaz que este último.

Considérese la asociación en paralelo mostrada en la Fig. 14.20.a) de varios generadores ideales de tensión, cada uno en serie con una impedancia, que puede representar la impedancia interna de cada uno de ellos.

Si se aplica el teorema de Norton a cada una de las ramas del circuito anterior, se llega al ilustrado en la Fig. 14.20.b) donde:

$$I_1(s) = V_1(s) Y_1(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$$

$$I_2(s) = V_2(s) Y_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)}$$

.....

$$I_n(s) = V_n(s) Y_n(s)$$

$$Y_n(s) = \frac{1}{Z_n(s)}$$

Si ahora se suman las corrientes de los generadores y las admitancias, resulta el circuito mostrado en la Fig. 14.20.c) en el cual:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) + \dots + I_n(s) \therefore$$

$$I(s) = V_1(s) Y_1(s) + V_2(s) Y_2(s) + \dots + V_n(s) Y_n(s)$$

y la admitancia total es:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s)$$

si en el mencionado circuito se aplica el teorema de Thévenin, resulta finalmente la configuración mostrada en la Fig. 14.20.d), donde:

$$V(s) = \frac{I(s)}{Y(s)} = \frac{V_1(s) Y_1(s) + V_2(s) I_2(s) + \dots + V_n(s) I_n(s)}{Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s)} \quad (14.37)$$

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s)} \quad (14.38)$$

es decir que el circuito original compuesto por varios generadores e impedancias queda reducido a un generador de tensión en serie, con una impedancia que se calcula en base a las Ecs. (14.37) y (14.38). En forma resumida, éstas pueden expresarse como:

$$V(s) = \frac{\sum_{i=1}^n V_i(s) Y_i(s)}{\sum_{i=1}^n Y_i(s)} \quad (14.39)$$

$$Z(s) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n Y_i(s)} \quad (14.40)$$

Procedimiento dual debe aplicarse si se parte de generadores de corriente en paralelo con sus admitancias internas.

Ejemplo:

Para el circuito dado en la Fig. 14.21, calcular el valor complejo eficaz de la corriente en el inductor, \bar{I}_L , aplicando el teorema de reducción de generadores.

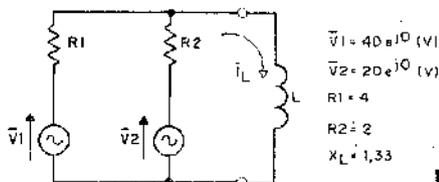


Fig. 14.21

Solución:

Por aplicación del teorema se llega al circuito reducido ilustrado en la Fig.

(14.22), donde la tensión del generador equivalente y su impedancia asociada resultan:

$$\bar{V} = \frac{\bar{V}_1 \bar{Y}_1 + \bar{V}_2 \bar{Y}_2}{Y_1 + \bar{Y}_2} = \frac{\bar{V}_1 \frac{1}{R_1} + \bar{V}_2 \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\bar{V} = \frac{40 e^{j0} \frac{1}{4} + 20 e^{j0} \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 26,66 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

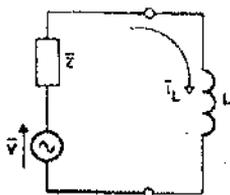


Fig. 14.22

además:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \therefore$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1,33 \Omega$$

por lo que la corriente en el inductor es:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{\bar{Z} + jX_L} = \frac{26,66 e^{j0^\circ}}{1,33 + j1,33} \therefore$$

$$\bar{I}_L = 14,18 e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

14.12) Problemas resueltos

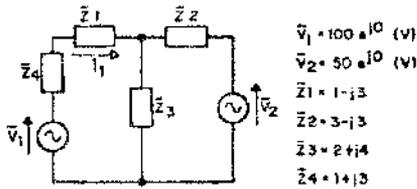


Fig. 14.23

14.12.1) En el circuito ilustrado en la Fig.14.23 se desea:

- Calcular el valor complejo eficaz de la corriente que circula por \bar{Z}_1 aplicando el Teorema de Superposición.
- Reemplazar la impedancia \bar{Z}_1 por un generador ideal de tensión aplicando el Teorema de Compensación.

Solución:

- Considérese primeramente el estado parcial en el que actúa \bar{V}_1 , lo que dará lugar a la componente \bar{I}_1 según se indica en la Fig. 14.24.a).

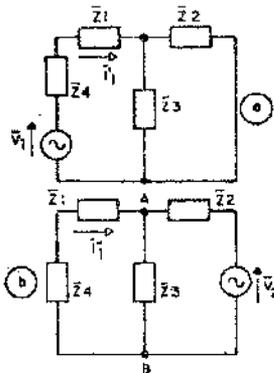


Fig. 14.24

En la misma resulta:

$$\bar{Z}_{2-3} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{(3-j3)(2+j4)}{(3-j3+2+j4)} = (3,69 + j0,46) \Omega$$

$$\bar{I}'_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{2-3}} = \frac{100 e^{j0^\circ}}{(1+j3) + (1-j3) + (3,69 + j0,46)}$$

$$\bar{I}'_1 = 17,51 e^{-j4,62^\circ} = (17,45 - j1,41) \text{ A} \quad (14.41)$$

En la Fig. 14.24.b) se muestra el otro estado parcial en que sólo actúa \bar{V}_2 resultando:

$$\bar{Z}_{1-4} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_4 = (1-j3) + (1+j3) = 2 \Omega$$

$$\bar{Z}_{1-4-3} = \frac{\bar{Z}_{1-4} \bar{Z}_3}{\bar{Z}_{1-4} + \bar{Z}_3} = \frac{2(2+j4)}{2+2+j4} = (1,5 + j0,5) \Omega$$

por lo cual empleando el concepto de divisor de tensión se calcula \bar{V}_{AB} como sigue:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\bar{Z}_{1-4-3}}{\bar{Z}_{1-4-3} + \bar{Z}_2} V_2 = \frac{(1,5 + j0,5)}{(1,5 + j0,5) + (3-j3)} 50 e^{j0^\circ}$$

$$\bar{V}_{AB} = (10,5 + j11,5) = 15,57 e^{j47,6^\circ} \text{ V}$$

en consecuencia:

$$\bar{I}''_1 = -\frac{\bar{V}_{AB}}{\bar{Z}_{1-4}} = -\frac{15,57 e^{j47,6^\circ}}{2}$$

$$I''_1 = -7,78 e^{j47,6^\circ} = -(5,24 + j5,74) \text{ A} \quad (14.42)$$

y la corriente total resulta de la suma de los componentes dados por las Ecs. (14.41) y (14.42):

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' = (17,45 - j1,41) - (5,24 + j5,74)$$

$$\bar{I}_1 = (12,21 - j7,15) = 14,14 e^{-j30,3^\circ} \text{ A}$$

b) El reemplazo se muestra en la Fig. 14.25, donde el generador compensador \bar{V}_{Z1} , tiene por valor:

$$\bar{V}_{Z1} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 = (1 - j3) (12,21 - j7,15) \therefore$$

$$\bar{V}_{Z1} = -(9,24 + j43,78) = -44,74 e^{j78^\circ} \text{ V}$$

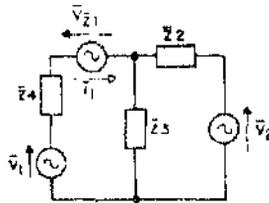


Fig. 14.25

14.11.2) Para el circuito dado en la Fig. 14.26, en el instante $t = 0^+$ se cierra el interruptor.

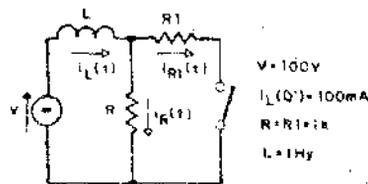


Fig. 14.26

Hallar la expresión de $i_L(t)$ empleando el concepto de la extensión del teorema de superposición para circuitos que cambian de estado.

Solución:

El circuito transformado antes de cerrar el interruptor se muestra en la Fig. 14.27.a). Con el objeto de calcular la tensión en bornes del interruptor abierto se plantea la segunda regla de Kirchhoff, teniendo en cuenta que $I_L(s) = I_R(s)$, resulta:

$$\frac{100}{s} + L i_L(0^-) = (R + sL) I_R(s) \therefore$$

$$I_R(s) = \frac{\frac{100}{s} + L i_L(0^-)}{R + sL}$$

pero

$$V_{AB_0}(s) = R I_R(s) \therefore$$

$$V_{AB_0}(s) = \frac{R \left(\frac{100}{s} + L i_L(0^-) \right)}{R + sL} = 10^3 \frac{\frac{100}{s} + 0,1}{10^3 + s} \therefore$$

$$V_{AB_0}(s) = 10^3 \frac{0,1 s + 100}{s(s + 10^3)} = \frac{10^2}{s} \frac{(s + 10^3)}{(s + 10^3)} \quad \text{por lo cual}$$

$$V_{AB_0}(s) = \frac{10^2}{s}$$

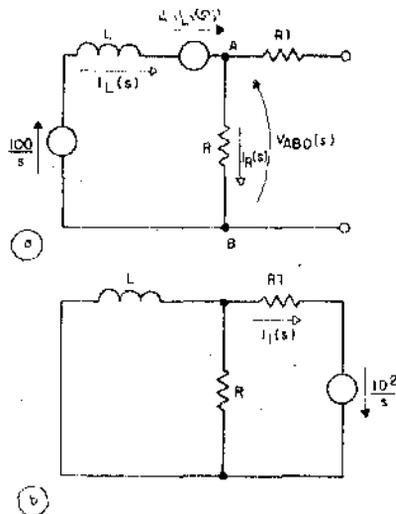


Fig. 14.27

y la corriente en la rama que se cierra el interruptor se calcula de base del circuito ilustrado en la Fig. 14.27 b), para la cual:

$$I_1(s) = \frac{V_{AB0}(s)}{Z_{DP}(s)} = \frac{\frac{10^2}{s}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL}}} = \frac{\frac{10^2}{s}}{R_1 + \frac{sL}{sL + R_1}}$$

$$I_1(s) = \frac{\frac{10^2}{s}}{\frac{10^3 + \frac{s}{s} \frac{10^3}{s + 10^3}}{s + 10^3}} = \frac{\frac{10^2}{s} (s + 10^3)}{10^3 (s + 10^3) + (s 10^3)}$$

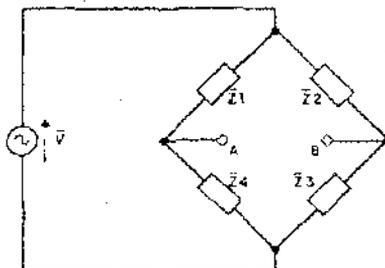
$$I_1(s) = \frac{\frac{10^2}{s} (s + 10^3)}{2s 10^3 + 10^6} = \frac{\frac{10^2}{s} (s + 10^3)}{2 \cdot 10^3 (s + 500)} \quad \therefore$$

$$I_1(s) = 5 \cdot 10^{-2} \frac{(s + 10^3)}{s (s + 500)} \quad \therefore$$

$$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ I_1(s) \}$$

$$i_1(t) = (0,1 - 0,05 e^{-500t}) u(t) \quad \text{A}$$

14.12.3) Aplicando el Teorema de Thévenin se desea calcular el valor complejo eficaz de la corriente que circula por la rama diagonal $A-B$, del circuito mostrado en la Fig. 14.28, cuando entre dichos puntos se conecta una impedancia de carga $\bar{Z}_C = (3 + j11) \Omega$.



$$\begin{aligned} \bar{V} &= 100 e^{j0} \text{ (V)} \\ \bar{Z}_1 &= 20 + j10 \\ \bar{Z}_2 &= 10 + j10 \\ \bar{Z}_3 &= 0 + j20 \\ \bar{Z}_4 &= 10 + j0 \end{aligned}$$

Fig. 14.28

Solución:

Con el objeto de calcular la impedancia equivalente de Thévenin se desactiva el generador, conformándose el circuito presentado en la Fig. 14.29.a) para el cual:

$$\bar{Z}_T = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_4}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4} + \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{(20 - j10)(10)}{20 - j10 + 10} + \frac{(10 - j10)(j20)}{10 - j10 + j20}$$

$$\bar{Z}_T = (27 - j) \Omega$$

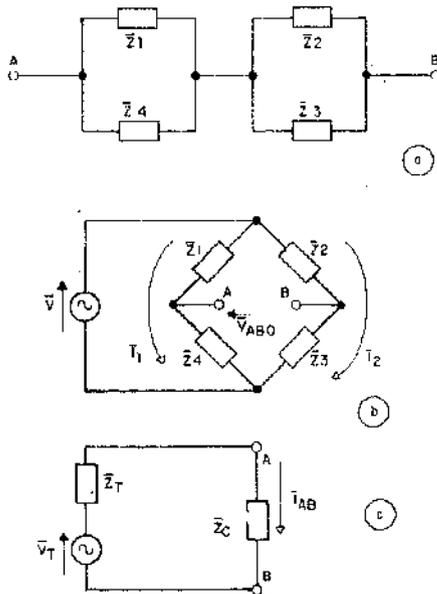


Fig. 14.29

La tensión del generador equivalente de Thévenin se calcula por aplicación de la segunda regla de Kirchhoff al circuito de la Fig. 14.29.b) resultando:

$$\bar{V}_{AB0} = \bar{V}_T = -\bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \bar{I}_2 \bar{Z}_2$$

$$\text{pero } \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4} \quad \text{e} \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

por lo cual

$$\bar{V}_T = \bar{V} \left(-\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4} + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \right)$$

$$\bar{V}_T = 100 e^{j 0^\circ} \left(-\frac{(20 - j 10)}{20 - j 10 + 10} + \frac{(10 - j 10)}{10 - j 10 + j 20} \right)$$

$$\bar{V}_T = -(70 + j 90) \text{ V}$$

y la corriente en la impedancia de carga, del circuito de la Fig. 14.29.c) será:

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{V}_T}{\bar{Z}_T + \bar{Z}_C} = \frac{-(70 + j 90)}{(27 - j) + (3 + j 11)}$$

$$\bar{I}_{AB} = -(3 + j 2) = -3,6 e^{j 33,69^\circ} \text{ A}$$

14.12.4) Para el circuito dado en la Fig. 14.30 calcular la tensión entre los puntos *A-B* cuando se conecta una impedancia de carga $\bar{Z}_C = j 50 \Omega$ aplicando el Teorema de Norton.

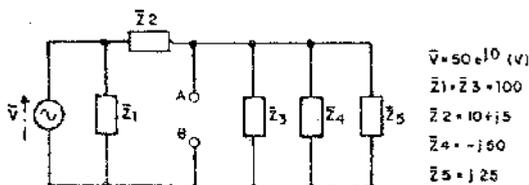


Fig. 14.30

Solución:

Con objeto de calcular la admitancia equivalente de Norton se desactiva el generador, conformándose el circuito presentado en la Fig. 14.31.a).

para el cual:

$$\bar{Y}_N = \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_4} + \frac{1}{\bar{Z}_5}$$

$$\bar{Y}_N = \frac{1}{(10 + j5)} + \frac{1}{100} + \frac{1}{-j50} + \frac{1}{j25} \quad \therefore$$

$$\bar{Y}_N = (9 - j6) 10^{-2} \quad \Omega$$

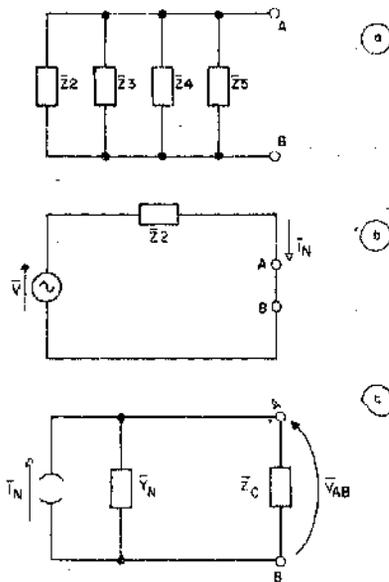


Fig. 14.31

La corriente de cortocircuito entre los puntos A-B se calcula en base al circuito de la Fig. 14.31.b):

$$\bar{I}_{CC} = \bar{I}_N = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = \frac{50 e^{j0^\circ}}{(10 + j5)} \quad \therefore$$

$$I_N = (4 - j2) \text{ A}$$

y la tensión sobre la impedancia de carga, del circuito de la Fig. 14.31.c) será:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\bar{I}_N}{\bar{Y}_N + \frac{1}{\bar{Z}_C}} = \frac{(4 - j 2)}{(9 - j 6) 10^{-2} + \frac{1}{j 50}}$$

$$\bar{V}_{AB} = (37,14 + j) = 37,15 e^{j 1,54^\circ} \text{ V}$$

14.12.5) Calcular el valor de \bar{I}_1 para el circuito y datos de la Fig. 14.32.b) en base a los datos del circuito de la Fig. 14.32.a), por aplicación del Teorema de Reciprocidad.

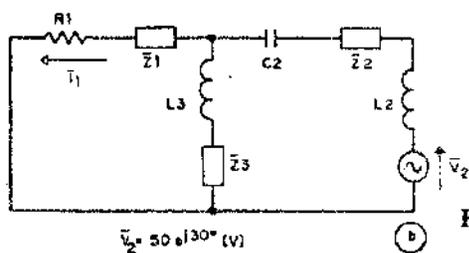
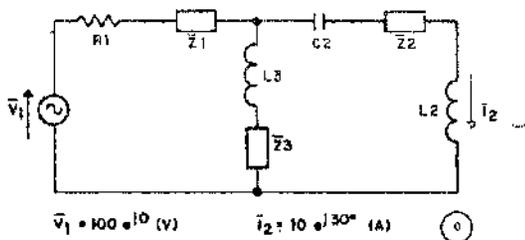


Fig. 14.32

Solución:

Según el teorema debe cumplirse que:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \quad \therefore$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \bar{I}_2 = \frac{50 e^{j 30^\circ}}{100 e^{j 0^\circ}} 10 e^{j 30^\circ}$$

$$\bar{I}_1 = 5 e^{j 60^\circ} \text{ A}$$

14.11.6) Para el circuito ilustrado en la Fig. 14.33, se pide determinar:

- El valor de la corriente para máxima transferencia de energía.
- El valor de los elementos de la carga que le llevan al circuito a dicho estado.

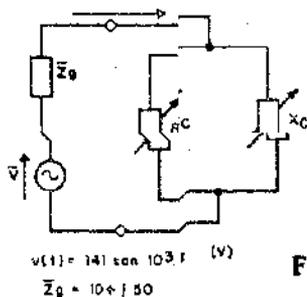


Fig. 14.33

Solución:

- a) Se logra la máxima transferencia cuando:

$$\bar{Z}_C = \bar{Z}_g^* \quad \therefore$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_C} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_g^*} = \frac{100 e^{j 0^\circ}}{(10 + j 50) + (10 - j 50)}$$

$$\bar{I} = 5 e^{j 0^\circ} \text{ A}$$

- b) Por el conexionado de carga conviene la igualación de admitancias:

$$\bar{Y}_C = \bar{Y}_g^* = \frac{1}{\bar{Z}_g^*} = \frac{1}{(10 - j 50)} = \frac{10 + j 50}{2600} \quad \therefore$$

$$\bar{Y}_C = \frac{1}{R_C} + j B_C = \frac{10}{2600} + j \frac{50}{2600} \quad \text{por lo cual}$$

$$\frac{1}{R_C} = \frac{10}{2600} \quad \therefore R_C = 260 \text{ } \Omega$$

$$B_C = \omega C = \frac{50}{2600} \quad \text{en consecuencia}$$

$$C = \frac{50}{10^3 \cdot 2600} \quad \therefore C = 19 \text{ } \mu\text{F}$$

14.12.7) Para el circuito dado en la Fig. 14.34 se desea calcular la impedancia de excitación Z_{AB} , previo empleo de la transformación estrella-triángulo para simplificar el circuito.

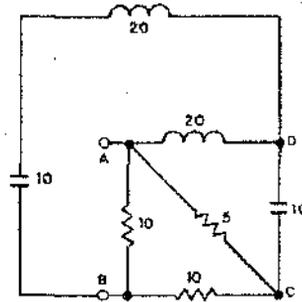


Fig. 14.34

Solución:

Con el objeto de simplificar dicho circuito se transformará la configuración en triángulo identificada en la Fig. 14.35.a) en un equivalente en estrella mostrada en la Fig. 14.35.b). Dichas impedancias resultan:

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R + \bar{Z}_C} = \frac{j 20 \cdot 5}{j 20 + 5 - j 10} = (8 + j 4) \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R + \bar{Z}_C} = \frac{j 20 (-j 10)}{j 20 + 5 - j 10} = (8 - j 16) \Omega$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_R \bar{Z}_C}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R + \bar{Z}_C} = \frac{5 (-j 10)}{j 20 + 5 - j 10} = (-4 - j 2) \Omega$$

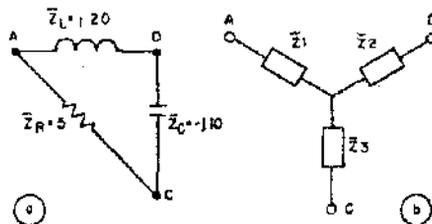


Fig. 14.35

Adviértase que si bien matemáticamente la transformación $Y \leftrightarrow \Delta$ siempre es posible, físicamente pueden darse casos, como el de \bar{Z}_3 , que pueden no ser realizables. Esto no afecta para el cálculo de la impedancia de excitación. Hallados los valores de las impedancias de la estrella, al reemplazar dicha configuración por la del triángulo, se forma el circuito indicado en la Fig. 14.36, cuya impedancia de excitación puede calcularse por simple inspección.

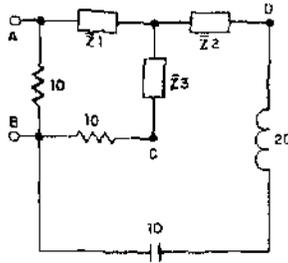


Fig. 14.36

Se designará como \bar{Z}_D a la impedancia de la rama que contiene a \bar{Z}_2 y como \bar{Z}_C a la que contiene a \bar{Z}_3 , resultando:

$$\bar{Z}_D = \bar{Z}_2 + j 20 - j 10 = (8 - j 16) + j 20 - j 10 = (8 - j 6) \Omega$$

$$\bar{Z}_C = \bar{Z}_3 + 10 = (-4 - j 2) + 10 = (6 - j 2) \Omega$$

Asociando en paralelo las impedancias halladas:

$$\bar{Z}_{PDC} = \frac{\bar{Z}_D \bar{Z}_C}{\bar{Z}_D + \bar{Z}_C} = \frac{(8 - j 6)(6 - j 2)}{8 - j 6 + 6 - j 2} = (3,53 - j 1,69) \Omega$$

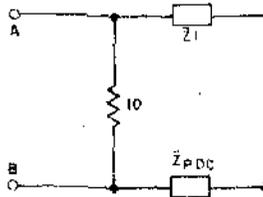


Fig. 14.37

En estas condiciones \bar{Z}_{AB} puede calcularse a partir del circuito mostrado en la Fig. 14.37, donde:

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{10 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_{PDC})}{10 + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{PDC}} = \frac{10 (8 + j4 + 3,53 - j1,69)}{10 + 8 + j4 + 3,53 - j1,69}$$

$$\bar{Z}_{AB} = (5,41 + j 0,49) = 5,43 e^{j 5,17^\circ} \Omega$$

14.13 Problemas propuestos

14.13.1) Empleando el Teorema de Superposición calcular el valor complejo eficaz de la tensión entre los puntos A-B para el circuito dado en la Fig. 14.38.

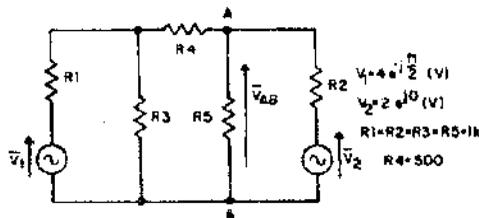


Fig. 14.38

Resultado:

$$\bar{V}_{AB} = (0,66 - j 0,66) = 0,94 e^{-j \pi/4} \text{ V}$$

14.13.2) Para el circuito dado en la Fig. 14.39, en el instante $t = 0^+$ se abre el interruptor. Hallar la expresión de $v_C(t)$ empleando el concepto de la extensión del teorema de superposición para circuitos que cambian de estado.

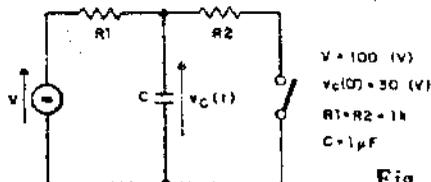


Fig. 14.39

Resultado:

$$v_C(t) = (100 - 70 e^{-10^3 t}) u(t) \text{ V}$$

14.13.3) En el circuito ilustrado en la Fig. 14.40, se pide reemplazar la impedancia \bar{Z}_3 por un generador ideal de tensión aplicando el Teorema de Compensación.

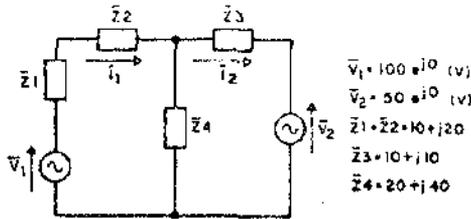


Fig. 14.40

Resultados:

Resolviendo el circuito, por ejemplo, por el método de las mallas, resulta que $\bar{I}_2 = 0$ y en consecuencia la tensión del generador compensador $\bar{V}_{Z_3} = \bar{Z}_3 \bar{I}_2 = 0$.

14.13.4) Para el circuito que se muestra en la Fig. 14.41, en el instante $t = 0^+$ se cierra el interruptor. Operando en el dominio transformado de Laplace se pide:

- Hallar el circuito equivalente de Thévenin a la izquierda de los puntos A-B, dibujando el circuito resultante.
- Encontrar la expresión de $i_C(t)$.

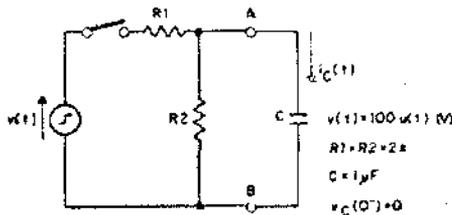


Fig. 14.41

Resultados:

a) Se ilustra en la Fig. 14.42:

b) $i_C(t) = 50 \cdot 10^{-3} e^{-10^3 t} u(t) \text{ V}$

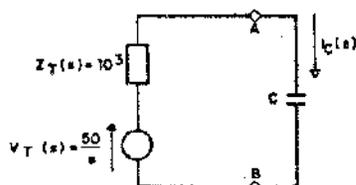


Fig. 14.42

14.13.5) En el instante $t = 0^+$ se cierra el interruptor en el circuito de la Fig. 14.43. Operando en el dominio transformado de Laplace se pide,

- a) Hallar el circuito equivalente de Norton a la izquierda de los puntos A-B, dibujando el circuito resultante.
 b) Encontrar la expresión de $i_{R_2}(t)$.

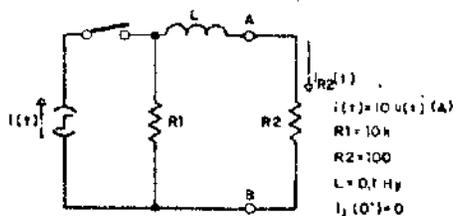


Fig. 14.43

Resultados:

a) Se muestra en la Fig. 14.44

b) $i_{R_2}(t) = 9,9 (1 - e^{-10,1 \cdot 10^4 t}) u(t) \text{ A}$

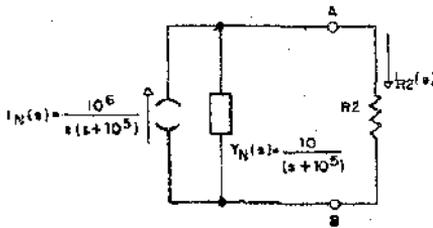


Fig. 14.44

14.13.6) Hallar el valor que debe adoptar la impedancia de carga \bar{Z}_C para que el dipolo dado en la Fig. 14.45 transfiera la máxima potencia a dicha carga.

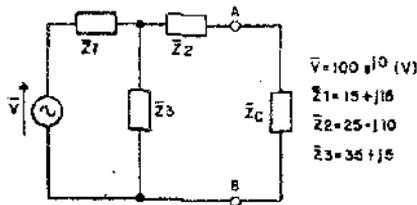


Fig. 14.45

Resultado:

$$\bar{Z}_C = (37 + j 2,76) = 37,10 e^{j 4,26^\circ} \Omega$$

Teoría de los cuadripolos

15.1 Introducción: Es propósito de este capítulo exponer en forma general los principios y conceptos fundamentales asociados a las redes de dos pares de terminales, o redes de dos puertos, y que en adelante se las denominará *cuadripolos*. En consecuencia, la exposición precedente sentará las bases, que luego pueden derivarse extensamente en aplicaciones específicas, y para citar un solo ejemplo puede mencionarse a los filtros eléctricos.

Según se adelantó en el Cap. 13, parágrafo 13.3), para configuraciones circuitales geoméricamente alargadas es conveniente aplicar para su resolución una teoría específica, que es precisamente, la que se expondrá en adelante. El empleo de este tipo de redes es muy común en electrónica, y especialmente en comunicaciones, donde normalmente se conectan un número apreciable de etapas, unas a continuación de las otras.

El desarrollo de la teoría comenzará por la definición del cuadripolo, la presentación de las configuraciones típicas, como así también sus diferentes clasificaciones y los tipos de problemas que se resuelven con la teoría de los cuadripolos.

Se plantean luego las ecuaciones, parámetros y matrices características, analizando la información suministrada por los parámetros. Luego de estudiar la asociación de cuadripolos, se expondrán las distintas formas de calcular los parámetros y las relaciones entre los mismos correspondientes a las distintas matrices.

A continuación se analizará la equivalencia de cuadripolos T y II, como así también los circuitos equivalentes del cuadripolo con uno y dos transferidores o amplificadores ideales, que en electrónica se conocen comúnmente como generadores controlados.

Seguidamente se estudiarán las impedancias de entrada y salida en condiciones normales de funcionamiento, definiendo además las impedancias interactiva, imagen y característica.

Concluye el capítulo con el planteo de las ideas básicas sobre las constantes de propagación, atenuación y fase.

15.2) Definición de cuadripolo

“Un cuadripolo es una configuración arbitraria de elementos de circuito, que tiene dos pares de terminales para su conexión con el resto del esquema eléctrico, debiendo cumplirse como condición adicional que los terminales de entrada estén vinculados con los de salida sólo a través del interior del cuadripolo”.

En la Fig. 15.1 se representa su símbolo, y los correspondientes sentidos de referencia para las variables eléctricas. En virtud de la definición es evidente que las corrientes para cada par de terminales son iguales y opuestas.

Debido a que no se imponen restricciones sobre el tipo de circuito incluido dentro del cuadripolo, la amplitud de la teoría en cuestión queda en evidencia, por lo cual los conceptos podrán aplicarse, por ejemplo, a circuitos amplificadores que incluyan dispositivos semiconductores.

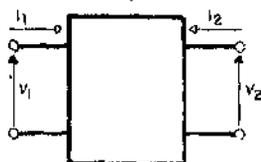


Fig. 15.1

15.3) Configuraciones típicas

Si bien la definición de cuadripolo no impone restricción sobre la complejidad de la geometría circuital interna, ciertos tipos de configuraciones se presentan frecuentemente en la práctica, por lo cual se les ha dado un nombre, y que se presentan para su examen en la Fig. 15.2.

De la observación de las figuras puede intuirse que por asociación de cuadripolos elementales puede llegarse a los más complicados, como se verá más adelante.

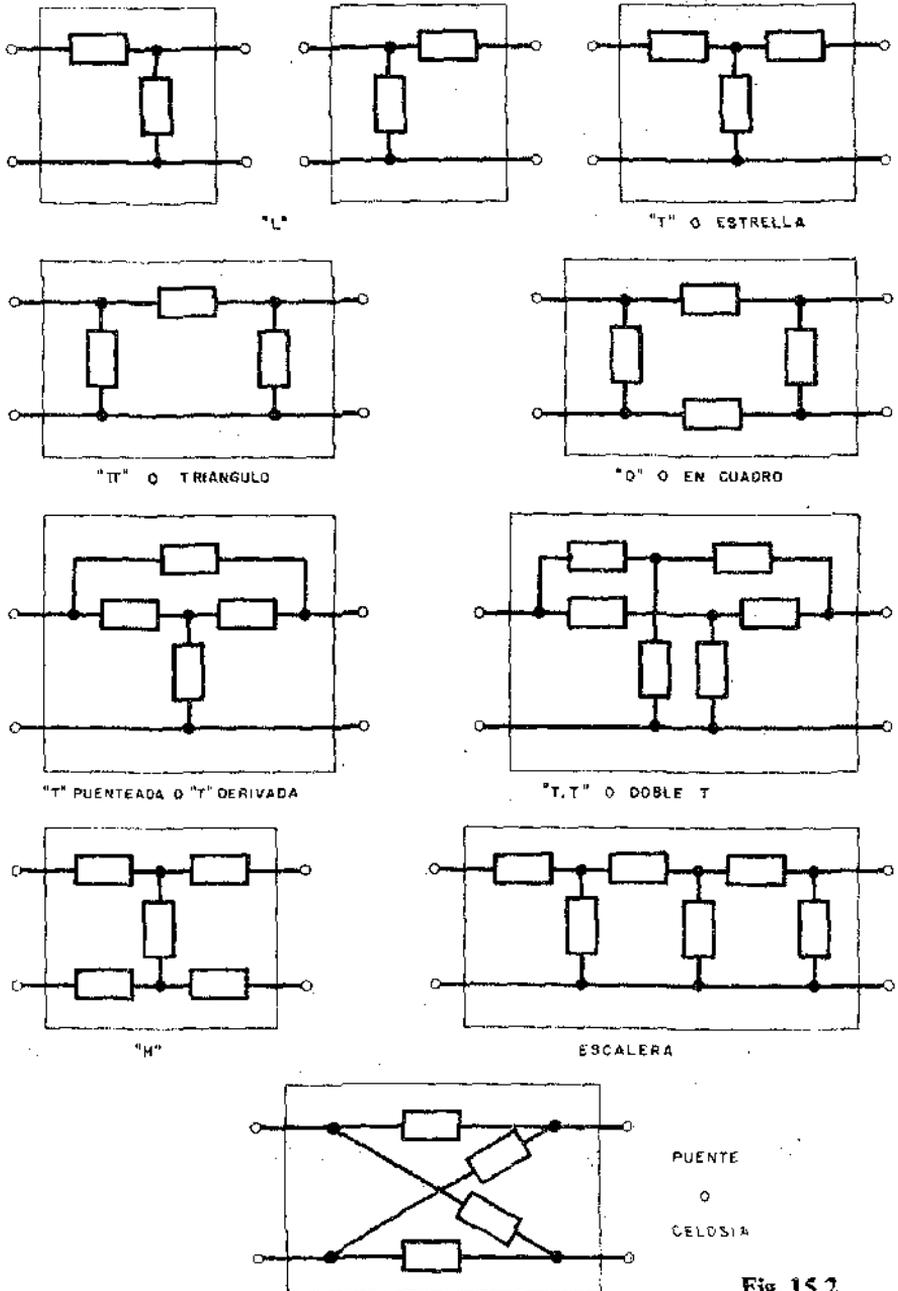


Fig. 15.2

15.4) Clasificación de cuadripolos

Los cuadripolos pueden clasificarse según distintos criterios, a saber:

a) Según el tipo de elementos que incluyan:

- a.1) *Activos*: son aquéllos que incluyen generadores como los estudiados al presente, llamados en electrónica generadores independientes. No satisfacen el Teorema de Reciprocidad.
- a.2) *Pasivos*: son aquéllos en los cuales mediante transformaciones adecuadas pueden ser reducidos a un esquema que no incluyan generador alguno. Satisfacen el Teorema de Reciprocidad.

b) Según las características de los elementos incluidos:

- b.1) *Lineales*: resultan aquéllos en los que todos sus elementos son lineales.
- b.2) *Alineales*: resultan aquéllos que tienen uno o más elementos alineales.

Es de hacer notar que el análisis a realizar en este capítulo se referirá exclusivamente a los *cuadripolos lineales y pasivos*.

c) Según el sentido de transferencia de la energía:

- c.1) *Bilaterales*: son los que permiten la transferencia de la energía en ambos sentidos con igual facilidad.
- c.2) *Unilaterales*: son los que permiten la transferencia de energía con mayor facilidad en un sentido que en el opuesto.

d) Según el tipo de configuración:

- d.1) *Balanceados*: son aquéllos que poseen un eje de simetría longitudinal. Por ejemplo, en la configuración "H" mostrada en la Fig. 15.2, si las impedancias en serie superiores o inferiores son iguales, el cuadripolo se encuentra eléctricamente balanceado a tierra. En otras palabras, pueden permutarse entre sí, por un lado los terminales de entrada y por otro, los de salida, y dicho cambio no será advertido desde los terminales mencionados.
- d.2) *Simétricos*: son aquéllos que poseen un eje de simetría trasversal. Por ejemplo, si la configuración "T" mostrada en la Fig. 15.2 posee los bra-

zos horizontales idénticos, es decir de igual valor de impedancia, es obviamente simétrica. Es decir, que se verifica si un cuadripolo es simétrico cuando se permutan los terminales de entrada por los de salida, y dicho cambio no es advertido desde los terminales mencionados.

- d.3) *Asimétricos*: son aquéllos que no poseen ningún eje de simetría. Por ejemplo, la configuración "T" con brazos desiguales. Adviértase que las condiciones de simetría que interesan son las eléctricas y no las geométricas.

15.5) Tipos de problemas

Los tres tipos de problemas básicos que pueden resolverse con la teoría de los cuadripolos son los siguientes:

- a) *El problema de la transferencia*: trata de la determinación de la tensión o la corriente en los terminales de salida en función de la tensión o la corriente en los terminales de entrada. Este problema que aparece corrientemente en electrónica, presenta dos casos particulares de gran importancia, y es cuando los terminales de salida del cuadripolo se encuentran a circuito abierto o bien cortocircuitados. Como se verá, este problema puede ser eficazmente resuelto en base a ciertos parámetros del cuadripolo, denominados de transferencia, y que precisamente se definen para las condiciones antes especificadas.
- b) *El problema de la transmisión*: trata de la determinación de la potencia en un par de terminales en función de la potencia en el otro par. Este problema se presenta comúnmente en las líneas de transmisión de energía, y un juego particular de parámetros llamados de transmisión permite resolver el problema en forma sencilla, como se verá más adelante.
- c) *El problema de la inserción*: trata de la determinación del efecto que provoca la inserción de un cuadripolo en un conjunto más amplio. Este problema se presenta, por ejemplo, al insertar un filtro en un circuito con el objeto de perfeccionar su funcionamiento. En este caso se desea encontrar la tensión, la corriente o la potencia en la carga después de la inserción del cuadripolo en función de la tensión, la corriente o la potencia en la carga antes de efectuar dicha inserción. Obviamente se buscan determinar las pérdidas por inserción. Varios de los conjuntos de parámetros a definir permiten el cálculo de las pérdidas por inserción, y en algunos casos parti-

culares debido a valores específicos que toma la impedancia que carga el cuadripolo, el análisis se simplifica y se reduce al problema de la transmisión.

15.6 Ecuaciones, parámetros y matrices características

En la Fig. 15.1. se ha ilustrado la representación del cuadripolo. Las propiedades del mismo pueden estar descritas por la siguiente función implícita de cuatro variables;

$$f(V_1, V_2, I_1, I_2) \equiv 0. \quad (15.1)$$

Obviamente, de la forma en que está planteada la Ec. (15.1) resulta incómoda para su empleo, por lo cual es conveniente desdoblarla en pares de ecuaciones explícitas de dos variables, y en base a todos los pares de combinaciones posibles pueden formarse las siguientes familias:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= f_1(I_1, I_2) \\ V_2 &= f_2(I_1, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= f_3(V_1, V_2) \\ I_2 &= f_4(V_1, V_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= f_5(I_1, V_2) \\ I_2 &= f_6(I_1, V_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= f_7(V_2, I_2) \\ I_1 &= f_8(V_2, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= f_9(V_1, I_2) \\ V_2 &= f_{10}(V_1, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= f_{11}(V_1, I_1) \\ I_2 &= f_{12}(V_1, I_1) \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

donde la forma analítica de las funciones f depende de la constitución del cuádrupolo. Cada uno de los pares de funciones planteadas conducen a una familia de cuatro parámetros, según se demostrará, que contiene toda la información necesaria acerca del cuádrupolo. Como se verá, estos parámetros ordenados adecuadamente en forma de matrices permitirán agilizar la solución de los problemas. En realidad cada una de las matrices contienen la misma información que las restantes, pero presentada de distinta forma, y es por esta causa que en ciertos tipos de problemas, una matriz será más útil que las restantes.

a) *Análisis para la familia dada por la Ec. (15.2).*

En particular, se comienza con la expresión para V_1 ,

$$V_1 = f_1(I_1, I_2) \quad (15.8)$$

en estas condiciones interesa conocer como varía la tensión en función de las variaciones de corriente. Será conveniente entonces aplicar a la Ec. (15.8) el desarrollo en serie de Taylor de dos variables, donde la expresión del desarrollo de la serie limitada a los términos de orden cero y primero, se expresa normalmente como:

$$y(x, z) = y_0 + \frac{\delta y}{\delta x} \bigg|_{x_0, z_0} (x - x_0) + \frac{\delta y}{\delta z} \bigg|_{x_0, z_0} (z - z_0) \quad (15.9)$$

y en la última ecuación se han omitido los demás términos de la serie pues resultarán nulos debido a la condición de linealidad impuesta al cuádrupolo.

En la mencionada ecuación, x_0 y z_0 definen los puntos en torno de los cuales se efectúa el desarrollo. Aplicado el desarrollo a la Ec. (15.8), los valores anteriormente mencionados definen para las corrientes un par de valores de referencia, que pueden llamarse I_{10} e I_{20} , a partir de los cuales se producirán las variaciones de las mismas con el objeto de estudiar los de V_1 . En virtud de lo antedicho, de la Ec. (15.8) se deriva que:

$$V_1(I_1, I_2) = V_1(I_{10}, I_{20}) + \frac{\delta V_1}{\delta I_1} \bigg|_{I_{10}, I_{20}} (I_1 - I_{10}) + \frac{\delta V_1}{\delta I_2} \bigg|_{I_{10}, I_{20}} (I_2 - I_{20})$$

por lo cual:

$$V_1(i_1, i_2) - V_1(I_{10}, I_{20}) = \frac{\delta V_1}{\delta I_1} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} (I_1 - I_{10}) + \frac{\delta V_1}{\delta I_2} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} (I_2 - I_{20})$$

que puede expresarse como:

$$\Delta V_1 = \frac{\delta V_1}{\delta I_1} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} \Delta I_1 + \frac{\delta V_1}{\delta I_2} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} \Delta I_2 \quad (15.10)$$

y dado que los incrementos varían en función del tiempo, podrán expresarse como funciones temporales, por lo cual la Ec. (15.10) resulta:

$$v_1(t) = \frac{\delta V_1}{\delta I_1} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} i_1(t) + \frac{\delta V_1}{\delta I_2} \bigg|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} i_2(t) \quad (15.11)$$

donde los valores de $i_1(t)$ e $i_2(t)$ se miden a partir de I_{10} e I_{20} respectivamente, pudiendo estos últimos ser incluso nulos.

En consecuencia, el desarrollo que sigue es válido tanto para incrementos alrededor de un valor de cada variable independiente, como para los valores totales de las mismas. Las derivadas parciales de la Ec. (15.11) tienen valores independientes de los de I_{10} e I_{20} , por ser el cuadripolo lineal. Para los circuitos de constantes concentradas, dichas derivadas parciales son operadores matemáticos. En efecto, tomando como ejemplo el circuito de la Fig. 15.3, resulta, para la malla de la izquierda:

$$v_1(t) = L \frac{d i_1(t)}{d t} + R [i_1(t) + i_2(t)]$$

$$\therefore v_1(t) = \left[R + L \frac{d}{d t} \right] i_1(t) + R i_2(t) \quad (15.12)$$

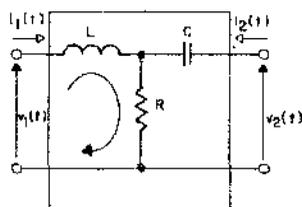


Fig. 15.3

Comparando las Ecs. (15.11) y (15.12), se obtiene:

$$\left. \frac{\delta V_1}{\delta I_1} \right|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} = \left[R + L \frac{d}{dt} \right]$$

$$\left. \frac{\delta V_1}{\delta I_2} \right|_{\substack{I_{10} \\ I_{20}}} = R$$

Nótese que si se aplica la transformada directa de Laplace a la Ec. (15.12) resulta:

$$V_1(s) = [R + sL] I_1(s) + R I_2(s)$$

Es decir que los operadores matemáticos, se convierten en funciones operacionales de la variable s .

Con el objeto de generalizar el problema, se planteará la Ec. (15.11) en el dominio transformado. Las derivadas parciales se convertirán en funciones operacionales que se designarán con $K_1(s)$ y $K_2(s)$ para recordar que sus valores no dependen de $I_{10}(s)$ e $I_{20}(s)$. Esto es:

$$V_1(s) = K_1(s) I_1(s) + K_2(s) I_2(s) \quad (15.13)$$

Operando de manera similar para V_2 de la Ec. (15.2) se llega a que:

$$V_2(s) = K_3(s) I_1(s) + K_4(s) I_2(s) \quad (15.14)$$

De las Ecs. (15.13) y (15.14) pueden hallarse las constantes, resultando:

$$K_1(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} ; \quad K_3(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}$$

$$K_2(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} ; \quad K_4(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0}$$

Nótese que $K_1(s)$ resulta del cociente entre tensión y corriente, por lo que tendrá dimensiones de impedancia. Como además relaciona tensión y corriente de entrada resulta una impedancia de entrada, pero con la salida del

cuadripolo a circuito abierto pues debe cumplirse que $I_2(s) = 0$. En consecuencia podrá expresarse como:

$$K_1(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = z_{11}(s) \quad (15.15)$$

donde $z_{11}(s)$ es la impedancia de entrada con la salida a circuito abierto.*

Por otro lado, $K_2(s)$, puesto que es cociente entre tensión y corriente, tendrá dimensiones de impedancia y será de transferencia dado que relaciona tensión en un par de terminales con la corriente en el otro par, e inversa pues es la relación entre variables eléctricas correspondientes a entrada y salida. Como adicionalmente debe cumplirse que $I_1(s) = 0$, la entrada debe estar a circuito abierto. Por lo tanto resulta:

$$K_2(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = z_{12}(s) \quad (15.16)$$

donde $z_{12}(s)$ es la impedancia de transferencia inversa con la entrada a circuito abierto. Este tipo de razonamiento para asignar el nombre a las constantes se repite para las dos faltantes de esta familia y para todas las restantes, por lo que en lo sucesivo se darán directamente las denominaciones.

Para $K_3(s)$ resulta:

$$K_3(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = z_{21}(s) \quad (15.17)$$

donde $z_{21}(s)$ es la impedancia de transferencia directa con la salida a circuito abierto.

Para $K_4(s)$ resulta:

$$K_4(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = z_{22}(s) \quad (15.18)$$

donde $z_{22}(s)$ es la impedancia de salida con la entrada a circuito abierto.

Reemplazando las Ecs. (15.15) y (15.16) en la Ec. (15.13), y las Ecs. (15.17) y (15.18) en la Ec. (15.14) resulta:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

Nota: *Adviértase que por razones tipográficas, en el texto se emplea para estos parámetros la letra z; pero en las figuras aparece como \mathfrak{z} .*

Expresando la Ec. (15.19) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.20)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

donde $[z(s)]$ se denomina *matriz impedancia* del cuadripolo, y sus elementos constitutivos se llaman *parámetros impedancia* del cuadripolo.

b) *Análisis para la familia dada por la Ec. (15.3).*

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= f_3(V_1, V_2) \\ I_2 &= f_4(V_1, V_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Por procedimiento similar al realizado para el análisis de la primera familia se llega a las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= K_5(s) V_1(s) + K_6(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= K_7(s) V_1(s) + K_8(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

de donde se desprende que:

$$K_5(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = y_{11}(s) \quad (15.22)$$

donde $y_{11}(s)$ es la admitancia de entrada con la salida en cortocircuito. A su vez:

$$K_6(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = y_{12}(s) \quad (15.23)$$

donde $y_{12}(s)$ es la admitancia de transferencia inversa con la entrada en cortocircuito. Por otro lado:

$$K_7(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = y_{21}(s) \quad (15.24)$$

donde $y_{21}(s)$ es la admitancia de transferencia directa con la salida en cortocircuito. A su vez:

$$K_8(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s) = 0} = y_{22}(s) \quad (15.25)$$

donde $y_{22}(s)$ es la admitancia de salida con la entrada en cortocircuito.

Reemplazando adecuadamente las Ecs. (15.22), (15.23), (15.24) y (15.25) en el juego dado por la Ec. (15.21) resulta:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

Expresando la Ec. (15.26) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.27)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

donde $[y(s)]$ se denomina *matriz admitancia* del cuadripolo, y sus elementos constitutivos se denominan *parámetros admitancia* del cuadripolo.

c) *Análisis para la familia dada por la Ec. (15.4).*

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= f_5(I_1, V_2) \\ I_2 &= f_6(I_1, V_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Por procedimiento similar al realizado para el análisis de la primera familia se llega a las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= K_9(s) I_1(s) + K_{10}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= K_{11}(s) I_1(s) + K_{12}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.28)$$

donde se desprende que:

$$K_{10}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = h_{11}(s) \quad (15.29)$$

donde $h_{11}(s)$ es la impedancia de entrada con la salida en cortocircuito.

A su vez:

$$K_{10}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = h_{12}(s) \quad (15.30)$$

donde $h_{12}(s)$ es la trasmittancia inversa de tensiones con la entrada a circuito abierto. Por otro lado:

$$K_{11}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = h_{21}(s) \quad (15.31)$$

donde $h_{21}(s)$ es la amplificación o trasmittancia directa de corrientes con la salida en cortocircuito. A su vez:

$$K_{12}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = h_{22}(s) \quad (15.32)$$

donde $h_{22}(s)$ es la admitancia de salida con la entrada a circuito abierto.

Reemplazando adecuadamente las Ecs. (15.29), (15.30), (15.31) y (15.32) en el juego dado por la Ec. (15.28) resulta:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= h_{11}(s) I_1(s) + h_{12}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= h_{21}(s) I_1(s) + h_{22}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

Expresando la Ec. (15.33) en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.34)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

donde $[h(s)]$ se denomina *matriz híbrida* del cuadripolo, y sus elementos constitutivos se llaman *parámetros híbridos* del cuadripolo.

d) *Análisis para la familia dada por la Ec. (15.5).*

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= f_7 (V_2, I_2) \\ I_1 &= f_8 (V_2, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Debido a que esta familia se emplea normalmente para el análisis de cuadripolos en los cuales la salida de uno se conecta a la entrada de otro, conocida como conexión en cascada, como se aprecia en la Fig. 15.8, es útil invertir el sentido de corriente en el par de terminales de salida, y llamando $-I_2 = I'_2$, la Ec. (15.5) resulta:

$$\begin{aligned} V_1 &= f_7 (V_2, I'_2) \\ I_1 &= f_8 (V_2, I'_2) \end{aligned}$$

Por procedimiento similar al realizado para el análisis de la primera familia se llega a las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= K_{13}(s) V_2(s) + K_{14}(s) I'_2(s) \\ I_1(s) &= K_{15}(s) V_2(s) + K_{16}(s) I'_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.35)$$

de donde se desprende que:

$$K_{13}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I'_2(s)=0} = A(s) \quad (15.36)$$

donde $A(s)$ es la transmitancia inversa de tensiones con la salida a circuito abierto. A su vez:

$$K_{14}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I'_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} = B(s) \quad (15.37)$$

donde $B(s)$ es la impedancia de transferencia inversa con la salida en cortocircuito. Por otro lado:

$$K_{15}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I'_2(s)=0} = C(s) \quad (15.38)$$

donde $C(s)$ es la admitancia de transferencia inversa con la salida a circuito abierto. A su vez:

$$K_{16}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} = D(s) \quad (15.39)$$

donde $D(s)$ es la transmitancia inversa de corrientes con la salida en cortocircuito.

Reemplazando adecuadamente las Ecs. (15.36), (15.37), (15.38) y (15.39) en el juego dado por la Ec. (15.35) resulta:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= A(s) V_2(s) + B(s) I_2'(s) \\ I_1(s) &= C(s) V_2(s) + D(s) I_2'(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

Expresando la Ec. (15.40) en forma matricial vemos que:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2'(s) \end{bmatrix} \quad (15.41)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2'(s) \end{bmatrix}$$

donde $[\gamma(s)]$ se llama *matriz transmisión* del cuadripolo, y sus elementos constitutivos se denominan *parámetros transmisión* del cuadripolo.

f) *Análisis para la familia dada por la Ec. (15.6).*

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= f_9(V_1, I_2) \\ V_2 &= f_{10}(V_1, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Por procedimiento similar al realizado para la primera familia se llega a las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} I_2(s) &= K_{17}(s) V_1(s) + K_{18}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= K_{19}(s) V_1(s) + K_{20}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.42)$$

de donde se desprende que:

$$K_{17}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = g_{11}(s) \quad (15.43)$$

donde $g_{11}(s)$ es la admitancia de entrada con la salida a circuito abierto. A su vez:

$$K_{18}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = g_{12}(s) \quad (15.44)$$

donde $g_{12}(s)$ es la transmitancia inversa de corriente con la entrada en cortocircuito. Por otro lado:

$$K_{19}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = g_{21}(s) \quad (15.45)$$

donde $g_{21}(s)$ es la amplificación o transmitancia directa de tensiones con la salida a circuito abierto. A su vez:

$$K_{20}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = g_{22}(s) \quad (15.46)$$

donde $g_{22}(s)$ es la impedancia de salida con la entrada en cortocircuito.

Reemplazando adecuadamente las Ecs. (15.43), (15.44), (15.45) y (15.46) en el juego dado por la Ec. (15.42), resulta:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= g_{11}(s) V_1(s) + g_{12}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= g_{21}(s) V_1(s) + g_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.47)$$

Expresando la Ec. (15.47) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.48)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

donde $[g(s)]$ se denomina *matriz g* del cuadripolo, y sus elementos constitutivos *parámetros g* del cuadripolo.

Es de hacer notar que la familia dada por la Ec. (15.7) no se analizará por que prácticamente no es empleada.

15.7) Información suministrada por los parámetros

Si bien los parámetros encontrados caracterizan cuantitativamente el comportamiento del cuadripolo para ciertos casos particulares, a través de ellos puede obtenerse una información cualitativa respecto del comportamiento del mismo. Se analizarán los siguientes casos, efectuándose el análisis para los parámetros impedancia y se completan las listas en base al cuadro de equivalencias entre parámetros de la Fig. 15.18.

a) Si los parámetros de transferencia son nulos

$$z_{12}(s) = z_{21}(s) = 0$$

$$y_{12}(s) = y_{21}(s) = 0$$

$$h_{12}(s) = h_{21}(s) = 0$$

$$g_{12}(s) = g_{21}(s) = 0$$

$$|\gamma| = 0$$

Esto significa que modificando las variables eléctricas en un par de terminales no existe variación alguna en el otro par de terminales y viceversa. Lo anterior indica que los *circuitos de entrada y salida son independientes entre sí*.

b) Si los parámetros de transferencia son solo nulos en un sentido

$$z_{12}(s) = 0 \quad ; \quad z_{21}(s) \neq 0 \quad \text{ó} \quad z_{12}(s) \neq 0 \quad ; \quad z_{21}(s) = 0$$

$$y_{12}(s) = 0 \quad ; \quad y_{21}(s) \neq 0 \quad \text{ó} \quad y_{12}(s) \neq 0 \quad ; \quad y_{21}(s) = 0$$

$$h_{12}(s) = 0 \quad ; \quad h_{21}(s) \neq 0 \quad \text{ó} \quad h_{12}(s) \neq 0 \quad ; \quad h_{21}(s) = 0$$

$$g_{12}(s) = 0 \quad ; \quad g_{21}(s) \neq 0 \quad \text{ó} \quad g_{12}(s) \neq 0 \quad ; \quad g_{21}(s) = 0$$

Esto indica que modificando las variables eléctricas en un par de terminales existe una variación de las mismos en el otro par, pero no a la inversa.

En otras palabras, existe transferencia de energía en un solo sentido, y el cuadripolo se comporta como *unilateral*.

c) Si los parámetros de transferencia son iguales entre sí y no nulos

$$z_{12}(s) = z_{21}(s) \neq 0$$

$$y_{12}(s) = y_{21}(s) \neq 0$$

$$h_{12}(s) = -h_{21}(s) \neq 0$$

$$g_{12}(s) = -g_{21}(s) \neq 0$$

$$|\gamma| = 1$$

En este caso la transferencia de energía se realiza con igual facilidad en ambos sentidos, y el cuadripolo se comporta como *bilateral* y *pasivo*, satisfaciendo el Teorema de reciprocidad.

d) Si los parámetros de transferencia son distintos entre sí y no nulos

$$z_{12}(s) \neq z_{21}(s) \neq 0$$

$$y_{12}(s) \neq y_{21}(s) \neq 0$$

$$h_{12}(s) \neq -h_{21}(s) \neq 0$$

$$g_{12}(s) \neq -g_{21}(s) \neq 0$$

Esto significa que la transferencia de energía se realiza más fácilmente en un sentido que en el otro. En consecuencia, el cuadripolo no satisface el Teorema de reciprocidad.

e) Si las inmitancias de excitación de entrada y salida son iguales

$$z_{11}(s) = z_{22}(s)$$

$$y_{11}(s) = y_{22}(s)$$

Lo anterior expresa que en los terminales de entrada o salida se presenta la misma impedancia o admitancia, por lo cual el cuadripolo es *simétricamente eléctrico*.

f) Si las inmitancias de excitación de entrada y salida son distintas.

$$z_{11}(s) \neq z_{22}(s)$$

$$\overset{y_{11}}{\underset{z_{11}}{\circlearrowleft}}(s) \neq y_{22}(s)$$

Es obvio que en este caso el cuadripolo será *eléctricamente asimétrico*.

15.8 Asociación de cuadripolos

Debido a que en la mayor parte de las aplicaciones lo más corriente es combinar entre sí varios cuadripolos, será conveniente considerar las asociaciones que pueden darse lugar entre ellos.

a) Asociación en serie

En la Fig. 15.4.a) se ejemplifica dicha asociación para dos cuadripolos, y en la Fig. 15.4.b) el cuadripolo equivalente.

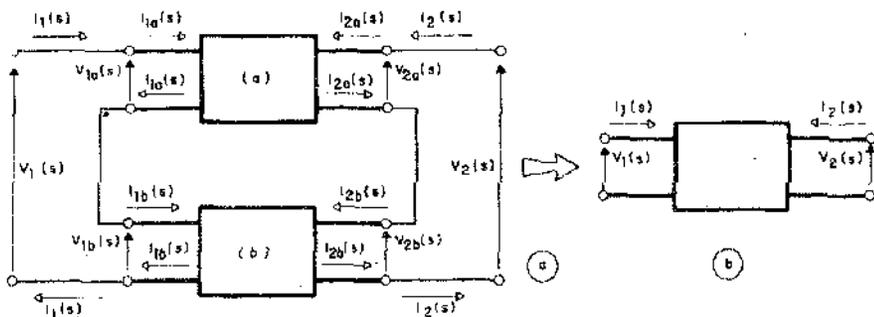


Fig. 15.4

Caracterizando a los cuadripolos llamados (a) y (b) por sus matrices impedancias pueden establecerse las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.50)$$

Sumando las Ecs. (15.49) y (15.50):

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_a(s) \\ z_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ I_{1a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_b(s) \\ z_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.51)$$

La ecuación anterior podrá reducirse, si se tienen en cuenta los resultados que se obtienen al plantear las reglas de Kirchhoff al circuito de la Fig. 15.4.a), a saber:

$$V_1(s) = V_{1a}(s) + V_{1b}(s) \quad (15.52)$$

$$V_2(s) = V_{2a}(s) + V_{2b}(s) \quad (15.53)$$

$$I_1(s) = I_{1a}(s) = I_{1b}(s) \quad (15.54)$$

$$I_2(s) = I_{2a}(s) = I_{2b}(s) \quad (15.55)$$

Operando en la Ec. (15.51), y teniendo en cuenta los resultados hallados en las Ecs. (15.52), (15.53), (15.54) y (15.55) se llega a:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \left\{ [z_a(s)] + [z_b(s)] \right\} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

por lo cual la matriz impedancia del cuadripolo equivalente resulta:

$$[z(s)] = [z_a(s)] + [z_b(s)]$$

Generalizando, para n cuadripolos se tiene que:

$$[z(s)] = \sum_{K=1}^n [z_K(s)] \quad (15.56)$$

La Ec. (15.56) dice que la matriz impedancia del cuadripolo equivalente a n cuadripolos conectados en serie es igual a la suma de las matrices impedancia de cada uno de los cuadripolos intervinientes en la asociación.

b) Asociación en paralelo

En la Fig. 15.5.a) se ejemplifica dicha asociación para dos cuadripolos, y en la Fig. 15.5.b) el cuadripolo equivalente.

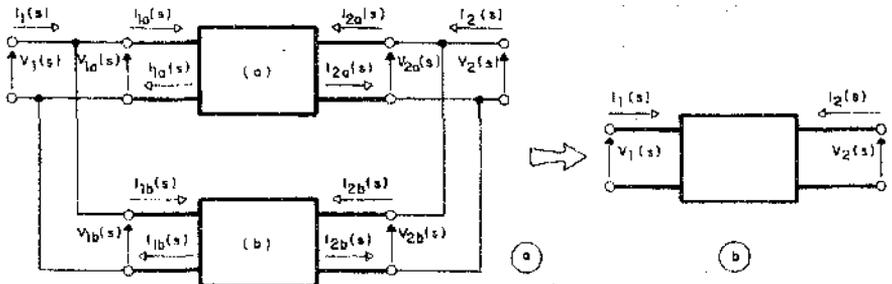


Fig. 15.5

Caracterizando a los cuadripolos llamados (a) y (b) por sus matrices admitancia, pueden establecerse las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} \quad (15.57)$$

$$\begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.58)$$

Sumando las Ecs. (15.57) y (15.58) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.59)$$

La ecuación anterior podrá reducirse, si se tienen en cuenta los resultados que se obtienen al plantear las reglas de Kirchhoff al circuito de la Fig. 15.5.a), a saber:

$$V_1(s) = V_{1a}(s) = V_{1b}(s) \quad (15.60)$$

$$V_2(s) = V_{2a}(s) = V_{2b}(s) \quad (15.61)$$

$$I_1(s) = I_{1a}(s) + I_{1b}(s) \quad (15.62)$$

$$I_2(s) = I_{2a}(s) + I_{2b}(s) \quad (15.63)$$

Operando con la Ec. (15.59), y teniendo en cuenta los resultados hallados en las Ecs. (15.60), (15.61), (15.62) y (15.63) se llega a:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \left\{ [y_a(s)] + [y_b(s)] \right\} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

Por lo cual la matriz admitancia del cuadripolo equivalente resulta:

$$[y(s)] = [y_a(s)] + [y_b(s)]$$

Generalizando para n cuadripolos se tendrá que:

$$[y(s)] = \sum_{K=1}^n [y_K(s)] \quad (15.64)$$

La Ec. (15.64) dice que la matriz admitancia del cuadripolo equivalente a n cuadripolos conectados en paralelo es igual a la suma de las matrices admitancia de cada una de los cuadripolos intervinientes en la asociación.

c) Asociación serie - paralelo

En la Fig. 15.6.a) se ejemplifica dicha asociación para dos cuadripolos, y en la Fig. 15.6.b) el cuadripolo equivalente.

Caracterizando a los cuadripolos llamados (a) y (b) por sus matrices híbridas puede establecerse las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} \quad (15.65)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.66)$$

Sumando las Ecs. (15.65) y (15.66) resulta:

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.67)$$

La ecuación anterior podrá reducirse si se tienen en cuenta los resultados que se obtienen al plantear las reglas de Kirchoff al circuito de la Fig. 15.6.a), a saber:

$$V_1(s) = V_{1a}(s) + V_{1b}(s) \quad (15.68)$$

$$V_2(s) = V_{2a}(s) = V_{2b}(s) \quad (15.69)$$

$$I_1(s) = I_{1a}(s) = I_{1b}(s) \quad (15.70)$$

$$I_2(s) = I_{2a}(s) + I_{2b}(s) \quad (15.71)$$

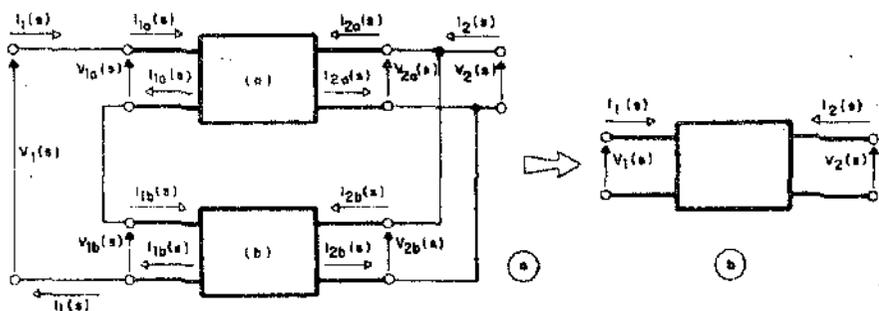


Fig. 15.6

Operando con la Ec. (15.67), y teniendo en cuenta los resultados hallados en las Ecs. (15.68), (15.69), (15.70) y (15.71) se llega a:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \left\{ [h_a(s)] + [h_b(s)] \right\} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

por lo cual la matriz híbrida del cuadripolo equivalente resulta:

$$[h(s)] = [h_a(s)] + [h_b(s)]$$

Generalizando para n cuadripolos se tendrá que:

$$[h(s)] = \sum_{K=1}^n [h_K(s)] \quad (15.72)$$

La Ec. (15.72) dice que la matriz híbrida del cuadripolo equivalente a n cuadripolos conectados en serie-paralelo es igual a la suma de las matrices híbridas de cada uno de los cuadripolos intervinientes en la asociación.

d) Asociación paralelo - serie

En la Fig. 15.7.a) se ejemplifica dicha asociación para dos cuadripolos, y en la Fig. 15.7.b) el cuadripolo equivalente.

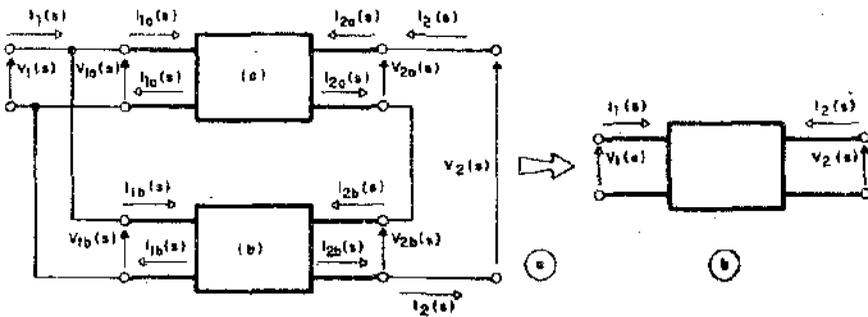


Fig. 15.7

Caracterizando a los cuadripolos llamados (a) y (b) por sus matrices g pueden establecerse las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} \tag{15.73}$$

$$\begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \tag{15.74}$$

Sumando las Ecs. (15.73) y (15.74) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} I_{1a}(s) \\ V_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b}(s) \\ V_{2b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \tag{15.75}$$

La ecuación anterior podrá reducirse si se tienen en cuenta los resultados que se obtienen al plantear las reglas de Kirchhoff, al circuito de la Fig. 15.7.a), a saber:

$$V_1(s) = V_{1a}(s) = V_{1b}(s) \quad (15.76)$$

$$V_2(s) = V_{2a}(s) + V_{2b}(s) \quad (15.77)$$

$$I_2(s) = I_{1a}(s) + I_{1b}(s) \quad (15.78)$$

$$I_2(s) = I_{2a}(s) = I_{2b}(s) \quad (15.79)$$

Operando con la Ec. (15.75), y teniendo en cuenta los resultados hallados en las Ecs. (15.76), (15.77), (15.78) y (15.79), se llega a:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} g_a(s) \\ g_b(s) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

por lo cual la matriz g del cuadripolo equivalente resulta:

$$[g(s)] = [g_a(s)] + [g_b(s)]$$

Generalizando, para n cuadripolos se tendrá que:

$$[g(s)] = \sum_{K=1}^n [g_K(s)] \quad (15.80)$$

La Ec. (15.80) dice que la matriz g del cuadripolo equivalente a n cuadripolos, conectados en paralelo-serie es igual a la suma de las matrices g de cada uno de los cuadripolos intervinientes en la asociación.

e) Asociación en cascada

En la Fig. 15.8.a) se ejemplifica dicha asociación para dos cuadripolos, y en la Fig. 15.8.b) el cuadripolo equivalente.

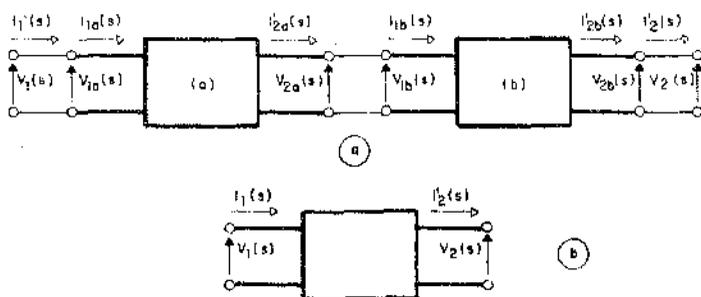


Fig. 15.8

Caracterizando a los cuadripolos llamados (a) y (b) por su matrices transmisión pueden establecerse las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{1a}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_a(s) \\ \Gamma'_{2a}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} \quad (15.81)$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{1b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_b(s) \\ \Gamma'_{2b}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.82)$$

Multiplicando las Ecs. (15.81) y (15.82) resulta:

$$\begin{bmatrix} V_{1a}(s) \\ I_{1a}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b}(s) \\ I_{1b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_b(s) \\ \Gamma'_{2a}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a}(s) \\ I_{2a}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_b(s) \\ \Gamma'_{2b}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b}(s) \\ I_{2b}(s) \end{bmatrix} \quad (15.83)$$

La ecuación anterior podrá reducirse si se tienen en cuenta los resultados que se obtienen al plantear las reglas de Kirchoff al circuito de la Fig. 15.8.a), a saber:

$$V_1(s) = V_{1a}(s) \quad (15.84)$$

$$V_{2a}(s) = V_{1b}(s) \quad (15.85)$$

$$V_2(s) = V_{2b}(s) \quad (15.86)$$

$$I_1(s) = I_{1a}(s) \quad (15.87)$$

$$I'_{2a}(s) = I_{1b}(s) \quad (15.88)$$

$$I_2(s) = I'_{2b}(s) \quad (15.89)$$

Operando con la Ec. (15.83), y teniendo en cuenta los resultados hallados en las Ecs. (15.84) a (15.89) se llega a:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_a(s) & \gamma_b(s) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

por lo cual la matriz transmisión del cuádrupolo equivalente resulta:

$$[\gamma(s)] = [\gamma_a(s)] [\gamma_b(s)]$$

Generalizando para n cuádrupolos se tendrá que:

$$[\gamma(s)] = \prod_{K=1}^n [\gamma_K(s)] \quad (15.90)$$

La Ec. (15.90) dice que la matriz transmisión del cuádrupolo equivalente a n cuádrupolos conectados en cascada es igual al producto de las matrices transmisión de cada uno de los cuádrupolos intervinientes en la asociación.

15.9 Cálculo de los parámetros y matrices características

Los parámetros anteriormente definidos pueden ser calculados por simple inspección, aplicando la definición y ecuaciones circuitales, matricialmente por asociación de cuádrupolos elementales o en forma experimental. A modo de ilustración se desarrollarán algunos ejemplos.

a) Por simple inspección

Para el cuádrupolo de la Fig. 15.9, resulta por ejemplo que:

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} = Z_1(s) + Z_2(s)$$

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = Z_2(s) + Z_3(s)$$

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = \frac{1}{Z_1(s) + \frac{Z_2(s) Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)}}$$

$$y_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0} = \frac{1}{Z_3(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}}$$

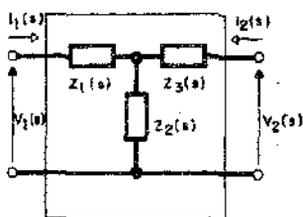


Fig. 15.9

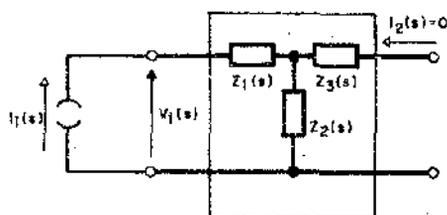


Fig. 15.10

b) Aplicando la definición y ecuaciones circuitales

Si por ejemplo para el cuádrupolo de la Fig. 15.9 se desea calcular $z_{11}(s)$ debe considerarse el circuito ilustrado en la Fig. 15.10; dado que:

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (15.91)$$

y debe calcularse $I_1(s)$ para la condición impuesta. Por aplicación de la ley de Ohm resulta:

$$I_1(s) \left|_{I_2(s)=0} = \frac{V_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (15.92)$$

reemplazando la Ec. (15.92) en la Ec. (15.91)

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{\frac{V_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}} = Z_1(s) + Z_2(s)$$

En el caso de calcular $y_{22}(s)$ se considera el circuito mostrado en la Fig. 15.11 dado que:

$$y_{22}(s) = \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \Big|_{V_1(s) = 0} \quad (15.93)$$

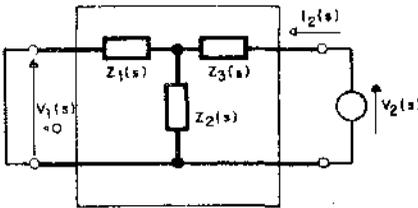


Fig. 15.11

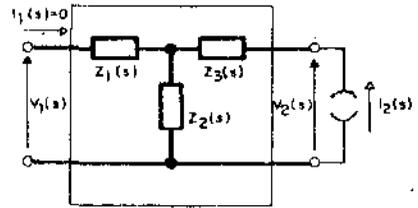


Fig. 15.12

y debe calcularse $I_2(s)$ para la condición impuesta. Por aplicación de la ley de Ohm resulta:

$$I_2(s) \Big|_{V_1(s) = 0} = \frac{V_2(s)}{Z_3(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}} \quad (15.94)$$

reemplazando la Ec. (15.94) en la Ec. (15.93) se tiene que:

$$y_{22}(s) = \frac{\frac{V_2(s)}{Z_3(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}}}{V_2(s)} = \frac{1}{Z_3(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}}$$

Si por otra parte se desea calcular:

$$z_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s) = 0} \quad (15.95)$$

debe considerarse el circuito ilustrado en la Fig. 15.12, y calcular $V_1(s)$ para la condición impuesta, que resulta:

$$V_1(s) \Big|_{I_1(s) = 0} = Z_2(s) I_2(s) \quad (15.96)$$

reemplazando la Ec. (15.96) en la Ec. (15.95) y operando, se encuentra que:

$$z_{12}(s) = Z_2(s)$$

c) Matricialmente, por asociación de cuadripolos

Se aplican los conceptos derivados del estudio de asociación de cuadripolos.

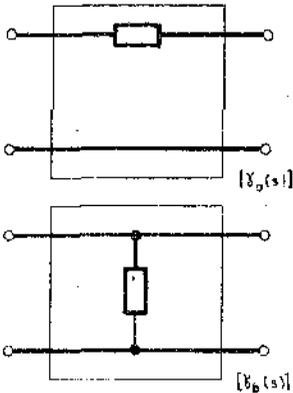


Fig. 15.13

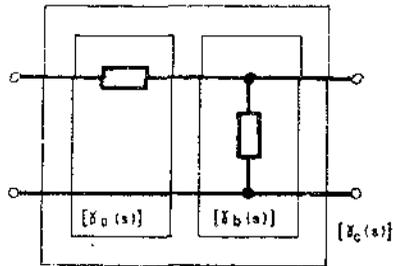


Fig. 15.14

Considérese, por ejemplo, los cuadripolos mostrados en la Fig. 15.13 de los cuales se suponen conocidos sus parámetros transmisión. Si se asocian en cascada según se ilustra en la Fig. 15.14, la matriz transmisión resultante será:

$$[\gamma_c(s)] = [\gamma_a(s)] [\gamma_b(s)]$$

Si a este cuadripolo resultante se lo asocia en cascada con el cuadripolo que representa $[\gamma_a(s)]$ se obtiene la configuración T mostrada en la Fig. 15.15, para la cual la matriz resultante será:

$$[\gamma_d(s)] = [\gamma_c(s)] [\gamma_a(s)]$$

Si por último, se desean calcular los parámetros para la configuración T puenteada que se ilustra en la Fig. 15.16, será conveniente expresar las matrices individuales en términos de admitancias puesto que ambos cuadripolos se encuentran asociados en paralelo, resultando:

$$[y_e(s)] = [y_d(s)] + [y_a(s)]$$

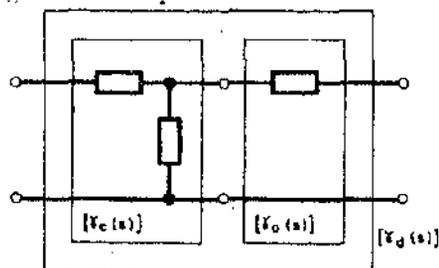


Fig. 15.15

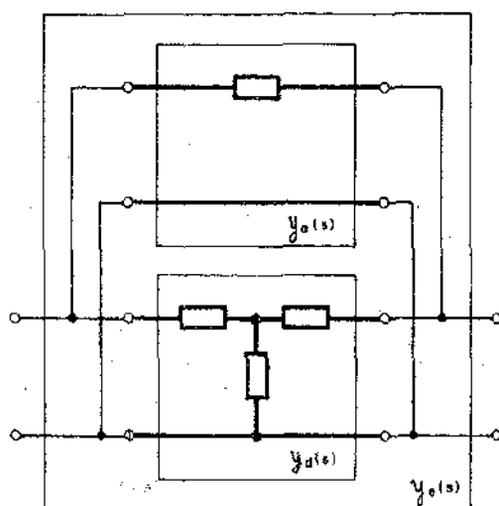


Fig. 15.16

d) En forma experimental

Se verá como pueden determinarse algunos parámetros en base a mediciones, en régimen senoidal permanente. Supóngase que se desea determinar experimentalmente:

$$\bar{z}_{11} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \quad \left| \quad \bar{I}_2 = 0 \right.$$

para un cuadripolo dado. En el párrafo 15.6, al definir los parámetros, se aclaró que el desarrollo era válido tanto para los incrementos alrededor de un valor de cada variable independiente, como para los valores totales. Cuando se estudian cuadripolos constituidos por los elementos pasivos definidos hasta ahora, como ocurre con los filtros eléctricos, interesan los valores totales de las variables, lo que equivale a tomar $I_{10} = I_{20} = 0$. Las definiciones de los parámetros se aplican entonces sin dificultad para la determinación experimental de los mismos.

Cuando se trata, en cambio, de circuitos que incluyen amplificadores lineales, los transistores o válvulas deben tener aplicadas tensiones y corrientes continuas de polarización para fijar el punto estático de funcionamiento de los mismos. En este caso interesa estudiar los incrementos alrededor del punto estático, que produce la aplicación de la señal variable de excitación. En estas condiciones las expresiones "en cortocircuito" o "a circuito abierto" citadas en las definiciones, deben aplicarse solamente a los incrementos, sin afectar a las componentes continuas. En consecuencia, debe utilizarse el circuito de la Fig. 15.17.a) para la determinación experimental. En las terminales de entrada se conecta el generador, y los instrumentos que medirán la tensión y corriente. Debido a que la condición $\bar{I}_2 = 0$ indica que la salida debe estar a *circuito abierto para las variaciones de señal*, y como no puede prescindirse de los componentes de continua, que se indican con el generador V , debe intercalarse el inductor indicado. Si el mismo posee inductancia muy elevada, teóricamente infinita, se presenta como un circuito abierto para las señales alternas, no modificando el circuito para las componentes de continua. Con los instrumentos adecuados, aquéllos que sólo midan los componentes de alterna, se miden la tensión y corriente de entrada.

Si finalmente, se desea calcular:

$$\bar{y}_{12} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \quad \left| \quad \bar{V}_1 = 0 \right.$$

debe montarse el circuito mostrado en la Fig. 15.17.b). En los terminales de salida se conecta el generador de tensión variable y un voltímetro para medir la misma. El generador V colocado a la entrada representa los componentes de continua. El amperímetro intercalado mide la corriente en los terminales de entrada, pero como debe cumplirse la condición que dicho par de terminales se presente como un cortocircuito para las variaciones de señal, debe colocarse entre dichos terminales un capacitor de capacidad muy elevada, teóricamente infinita. De esta manera, midiendo corriente de entrada y tensión de salida puede determinarse el parámetro buscado.

Si el amperímetro y el voltímetro son instrumentos comunes se determina el módulo de parámetro; si son vectoriales se determina además el argumento.

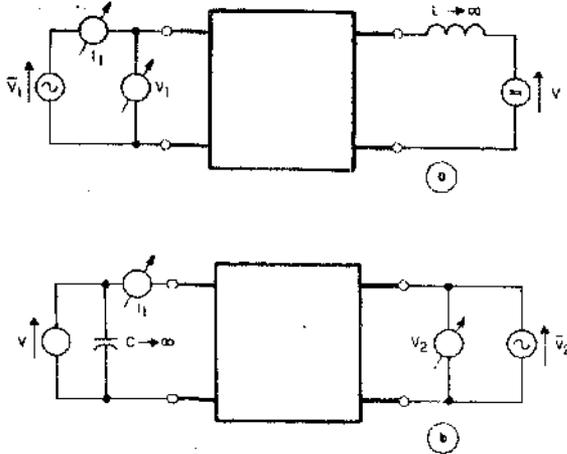


Fig. 15.17

15.10 Relación entre los parámetros correspondientes a las distintas matrices

Es propósito de este párrafo demostrar la equivalencia entre parámetros correspondientes a algunas de las familias. Se analizarán los siguientes casos:

a) Relación entre $[z(s)]$ e $[y(s)]$

En el párrafo 15.4 se encontraron las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [y(s)] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.97)$$

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [z(s)] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.98)$$

Invirtiendo matricialmente la Ec. (15.97) resulta:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [y(s)]^{-1} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.99)$$

donde el primer término del segundo miembro de la Ec. (15.99) es la llamada matriz inversa.

De la comparación de las Ecs. (15.98) y (15.99) surge que:

$$[z(s)] = [y(s)]^{-1} \quad (15.100)$$

donde la matriz inversa se construye según se indicó en el Cap. 13, párrafo 13.2 por lo cual:

$$[y(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}(s)}{\Delta y(s)} & -\frac{y_{12}(s)}{\Delta y(s)} \\ -\frac{y_{21}(s)}{\Delta y(s)} & \frac{y_{11}(s)}{\Delta y(s)} \end{bmatrix} \quad (15.101)$$

donde $\Delta y(s)$ es el determinante de la matriz admitancia, es decir $\Delta y(s) = y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)$. Teniendo en cuenta la Ec. (15.101), la igualdad indicada por la Ec. (15.100) puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}(s)}{\Delta y(s)} & -\frac{y_{12}(s)}{\Delta y(s)} \\ -\frac{y_{21}(s)}{\Delta y(s)} & \frac{y_{11}(s)}{\Delta y(s)} \end{bmatrix} \quad (15.102)$$

de la Ec. (15.102) surge que:

$$z_{11}(s) = \frac{y_{22}(s)}{\Delta y(s)} \quad (15.103); \quad z_{12}(s) = -\frac{y_{12}(s)}{\Delta y(s)} \quad (15.104)$$

$$z_{21}(s) = -\frac{y_{21}(s)}{\Delta y(s)} \quad (15.105); \quad z_{22}(s) = \frac{y_{11}(s)}{\Delta y(s)} \quad (15.106)$$

b) Relación entre $[y(s)]$ y $[z(s)]$

De la Ec. (15.98) resulta que:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.107)$$

De la comparación de las Ecs. (15.97) y (15.107) surge que:

$$[y(s)] = [z(s)]^{-1} \quad (15.108)$$

y al igual que en la demostración anterior puede establecerse que:

$$\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}(s)}{\Delta z(s)} & -\frac{z_{12}(s)}{\Delta z(s)} \\ -\frac{z_{21}(s)}{\Delta z(s)} & \frac{z_{11}(s)}{\Delta z(s)} \end{bmatrix} \quad (15.109)$$

de la Ec. (15.109) se desprende que:

$$y_{11}(s) = \frac{z_{22}(s)}{\Delta z(s)} \quad (15.110); \quad y_{12}(s) = -\frac{z_{12}(s)}{\Delta z(s)} \quad (15.111)$$

$$y_{21}(s) = -\frac{z_{21}(s)}{\Delta z(s)} \quad (15.112); \quad y_{22}(s) = \frac{z_{11}(s)}{\Delta z(s)} \quad (15.113)$$

donde $\Delta z(s) = z_{11}(s)z_{22}(s) - z_{12}(s)z_{21}(s)$

c) Relación de $[h(s)]$ con $[y(s)]$ ó $[z(s)]$

Del párrafo 15.4 se conocen las siguientes relaciones:

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (15.114)$$

y los parámetros $y(s)$ y $z(s)$ que cumplen con la condición $V_2(s) = 0$ son:

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (15.115)$$

$$y_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (15.116)$$

y es la Ec. (15.115) la que guarda relación inmediata con la Ec. (15.114), por lo cual:

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = \frac{1}{\left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}} = \frac{1}{y_{11}(s)} \quad (15.117)$$

y si además se tiene en cuenta el valor de $y_{11}(s)$ dado por la Ec. (15.110), la Ec. (15.117) puede escribirse como:

$$h_{11}(s) = \frac{1}{y_{11}(s)} = \frac{\Delta z(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.118)$$

por otra parte es:

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.119)$$

y en los parámetros $z(s)$ la condición $I_1(s) = 0$ se da para:

$$z_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.120)$$

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.121)$$

y es la Ec. (15.121) la que guarda relación inmediata con la Ec. (15.119), por lo cual:

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = \frac{1}{\left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0}} = \frac{1}{z_{22}(s)} \quad (15.122)$$

y si además se tiene en cuenta el valor de $z_{22}(s)$ dado por la Ec. (15.106), la Ec. (15.122) puede escribirse como:

$$h_{22}(s) = \frac{\Delta y(s)}{y_{11}(s)} = \frac{1}{z_{22}(s)} \quad (15.123)$$

por otro lado:

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.124)$$

y en los parámetros $z(s)$ la condición $I_1(s) = 0$ se muestran en las Ecs. (15.120) y (15.121), pero no guardan relación inmediata con la Ec. (15.124). Pero si se dividen miembro a miembro las ecuaciones anteriormente mencionadas resulta:

$$\frac{z_{12}(s)}{z_{22}(s)} = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} = h_{12}(s) \quad (15.125)$$

y si además se tienen en cuenta los valores de $z_{12}(s)$ y $z_{22}(s)$ dados por las Ecs. (15.104) y (15.106) la Ec. (15.125) puede escribirse como:

$$h_{12}(s) = - \frac{y_{12}(s)}{y_{11}(s)} = \frac{z_{12}(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.126)$$

Si finalmente se considera:

$$h_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (15.127)$$

y en los parámetros $y(s)$ la condición $V_2(s) = 0$ se muestran en las Ecs. (15.115) y (15.116); pero no guardan relación inmediata con la Ec. (15.127). Pero si se dividen miembro a miembro las ecuaciones anteriormente mencionadas resulta:

$$\frac{y_{21}(s)}{y_{11}(s)} = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} = h_{21}(s) \quad (15.128)$$

y si además se tienen en cuenta los valores de $y_{11}(s)$ e $y_{21}(s)$ dados por las Ecs. (15.110) y (15.112), la Ec. (15.128) puede escribirse como:

$$h_{21}(s) = \frac{y_{21}(s)}{y_{11}(s)} = - \frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.129)$$

d) Relación entre $[z(s)]$ y $[h(s)]$

Si se parte de la Ec. (15.121), resulta:

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.121)$$

y en los parámetros $h(s)$ la condición $I_1(s) = 0$ se da para los parámetros ya planteados en las siguientes ecuaciones:

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.119)$$

$$h_{12}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} \quad (15.124)$$

y es la Ec. (15.119) la que guarda relación inmediata con la Ec. (15.121), por lo cual:

$$z_{22}(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \Bigg|_{I_1(s)=0} = \frac{1}{\frac{I_2(s)}{V_2(s)} \Bigg|_{I_1(s)=0}} = \frac{1}{h_{22}(s)} \quad \therefore$$

$$z_{22}(s) = \frac{1}{h_{22}(s)} \quad (15.130)$$

El procedimiento para hallar $z_{11}(s)$ en función de los parámetros $h(s)$ difiere del empleado anteriormente, dado que estos últimos no contienen la condición $I_2(s) = 0$. En este caso es conveniente partir de las expresiones que ligan a los parámetros $h(s)$ con los $z(s)$, halladas en este párrafo, inciso c), y que se reproducen:

$$h_{11}(s) = \frac{\Delta z(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.118); \quad h_{22}(s) = \frac{1}{z_{22}(s)} \quad (15.123)$$

$$h_{12}(s) = \frac{z_{12}(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.126); \quad h_{21}(s) = -\frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (15.129)$$

reemplazando la Ec. (15.123) en la Ec. (15.118):

$$h_{11}(s) = h_{22}(s) \Delta z(s) \quad \therefore$$

$$\Delta z(s) = \frac{h_{11}(s)}{h_{22}(s)} = z_{11}(s) z_{22}(s) - z_{12}(s) z_{21}(s) \quad (15.131)$$

multiplicando entre sí las Ecs. (15.126) y (15.129):

$$h_{12}(s) h_{21}(s) = -\frac{z_{12}(s) z_{21}(s)}{(z_{22}(s))^2} \quad \therefore$$

$$-z_{12}(s) z_{21}(s) = h_{12}(s) h_{21}(s) (z_{22}(s))^2 \quad (15.132)$$

si en la Ec. (15.132) se introduce la Ec. (15.123):

$$-z_{12}(s) z_{21}(s) = \frac{h_{12}(s) h_{21}(s)}{(h_{22}(s))^2} \quad (15.133)$$

y reemplazando las Ecs. (15.133) y (15.123) en la Ec. (15.131) resulta:

$$\frac{h_{11}(s)}{h_{22}(s)} = z_{11}(s) \frac{1}{h_{22}(s)} + \frac{h_{12}(s) h_{21}(s)}{(h_{22}(s))^2} \therefore$$

$$\frac{z_{11}(s)}{h_{22}(s)} = \frac{h_{11}(s)}{h_{22}(s)} - \frac{h_{12}(s) h_{21}(s)}{(h_{22}(s))^2} \quad \text{por lo cual:}$$

$$z_{11}(s) = \frac{h_{11}(s) h_{22}(s) - h_{12}(s) h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \quad \text{y en consecuencia:}$$

$$z_{11}(s) = \frac{\Delta h(s)}{h_{22}(s)} \quad (15.134)$$

Por otra parte si se relacionan las Ecs. (15.126) y (15.123) resulta:

$$z_{12}(s) = \frac{h_{12}(s)}{h_{22}(s)} \quad (15.135)$$

Finalmente, relacionando las Ecs. (15.129) y (15.123) será:

$$z_{21}(s) = - \frac{h_{21}(s)}{h_{22}(s)} \quad (15.136)$$

e) Relación entre $\{y(s)\}$ y $\{h(s)\}$

Las relaciones que ligan a los parámetros $h(s)$ con los $y(s)$ fueron encontradas en este párrafo inciso c), y se reproducen a continuación:

$$h_{11}(s) = \frac{1}{y_{11}(s)} \quad (15.118); \quad h_{22}(s) = \frac{\Delta y(s)}{y_{11}(s)} \quad (15.123)$$

$$h_{12}(s) = - \frac{y_{12}(s)}{y_{11}(s)} \quad (15.126); \quad h_{21}(s) = \frac{y_{21}(s)}{y_{11}(s)} \quad (15.129)$$

De la Ec. (15.118) es evidente que:

$$y_{11}(s) = \frac{1}{h_{11}(s)} \quad (15.137)$$

por otro lado, si se relacionan las Ecs. (15.118) y (15.126) resulta:

$$y_{12}(s) = - \frac{h_{12}(s)}{h_{11}(s)} \quad (15.138)$$

Si además se relacionan las Ecs. (15.118) y (15.129) surge que:

$$y_{21}(s) = \frac{h_{21}(s)}{h_{11}(s)} \quad (15.139)$$

Para hallar $y_{22}(s)$ en función de los parámetros $h(s)$ debe cambiarse el procedimiento, debido a que dicha relación no es inmediata. Vinculando las Ecs. (15.123) y (15.118), será:

$$\frac{h_{22}(s)}{h_{11}(s)} = \Delta y(s) = y_{11}(s) y_{22}(s) - y_{12}(s) y_{21}(s) \quad (15.140)$$

Si por otro lado se multiplican entre si las Ecs. (15.126) y (15.129) surge que:

$$h_{12}(s) h_{21}(s) = - \frac{y_{12}(s) y_{21}(s)}{(y_{11}(s))^2} \quad \therefore$$

$$-y_{12}(s) y_{21}(s) = h_{12}(s) h_{21}(s) (y_{11}(s))^2 \quad (15.141)$$

en base a la Ec. (15.118), la Ec. (15.141) resulta:

$$-y_{12}(s) y_{21}(s) = \frac{h_{12}(s) h_{21}(s)}{(h_{11}(s))^2} \quad (15.142)$$

Si en la Ec. (15.140) se reemplazan las Ecs. (15.142) y (15.118) se llega a:

$$\frac{h_{22}(s)}{h_{11}(s)} = \frac{1}{h_{11}(s)} y_{22}(s) + \frac{h_{12}(s) h_{21}(s)}{(h_{11}(s))^2} \therefore$$

$$y_{22}(s) = \frac{h_{11}(s) h_{22}(s) - h_{12}(s) h_{21}(s)}{h_{11}(s)} \quad \text{por lo cual:}$$

$$y_{22}(s) = \frac{\Delta h(s)}{h_{11}(s)} \quad (15.143)$$

f) Relación entre $[\gamma(s)]$ con $[z(s)]$; $[y(s)]$ y $[h(s)]$

En el párrafo (15.4) se encontró que:

$$A(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (15.144); \quad B(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (15.145)$$

$$C(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (15.146); \quad D(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{\dot{V}_2(s)=0} \quad (15.147)$$

Si en primer lugar se buscan las equivalencias para $A(s)$, los parámetros de $z(s)$ que cumplen con la condición $I_2(s) = 0$ son:

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (15.148); \quad z_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (15.149)$$

Si se relacionan las Ecs. (15.148), (15.149) y (15.144) resulta:

$$\frac{z_{11}(s)}{z_{21}(s)} = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} = A(s) \quad (15.150)$$

En la Ec. (15.150) se reemplazan las Ecs. (15.103) y (15.105) y surge que:

$$A(s) = - \frac{y_{22}(s)}{y_{21}(s)} \quad (15.151)$$

Si en la Ec. (15.150) se reemplazan las Ecs. (15.134) y (15.136) resulta:

$$A(s) = - \frac{\Delta h(s)}{h_{21}(s)} \quad (15.152)$$

Con el objeto de encontrar las equivalencias para $B(s)$, es conveniente plantear los parámetros de $z(s)$ que cumplen con la condición $V_2(s) = 0$ que son:

$$y_{11}(s) = \frac{i_1(s)}{V_1(s)} \Bigg|_{V_2(s)=0} \quad (15.115); \quad y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \Bigg|_{V_2(s)=0} \quad (15.116)$$

Relacionando las Ecs. (15.145) y (15.116) surge que:

$$B(s) = - \frac{1}{y_{21}(s)} \quad (15.153)$$

y si se reemplazan las Ecs. (15.112) y (15.139) en la Ec. (15.153) resulta:

$$B(s) = \frac{\Delta z(s)}{z_{21}(s)} = - \frac{h_{11}(s)}{h_{21}(s)} \quad (15.154)$$

Buscando las equivalencias para $C(s)$ es oportuno plantear los parámetros de $z(s)$ que cumplen con la condición $I_2(s) = 0$ que son los dados por las Ecs. (15.148) y (15.149).

Relacionando las Ecs. (15.149) y (15.146) se verifica que:

$$C(s) = \frac{1}{z_{21}(s)} \quad (15.155)$$

y si se reemplazan en la Ec. (15.155) las Ecs. (15.105) y (15.136) se encuentra que:

$$C(s) = - \frac{\Delta y(s)}{y_{21}(s)} = - \frac{h_{22}(s)}{h_{21}(s)} \quad (15.156)$$

↓ A Desde	[z]	[y]	[h]	[γ]	[g]
[z]	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{22} & y_{12} \\ \Delta y & \Delta y \\ -y_{21} & y_{11} \\ \Delta y & \Delta y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta h & h_{12} \\ h_{22} & h_{22} \\ -h_{21} & 1 \\ h_{22} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & \Delta y \\ C & C \\ 1 & D \\ C & C \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & g_{12} \\ g_{11} & g_{11} \\ g_{21} & \Delta g \\ g_{11} & g_{11} \end{matrix}$
[y]	$\begin{matrix} z_{22} & z_{12} \\ \Delta z & \Delta z \\ z_{21} & z_{11} \\ \Delta z & \Delta z \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -h_{12} \\ h_{11} & -h_{11} \\ h_{21} & \Delta h \\ h_{11} & h_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} D & \Delta y \\ B & -B \\ 1 & A \\ B & B \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta g & g_{12} \\ g_{22} & g_{22} \\ g_{21} & 1 \\ g_{22} & g_{22} \end{matrix}$
[h]	$\begin{matrix} \Delta z & z_{12} \\ z_{22} & z_{22} \\ z_{21} & 1 \\ z_{22} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -y_{12} \\ y_{11} & y_{11} \\ y_{21} & \Delta y \\ y_{11} & y_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B & \Delta y \\ D & D \\ 1 & C \\ D & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{22} & g_{12} \\ \Delta g & \Delta g \\ g_{21} & g_{11} \\ \Delta g & \Delta g \end{matrix}$
[γ]	$\begin{matrix} z_{11} & \Delta z \\ z_{21} & z_{21} \\ 1 & z_{22} \\ z_{21} & z_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -y_{22} & 1 \\ y_{21} & -y_{21} \\ \Delta y & y_{13} \\ y_{21} & y_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta h & -h_{21} \\ h_{21} & -h_{21} \\ h_{22} & 1 \\ h_{21} & h_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & g_{22} \\ g_{21} & g_{21} \\ g_{11} & \Delta g \\ g_{21} & g_{21} \end{matrix}$
[g]	$\begin{matrix} z_{12} & z_{12} \\ z_{11} & z_{11} \\ z_{21} & \Delta z \\ z_{11} & z_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta y & y_{12} \\ y_{22} & y_{22} \\ -y_{21} & 1 \\ -y_{22} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{22} & h_{12} \\ \Delta h & \Delta h \\ -h_{21} & h_{11} \\ \Delta h & \Delta h \end{matrix}$	$\begin{matrix} C & \Delta y \\ A & A \\ 1 & B \\ A & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$

Fig. 15.18

Por último, para hallar las equivalencias respecto de $D(s)$, de todos los parámetros que cumplen con la condición $V_2(s) = 0$ es conveniente elegir:

$$h_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s) = 0} \quad (15.127)$$

Relacionando las Ecs. (15.147) y (15.127) surge que:

$$D(s) = - \frac{1}{h_{21}(s)} \quad (15.157)$$

y si se reemplaza en la Ec. (15.157), la Ec. (15.129) resulta:

$$D(s) = - \frac{y_{11}(s)}{y_{21}(s)} = \frac{z_{22}(s)}{z_{21}(s)} \quad (15.158)$$

Por procedimientos similares a los descriptos pueden encontrarse las relaciones faltantes entre los parámetros correspondientes a las distintas matrices. En la Fig. 15.18 se muestran las equivalencias entre todos los parámetros.

15.11 Circuitos equivalentes del cuadripolo

15.11.1) **Introducción:** Antes de desarrollar este tema, es importante destacar que sólo pueden ser estudiados en la forma expuesta los cuadripolos lineales. En consecuencia, cuando se debe extender dicha teoría a los circuitos con elementos alineales, es necesario reemplazar la característica tensión-corriente de éstos por características segmento lineales, y a los elementos por modelos circuitales linealizados. Estos modelos sólo valen para un entorno limitado alrededor del punto de funcionamiento elegido, debiendo trabajarse con incrementos de tensión y corriente, por lo que se los llama "incrementales". Al construir los modelos circuitales equivalentes del cuadripolo, ya sean incrementales o totales aparecen nuevos elementos de circuito que se conocen en forma genérica como "generadores controlados". Aunque esta designación no es adecuada, pues en rigor se trata de elementos pasivos, se mantendrá debido a que su uso está muy extendido. Pueden definirse cuatro tipos de generadores controlados:

a) **AMPLIFICADOR IDEAL DE TENSION:** Es un dispositivo que impone entre dos puntos de un circuito una diferencia de potencial igual a A_v ,

veces la tensión existente entre otros dos puntos del mismo. Su símbolo es el mostrado en la Fig. 15.19.a).

- b) **AMPLIFICADOR IDEAL DE CORRIENTE:** Es un dispositivo que impone en una rama de un circuito una corriente igual a A_I veces la existente en otra rama del mismo. El símbolo se muestra en la Fig. 15.19.b).

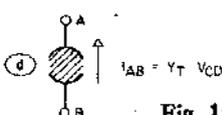
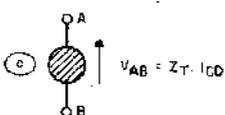
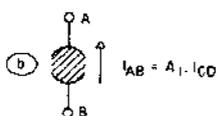
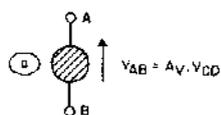


Fig. 15.19

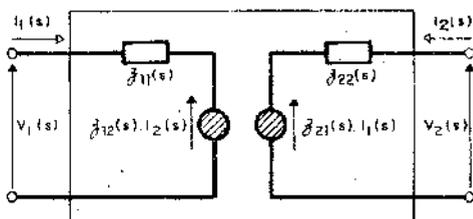


Fig. 15.20

- c) **TRASFERIDOR IDEAL CONTROLADO POR CORRIENTE:** Es un dispositivo que impone entre dos puntos de un circuito una tensión proporcional a la corriente que circula por otra rama del mismo. El símbolo es mostrado en la Fig. 15.19.c).

- d) **TRASFERIDOR IDEAL CONTROLADO POR TENSION:** Es un dispositivo que impone en una rama de un circuito una corriente proporcional a la tensión entre otros dos puntos del mismo. En la Fig. 15.19.d). se muestra el símbolo correspondiente.

Nótese que en rigor los generadores controlados no son elementos de dos terminales, pues relacionan la tensión o la corriente en un par de terminales A y B con la tensión o la corriente en otro par de terminales C y D .

Se encontrarán a continuación, algunos de los posibles circuitos equivalentes para el cuadripolo con dos generadores controlados, o bien con uno.

15.11.2) Circuitos equivalentes con dos generadores controlados: Considérese en primer lugar las ecuaciones correspondientes a la familia de *parámetros impedancia* ya halladas:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

Es evidente, que si se tiene en cuenta la segunda regla de Kirchhoff, el modelo circuitual idealizado que corresponde al sistema dado por la Ec. (15.19) es el que se ilustra en la Fig. 15.20.

Si por ejemplo se analiza la ecuación para la malla de entrada, es claro que si el primer miembro tiene dimensiones de tensión, el segundo también. En particular el primer término del segundo miembro representa la tensión entre extremos de una impedancia $z_{11}(s)$ por la que circula la corriente $I_1(s)$. El segundo término representa al llamado *trasferidor ideal de tensión*, controlado por la corriente de salida. Por razonamiento análogo se construye la malla de salida.

Si en segundo lugar se consideran las ecuaciones correspondientes a la familia de *parámetros admitancia*, que se reproduce:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

teniendo en cuenta la primera regla de Kirchhoff y por razonamiento similar al realizado para la primera familia se llega al circuito equivalente mostrado en la Fig. 15.21. En este caso $y_{12}(s) V_2(s)$ es un *trasferidor ideal de corriente* controlado por la tensión de salida, e $y_{21}(s) V_1(s)$ un *trasferidor ideal de corriente* controlado por la tensión de entrada.

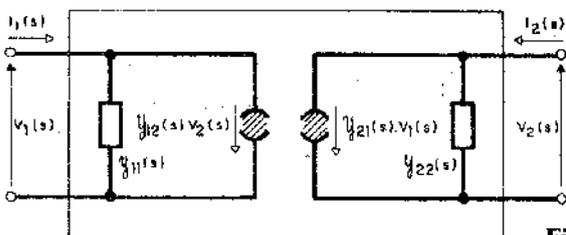


Fig. 15.21

Considérese, en tercer lugar, las ecuaciones correspondientes a la familia de *parámetros híbridos*, que se reproduce:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= h_{11}(s) I_1(s) + h_{12}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= h_{21}(s) I_1(s) + h_{22}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

y por procedimiento similar al realizado anteriormente se llega al circuito equivalente ilustrado en la Fig. 15.22. En este caso $h_{21}(s) V_2(s)$ es un amplificador ideal de tensión controlado por la tensión de salida y $h_{21}(s) I_1(s)$ un amplificador ideal de corriente controlado por la corriente de entrada.

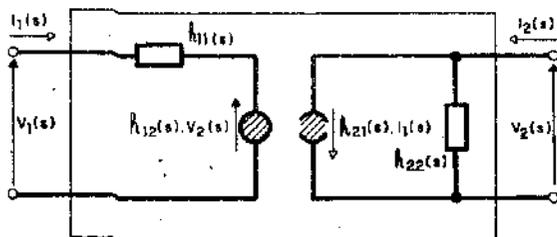


Fig. 15.22

Por último, se tendrán en cuenta las ecuaciones correspondientes a la familia de *parámetros g(s)*, que se reproduce:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= g_{11}(s) V_1(s) + g_{12}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= g_{21}(s) V_1(s) + g_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.47)$$

que por razonamiento análogo se arriba al circuito equivalente mostrado en la Fig. 15.23. En la misma $g_{12}(s) I_2(s)$ es un amplificador ideal de corriente

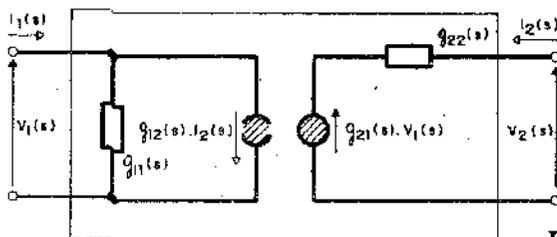


Fig. 15.23

controlado por la corriente de salida y $g_{12}(s) V_1(s)$ un amplificador ideal de tensión controlado por la tensión de entrada.

No se describe el circuito equivalente para la familia correspondiente a los *parámetros transmisión* pues no es normalmente empleado.

Es oportuno ahora ampliar lo referente a los generadores controlados. Como se desprende del análisis anterior, dichos elementos imponen una corriente o una tensión en una parte del circuito, siendo la variable impuesta controlada o dependiente de la corriente o la tensión en otra parte del esquema eléctrico. Se emplearon los mismos símbolos que para los generadores de tensión y corriente, pero sombreados en su interior para diferenciarlos de aquéllos. Se insiste en que la denominación de generadores controlados no es adecuada dado que en realidad es un dispositivo de tres o cuatro terminales y no de dos como lo indica su símbolo. Por otra parte, su impedancia interna puede no resultar nula o infinita como en el caso de los generadores ideales de tensión o corriente estudiados hasta el presente, llamados también generadores independientes. Finalmente, si se aplican las definiciones de circuitos pasivos propuestas en el Cap. 1, se observa que estos elementos *son en realidad pasivos*, por lo cual resulta inadecuada la denominación de activos que en la literatura técnica se le asigna a los circuitos que incluyen este tipo de elementos. Por ejemplo, al realizar el modelo circuitual idealizado de un amplificador transistorizado, aparecen estos generadores controlados, y de allí que incorrectamente se los denomine activos, dado que en realidad los elementos activos que poseen dichos circuitos son la excitación y eventualmente, la fuente de alimentación.

15.11.3) **Circuitos equivalentes con un transferidor ideal:** Los circuitos equivalentes con un solo transferidor ideal pueden obtenerse efectuando combinaciones lineales entre las ecuaciones de una familia de parámetros. Los dos circuitos típicos son el "T" y el "II"

Circuito equivalente "T"

Teniendo en cuenta las ecuaciones correspondientes a la familia de parámetros impedancia ya hallada y que se reproduce:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

nada se alterará si en la ecuación correspondiente a $V_1(s)$ se le suma y resta $z_{12}(s) I_1(s)$ y en la correspondiente a $V_2(s)$ se le suma y resta $z_{12}(s) (I_1(s) + I_2(s))$ resultando en consecuencia:

$$V_1(s) = z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) + z_{12}(s) I_1(s) - z_{12}(s) I_1(s)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) + z_{12}(s) (I_1(s) + I_2(s)) -$$

$$- z_{12}(s) (I_1(s) + I_2(s))$$

agrupando convenientemente:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= (z_{11}(s) - z_{12}(s)) I_1(s) + z_{12}(s) (I_1(s) + I_2(s)) \\ V_2(s) &= (z_{21}(s) - z_{12}(s)) I_1(s) + (z_{22}(s) - z_{12}(s)) I_2(s) + \\ &+ z_{12}(s) (I_1(s) + I_2(s)) \end{aligned} \right\} \quad (15.159)$$

teniendo en cuenta la segunda regla de Kirchoff, el modelo circuital idealizado que corresponde al sistema dado por la Ec. (15.159) es el que se ilustra en la Fig. 15.24. En la misma $(z_{21}(s) - z_{12}(s)) I_1(s)$ es un trasferidor ideal de tensión controlado por la corriente de entrada. Nótese que si $z_{12}(s) = z_{21}(s)$, se anula la tensión del trasferidor y sólo quedan tres impedancias, resultando explicitado el carácter pasivo y bilateral del cuadripolo, el que satisface el teorema de reciprocidad. Obsérvese que sin embargo, en la Fig. 15.20 siguen existiendo dos trasferidores ideales. Esto muestra que la presencia de "generadores" controlados no implica que el cuadripolo sea activo. En efecto, el desarrollo de este capítulo es aplicado sólo a los cuadripolos lineales y pasivos, pudiendo incluir generadores controlados pero no generadores independientes.

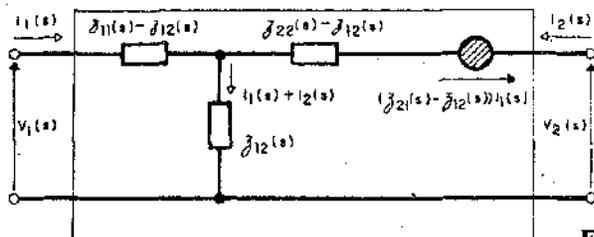


Fig. 15.24

Circuito equivalente "II"

Se parte de las ecuaciones correspondientes a la familia de parámetros admittancia ya hallada:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

nada se altera si en la ecuación correspondiente a $I_1(s)$ se le suma y resta $y_{12}(s) V_1(s)$ y en la correspondiente a $I_2(s)$ se le suma y resta $y_{12}(s) (V_1(s) - V_2(s))$ resultando en consecuencia:

$$I_1(s) = y_{11}(s) V_1(s) + y_{12}(s) V_2(s) + y_{12}(s) V_1(s) - y_{12}(s) V_1(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) V_1(s) + y_{22}(s) V_2(s) + y_{12}(s) (V_1(s) - V_2(s)) - y_{12}(s) (V_1(s) - V_2(s))$$

agrupando convenientemente:

$$\left. \begin{aligned} I_1(s) &= (y_{11}(s) + y_{12}(s)) V_1(s) + y_{12}(s) (V_2(s) - V_1(s)) \\ I_2(s) &= (y_{21}(s) - y_{12}(s)) V_1(s) + (y_{22}(s) + y_{12}(s)) V_2(s) + \\ &+ y_{12}(s) (V_1(s) - V_2(s)) \end{aligned} \right\} \quad (15.160)$$

considerando ahora la primera regla de Kirchhoff, el modelo circuital idealizado que corresponde al sistema dado por la Ec. (15.160) es el que se muestra en la Fig. 15.25. En la misma $(y_{21}(s) - y_{12}(s)) V_1(s)$ es un transferidor, ideal de corriente controlado por la tensión de entrada, que se anula si los parámetros de transferencia son iguales, esto es, si el cuadripolo satisface el teorema de reciprocidad.

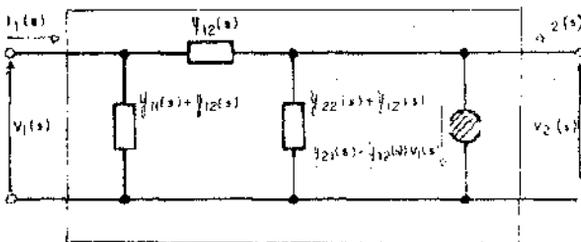


Fig. 15.25

15.12 Equivalencia de cuadripolos

Se dice que dos cuadripolos son equivalentes cuando las matrices características de una cierta familia de parámetros, tienen el mismo valor para ambos cuadripolos.

Nótese que aquí la definición es más amplia que para la equivalencia de dipolos, que como poseen un solo par de terminales, basta sólo con la igualdad de un parámetro.

En particular, es objeto de este parágrafo calcular las impedancias de un circuito "T" y de un circuito "II" equivalentes a un cuadripolo dado en función de los parámetros medibles físicamente en los terminales de entrada y salida.

Dado un cuadripolo, como se ilustra en la Fig. 15.26, es sabido que en los terminales de entrada pueden medirse:

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}; \quad y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0};$$

$$h_{11}(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}$$

y en los terminales de salida:

$$z_{22}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0}; \quad y_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{V_1(s)=0}$$

$$h_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_2(s)} \right|_{I_1(s)=0}$$

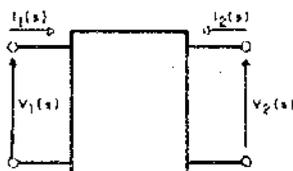


Fig. 15.26

En base a lo expresado anteriormente y eligiendo a tres parámetros se procede a:

a) Cálculo de las impedancias del circuito equivalente "T"

Para el cuadripolo equivalente en T mostrado en la Fig. 15.27, por simple inspección resulta:

$$z_{11}(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \quad (15.161)$$

$$h_{11}(s) = Z_1(s) + \frac{Z_2(s) Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)} \quad (15.162)$$

$$z_{22}(s) = Z_2(s) + Z_3(s) \quad (15.163)$$

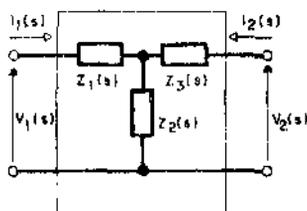


Fig. 15.27

de las Ecs. (15.161) y (15.163) se deduce que:

$$Z_1(s) = z_{11}(s) - Z_2(s) \quad (15.164)$$

$$Z_3(s) = z_{22}(s) - Z_2(s) \quad (15.165)$$

reemplazando las Ecs. (15.164) y (15.165) en la Ec. (15.162) se tiene que:

$$h_{11}(s) = (z_{11}(s) - Z_2(s)) + \frac{Z_2(s) (z_{22}(s) - Z_2(s))}{Z_2(s) + z_{22}(s) - Z_2(s)}$$

operando con la expresión anterior:

$$[h_{11}(s) - (z_{11}(s) - Z_2(s))] z_{22}(s) = Z_2(s) z_{22}(s) - Z_2^2(s)$$

efectuando el producto indicado y simplificando:

$$h_{11}(s) z_{22}(s) - z_{11}(s) z_{22}(s) = -Z_2^2(s) \therefore$$

$$Z_2(s) = \sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))} \quad (15.166)$$

reemplazando la Ec. (15.166) en las Ecs. (15.164) y (15.165), resulta:

$$Z_1(s) = z_{11}(s) - \sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))} \quad (15.167)$$

$$Z_3(s) = z_{22}(s) - \sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))} \quad (15.168)$$

Las Ecs. (15.166), (15.167) y (15.168) permiten calcular las impedancias de un circuito T equivalente a un cuadripolo dado en función de parámetros medibles físicamente.

b) Cálculo de las impedancias del circuito equivalente π .

Para el cuadripolo equivalente en II ilustrado en la Fig. 15.28, por simple inspección resulta:

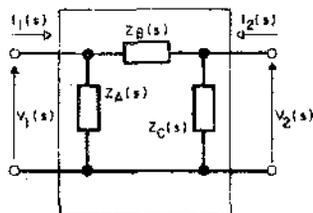


Fig. 15.28

$$z_{11}(s) = \frac{Z_A(s) (Z_B(s) + Z_C(s))}{Z_A(s) + Z_B(s) + Z_C(s)} \quad (15.169)$$

$$h_{11}(s) = \frac{Z_A(s) Z_B(s)}{Z_A(s) + Z_B(s)} \quad (15.170)$$

$$z_{22}(s) = \frac{Z_C(s) (Z_B(s) + Z_A(s))}{Z_A(s) + Z_B(s) + Z_C(s)} \quad (15.171)$$

Operando con las ecuaciones anteriores se demuestra que:

$$Z_C(s) = \frac{h_{11}(s) z_{22}(s)}{\sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))}} \quad (15.172)$$

$$Z_A(s) = \frac{h_{11}(s) z_{22}(s)}{z_{22}(s) - \sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))}} \quad (15.173)$$

$$Z_B(s) = \frac{h_{11}(s) z_{22}(s)}{z_{11}(s) - \sqrt{z_{22}(s) (z_{11}(s) - h_{11}(s))}} \quad (15.174)$$

Las Ecs. (15.172), (15.173) y (15.174) permiten calcular las impedancias de un circuito π equivalente a un cuadripolo dado en función de parámetros medibles físicamente.

Es de hacer notar, que para las dos equivalencias analizadas, matemáticamente siempre es posible su realización, pero a veces puede resultar físicamente irrealizable el equivalente debido a la aparición de resistencias negativas, como ya se vio para la transformación estrella triángulo en el Cap. 14, problema 14.11.7).

Por otra parte, como se desprende de la definición de equivalencia de cuadripolos enunciada al principio de este párrafo, los dos circuitos equivalentes hallados serán iguales entre sí cuando por ejemplo:

$$[z(s)]_T = [z(s)]_\pi \quad \text{o bien} \quad [y(s)]_T = [y(s)]_\pi$$

y si se aplican estas igualdades matriciales para los circuitos "T" y " π " se obtienen las fórmulas de transformación estrella-triángulo, también conocidas como fórmulas de transformación de Kennelly analizadas en el Cap. 14, párrafo 14.9.

15.13 Impedancias de entrada y salida en condiciones normales de funcionamiento

A presente, se han calculado las impedancias de entrada y salida de un cuadripolo en condiciones límites, es decir con un par de terminales a circuito abierto o bien cortocircuitados. Pero es de hacer notar que los cuadripolos se encuentran normalmente conectados como se indica en la Fig. 15.29. En la misma $V_g(s)$ y $Z_g(s)$ representan en conjunto a un generador real de tensión, y $Z_C(s)$ a una impedancia de carga. Este caso típico se presenta en electrónica al estudiar, por ejemplo, a los circuitos amplificadores.

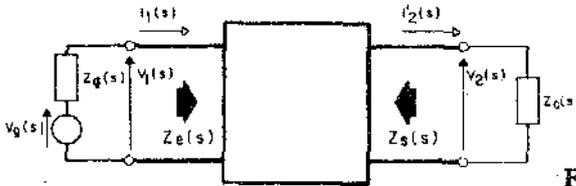


Fig. 15.29

a) Cálculo de la expresión de la impedancia de entrada $Z_e(s)$

La impedancia de entrada al cuadripolo es el cociente entre los valores de tensión y corriente en los terminales de entrada del mismo, o sea de la impedancia que presenta al generador real de tensión. La misma puede encontrarse a partir de las ecuaciones correspondientes a la familia de parámetros transmisión ya hallada que se reproduce:

$$\left. \begin{aligned} V_1(s) &= A(s) V_2(s) + B(s) I_2'(s) \\ I_1(s) &= C(s) V_2(s) + D(s) I_2'(s) \end{aligned} \right\} \quad (15.40)$$

efectuando el cociente entre ambas ecuaciones se ve que:

$$\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = Z_e(s) = \frac{A(s) V_2(s) + B(s) I_2'(s)}{C(s) V_2(s) + D(s) I_2'(s)} \quad (15.175)$$

dividiendo numerador y denominador de la Ec. (15.175) por $I_2'(s)$ y teniendo en cuenta que $\frac{V_2(s)}{I_2'(s)} = Z_C(s)$ resulta:

$$Z_e(s) = \frac{A(s) Z_C(s) + B(s)}{C(s) Z_C(s) + D(s)} \quad (15.176)$$

La Ec. (15.176) permite calcular el valor de la impedancia de entrada al cuádrupolo en función de los parámetros transmisión. En la misma se observa como se refleja la impedancia de carga sobre los bornes de entrada del cuádrupolo.

b) Cálculo de la expresión de la impedancia de salida $Z_S(s)$

La impedancia de salida del cuádrupolo resulta del cociente entre los valores de tensión y corriente en los terminales de salida del mismo, con el generador excitador conectado a la entrada desactivado, o sea la impedancia que presenta el cuádrupolo a la carga. La misma puede hallarse a partir de la Ec. (15.40) expresada en forma matricial, ya hallada y que se reproduce:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (15.41)$$

despejando de la Ec. (15.41) $V_2(s)$ e $I_2(s)$:

$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(s) & B(s) \\ I_1(s) & D(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{vmatrix}} = \frac{V_1(s) D(s) - I_1(s) B(s)}{A(s) D(s) - C(s) B(s)} \quad (15.177)$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} A(s) & V_1(s) \\ C(s) & I_1(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{vmatrix}} = \frac{A(s) I_1(s) - C(s) V_1(s)}{A(s) D(s) - C(s) B(s)} \quad (15.178)$$

$$\text{dado que: } Z_S(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = - \frac{V_2(s)}{I_2(s)}$$

efectuando el cociente entre las Ecs. (15.177) y (15.178) se tiene:

$$Z_S(s) = - \frac{V_1(s) D(s) - I_1(s) B(s)}{A(s) I_1(s) - C(s) V_1(s)} \quad (15.179)$$

dividiendo numerador y denominador de la Ec. (15.179) por $I_1(s)$, operando, y teniendo en cuenta que, $-\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = Z_g(s)$, cuando el generador V_g ha sido desactivado, resulta:

$$Z_S(s) = \frac{D(s) Z_g(s) + B(s)}{C(s) Z_g(s) + A(s)} \quad (15.180)$$

La Ec. (15.180) permite calcular el valor de la impedancia de salida del cuádrupolo en función de los parámetros transmisión. Obsérvese en la misma el reflejo de la impedancia del generador sobre los bornes de salida del cuádrupolo.

15.14 Impedancias iterativas, imagen y característica

a) Impedancia iterativa

La impedancia iterativa de un cuádrupolo es la impedancia que, conectada en un par de terminales, produce una impedancia igual en el otro par.

Más específicamente, se denomina impedancia iterativa de entrada, o en el sentido progresivo de la señal, $Z_{i1}(s)$ al valor de impedancia que debe conectarse en los terminales de salida, $Z_C(s)$, para que se refleje en los terminales de entrada, $Z_e(s)$, ese mismo valor de impedancia, es decir:

$$Z_e(s) = Z_{i1}(s) = Z_C(s) \quad (15.181)$$

Con el objeto de encontrar la expresión de esta impedancia se reemplaza la condición dada por la Ec. (15.181) en la Ec. (15.176), resultando:

$$Z_{i1}(s) = \frac{A(s) Z_{i1}(s) + B(s)}{C(s) Z_{i1}(s) + D(s)}$$

por lo cual:

$$C(s) Z_{i1}^2(s) + D(s) Z_{i1}(s) - A(s) Z_{i1}(s) - B(s) = 0 \therefore$$

$$Z_{i1}^2(s) + \frac{(D(s) - A(s))}{C(s)} Z_{i1}(s) - \frac{B(s)}{C} = 0 \text{ en consecuencia,}$$

$$Z_{i1}(s) = \frac{A(s) - D(s)}{2C(s)} \pm \sqrt{\left(\frac{A(s) - D(s)}{2C(s)}\right)^2 + \frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.182)$$

Por otro lado, se denomina impedancia iterativa de salida, o en el sentido regresivo de la señal, $Z_{i2}(s)$, al valor de impedancia que debe conectarse en los terminales de entrada, $Z_g(s)$, para que se refleje en los terminales de salida, $Z_S(s)$, ese mismo valor de impedancia, es decir:

$$Z_S(s) = Z_{i2}(s) = Z_g(s) \quad (15.183)$$

Con el propósito de hallar la expresión de esta impedancia se reemplaza la condición dada por la Ec. (15.183) en la Ec. (15.180), resultando:

$$Z_{i2}(s) = \frac{D(s) Z_{i2}(s) + B(s)}{C(s) Z_{i2}(s) + A(s)}$$

y despejando $Z_{i2}(s)$ surge que:

$$Z_{i2}(s) = \frac{D(s) - A(s)}{2 C(s)} \pm \sqrt{\left(\frac{D(s) - A(s)}{2 C(s)}\right)^2 + \frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.184)$$

De las Ecs. (15.182) y (15.184) se desprende que las impedancias iterativas dependen sólo de los parámetros del cuadripolo.

b) Impedancia imagen

Se denominan impedancias imágenes $Z_{I1}(s)$ y $Z_{I2}(s)$ a dos valores de impedancias tales que si en extremo 1 se carga con $Z_{I1}(s)$ la impedancia de entrada en el extremo 2 es $Z_{I2}(s)$; mientras que si en el extremo 2 se carga con $Z_{I2}(s)$ la impedancia de entrada en el extremo 1 es $Z_{I1}(s)$.

Aplicando la definición a las Ecs. (15.176) y (15.180), resulta:

$$Z_{I1}(s) = \frac{A(s) Z_{I2}(s) + B(s)}{C(s) Z_{I2}(s) + D(s)} \quad y$$

$$Z_{I2}(s) = \frac{D(s) Z_{I1}(s) + B(s)}{C(s) Z_{I1}(s) + A(s)}$$

operando con las dos ecuaciones anteriores resulta:

$$C(s) Z_{I1}(s) Z_{I2}(s) + D(s) Z_{I1}(s) - A(s) Z_{I2}(s) - B(s) = 0 \quad (15.185)$$

$$C(s) Z_{I1}(s) Z_{I2}(s) + A(s) Z_{I2}(s) - D(s) Z_{I1}(s) - B(s) = 0 \quad (15.186)$$

restando miembro a miembro las Ecs. (15.185) y (15.186)

$$D(s) Z_{I1}(s) - A(s) Z_{I2}(s) - A(s) Z_{I2}(s) + D(s) Z_{I1}(s) = 0 \therefore$$

$$Z_{I1}(s) = \frac{A(s)}{D(s)} Z_{I2}(s) \quad (15.187)$$

Si ahora se suman las Ecs. (15.185) y (15.186) vemos que:

$$2C(s) Z_{I1}(s) Z_{I2}(s) - 2B(s) = 0 \therefore$$

$$Z_{I1}(s) Z_{I2}(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \quad (15.188)$$

reemplazando la Ec. (15.187) en la Ec. (15.188) y operando:

$$Z_{I2}(s) = \sqrt{\frac{B(s) D(s)}{A(s) C(s)}} \quad (15.189)$$

despejando $Z_{I2}(s)$ de la Ec. (15.187), reemplazándola en la Ec. (15.188) y operando, resulta:

$$Z_{I1}(s) = \sqrt{\frac{B(s) A(s)}{D(s) C(s)}} \quad (15.190)$$

Las Ecs. (15.189) y (15.190) indican que las impedancias imágenes dependen sólo de los parámetros del cuadripolo.

c) Impedancia característica

Es de práctica normal conectar varios cuadripolos en cascada y con el objeto de lograr la máxima transferencia de energía se impone la igualación de impedancias entre la salida de uno y la entrada de otro. Generalmente, los tipos de cuadripolos que se emplean son, además de lineales y pasivos, bilaterales y simétricos, lo que se traduce, según se ve a continuación, en la aparición de un nuevo concepto.

De acuerdo a la Ec. (15.41), el determinante de la matriz transmisión es:

$$\begin{vmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{vmatrix} = A(s) D(s) - B(s) C(s) \quad (15.191)$$

expresando los parámetros transmisión en función de los parámetros impedancia según las Ecs. (15.150), (15.154), (15.155) y (15.158) resulta que:

$$A(s) D(s) - B(s) C(s) = \frac{z_{11}(s) z_{22}(s)}{z_{21}(s) z_{21}(s)} - \frac{z_{11}(s) z_{22}(s) - z_{12}(s) z_{21}(s)}{z_{21}(s)} \frac{1}{z_{21}(s)}$$

y operando con la expresión anterior surge:

$$|\gamma(s)| = \frac{z_{12}(s)}{z_{21}(s)} \quad (15.192)$$

De la Ec. (15.192) se desprende que al ser el cuadripolo pasivo y bilateral y por lo tanto cumplirse que $z_{12}(s) = z_{21}(s)$ será $|\gamma(s)| = 1$.

Por otra parte, si además es simétrico también se cumple que $z_{11}(s) = z_{22}(s)$, y según las Ecs. (15.150) y (15.188) se cumplirá que $A(s) = D(s)$. Y si bajo estas imposiciones se revisan las Ecs. (15.182), (15.184), (15.189) y (15.190) se observa que todas adoptan el mismo valor.

Por lo tanto, si el cuadripolo es pasivo, bilateral y simétrico las impedancias iterativas e imágenes son iguales y reciben la denominación especial de impedancia característica $Z_0(s)$

En virtud de lo anteriormente expresado su valor será:

$$Z_0(s) = Z_c(s) = Z_g(s) = Z_e(s) = Z_s(s) = Z_l(s) = Z_l(s) = \sqrt{\frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.193)$$

Nótese que el resultado obtenido no es el mismo que el encontrado en el Cap. 14, párrafo 14.7, y sólo coinciden en el caso que la impedancia característica sea resistiva pura.

La Ec. (15.193) da la forma de cálculo de la impedancia característica en función de los parámetros transmisión.

Es útil, también disponer de una expresión de cálculo para $Z_0(s)$ en función de los parámetros medibles desde los terminales del cuadripolo. Con el

objeto de encontrar dicha expresión, se parte considerando la Ec. (15.176) que se reproduce:

$$Z_e(s) = \frac{A(s) Z_c(s) + B(s)}{C(s) Z_c(s) + D(s)} \quad (15.176)$$

Si en la Ec. (15.176) se hace $Z_c(s) = 0$ se halla la impedancia de entrada con la salida en cortocircuito, que se denomina $Z_{ecc}(s)$, y teniendo en cuenta la Ec. (15.29) resulta:

$$Z_{ecc}(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = h_{11}(s) \therefore B(s) = h_{11}(s) D(s) \quad (15.194)$$

Además, si en la Ec. (15.176) se hace que $Z_c(s) \rightarrow \infty$, se halla la impedancia de entrada con la salida a circuito abierto, que se denomina $Z_{eca}(s)$, y teniendo en cuenta la Ec. (15.15) resulta:

$$Z_{eca}(s) = \frac{A(s)}{C(s)} = z_{11}(s) \therefore C(s) = \frac{A(s)}{z_{11}(s)} \quad (15.195)$$

reemplazando las Ecs. (15.194) y (15.195) en la Ec. (15.193), y teniendo en cuenta que $A(s) = D(s)$ para el caso en análisis se encuentra que:

$$Z_0(s) = \sqrt{h_{11}(s) z_{11}(s)} \quad (15.196)$$

La Ec. (15.196) da la forma de cálculo de la impedancia característica en función de parámetros medibles directamente en los terminales de entrada.

15.15 Constantes de propagación, atenuación y fase

Es muy común en electrónica, y más específicamente en sistemas telefónicos conectar cuadripolos en cascada que resultan ser pasivos y simétricos. El circuito de la Fig. 15.29 puede pensarse como una equivalencia del sistema en cuestión. En estos casos interesa frecuentemente determinar la transferencia inversa de tensiones es decir:

$$A_v(s) = \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \quad (15.197)$$

Si se reemplaza $V_1(s)$ en función de los parámetros transmisión según la Ec. (15.40), la Ec. (15.197) toma el aspecto:

$$A_v(s) = \frac{A(s) V_2(s) + B(s) I_2'(s)}{V_2(s)} = A(s) + B(s) \frac{I_2'(s)}{V_2(s)} \quad (15.198)$$

pero en la Fig. 15.29 se cumple que $\frac{I_2'(s)}{V_2(s)} = Z_c(s)$ por lo cual la Ec. (15.198) será:

$$A_v(s) = A(s) + \frac{B(s)}{Z_c(s)} \quad (15.199)$$

y en el caso de considerar al cuadrípulo pasivo bilateral y simétrico, como se mencionó a principios de este párrafo, se cumple que $Z_c(s) = Z_o(s)$, en consecuencia la transmitancia dada por la Ec. (15.199) es:

$$A_v(s) = A(s) + \frac{B(s)}{Z_o(s)} \quad (15.200)$$

reemplazando en la Ec. (15.200) el valor de $Z_o(s)$ dado por la Ec. (15.193), resulta:

$$A_v(s) = A(s) + \sqrt{B(s) C(s)} \quad (15.201)$$

Según se analizó en el párrafo 15.14, inciso c), al ser el cuadrípulo pasivo y bilateral se cumple que:

$$A(s) D(s) - B(s) C(s) = 1 \quad (15.202)$$

y por ser simétrico $A(s) = D(s)$ (15.203)

Reemplazando la Ec. (15.203) en la Ec. (15.202) y operando se llega a que:

$$\sqrt{B(s) C(s)} = \sqrt{A^2(s) - 1} \quad (15.204)$$

ecuación esta última que reemplazada en la Ec. (15.201) hace que:

$$A_v(s) = A(s) + \sqrt{A^2(s) - 1} \quad (15.205)$$

La Ec. (15.205) indica que la transferencia inversa de tensiones en condiciones normales de funcionamiento para un cuádrupolo pasivo bilateral y simétrico terminado en su impedancia característica es solo función de la transmitancia inversa de tensiones con la salida a circuito abierto para los incrementos de señal. Esta propiedad es muy útil para su aplicación en el diseño de filtros. A partir de la Ec. (15.205) pueden derivarse algunas relaciones que se emplean en la aplicación mencionada, no tratada en este libro, pero que sin embargo se presentarán a modo de introducción. Para su aplicación a filtros interesa trabajar en régimen senoidal permanente, por lo que se pasará del dominio s al $j\omega$.

Generalmente, la $\bar{A}_v = A_v(j\omega)$ es un número complejo, que naturalmente depende de la configuración circuital, y que puede expresarse arbitrariamente como:

$$\bar{A}_v = e^\gamma \quad (15.206)$$

donde γ es un número complejo:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (15.207)$$

de la cual α y β son números reales. En base a la Ec. (15.207), la Ec. (15.206) puede escribirse como:

$$\bar{A}_v = e^{(\alpha + j\beta)} = e^\alpha e^{j\beta} \quad (15.208)$$

Si se relacionan convenientemente las Ecs. (15.205) y (15.208) resultan:

$$\bar{A}_v = \bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1} = e^\alpha e^{j\beta} \quad (15.209)$$

que desdoblada en módulo y argumento será:

$$e^\alpha = |\bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1}| \quad \therefore \alpha = \ln |\bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1}| \quad (15.210)$$

$$\beta = \arctg \frac{J_m (\bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1})}{R (\bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1})} \quad (15.211)$$

Es evidente que α solamente afecta al módulo de la transferencia de tensiones, por lo que se la denomina *constante de atenuación*. Si α es negativo cuanto mayor es su valor más grande será la atenuación, es decir que mayor

es la pérdida de señal en el cuádrupolo. La constante α sólo puede ser nula en algunas redes puramente reactivas que se estudian en el diseño de filtros.

Por otra parte, β afecta solamente a la fase de la transferencia de tensión, por lo que se la denomina *constante de fase*. Cuanto mayor es β más grande es el desfase entre las señales de entrada y salida. Naturalmente, que β puede ser nula si el cuádrupolo se comporta como resistivo puro.

γ recibe el nombre de *constante de propagación*. Esta constante, que simplifica las ecuaciones puede calcularse a partir de un parámetro transmisión. Es sabido, de las funciones hiperbólicas que:

$$A_v = e^\gamma = \cosh \gamma + \sinh \gamma \quad (15.212)$$

además:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \gamma + \sinh^2 \gamma &= 1 \quad \therefore \\ \sinh \gamma &= \sqrt{\cosh^2 \gamma - 1} \end{aligned} \quad (15.213)$$

Reemplazando la Ec. (15.213) en la Ec. (15.212) y relacionando esta última con la Ec. (15.209) se encuentra que:

$$\begin{aligned} \bar{A} + \sqrt{\bar{A}^2 - 1} &= \cosh \gamma + \sqrt{\cosh^2 \gamma - 1} \quad \therefore \\ \cosh \gamma &= \bar{A} \end{aligned} \quad (15.214)$$

Puede derivarse otra forma más útil para el cálculo de γ si se recuerda que:

$$\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma}$$

relacionando adecuadamente esta última expresión con las Ecs. (15.212), (15.214) y (15.205) será:

$$\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\sqrt{\bar{A}^2 - 1}}{\bar{A}}$$

y reemplazando esta última por la Ec. (15.204) adaptada a este análisis resulta:

$$\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\sqrt{\bar{B} \bar{C}}}{\bar{A}} \quad (15.215)$$

Puesto que $\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\operatorname{senh} \gamma}{\operatorname{cosh} \gamma}$, comparando las Ecs. (15.215) y (15.214) se obtiene:

$$\operatorname{senh} \gamma = \sqrt{\overline{B} \overline{C}} \quad (15.216)$$

ya que para el caso en estudio $\overline{A} = \overline{D}$ y si se reemplazan en la Ec. (15.215) las relaciones obtenidas en las Ecs. (15.194) y (15.195) será:

$$\operatorname{tgh} \gamma = \sqrt{\frac{\overline{h}_{11}}{\overline{z}_{11}}} \quad (15.217)$$

Obviamente, la Ec. (15.217) se aplica a cuadripolos que terminan en su impedancia característica, y es común emplearla en el diseño de filtros.

Es de hacer notar, que la Ec. (15.206) se planteó para una transferencia de tensiones, pero si en los terminales de entrada y salida existe la misma impedancia \overline{Z}_0 , deberá cumplirse también que:

$$\overline{A}_I = \frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2} = e^\gamma \quad (15.218)$$

Es claro, que a través de lo expuesto se desprende que tanto γ como sus componentes son números carentes de dimensión, pero existen nombres que se atribuyen a las unidades en que se miden. Dado que β se definió como una diferencia de fase, su unidad será el grado o radián según corresponda.

El nombre de la unidad de α es el neper. Téngase en cuenta que según la Ec. (15.210), es el logaritmo natural del módulo de la transferencia en estudio, que puede expresarse como sigue:

$$\alpha = \ln |\overline{A} + \sqrt{\overline{A}^2 - 1}| = \ln \frac{V_1}{V_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

por lo cual la atenuación puede medirse como un dado número de neper. La atenuación se mide más corrientemente en decibeles, que en el caso de cumplirse la Ec. (15.193) puede expresarse como:

$$dB = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 = 20 \log \frac{V_1}{V_2} = 20 \log \frac{I_1}{I_2}$$

Finalmente cabe destacar, que a través de todo lo expuesto en este capítulo, los dos primeros tipos de problemas mencionados en el párrafo 15.5 han sido básicamente ya considerados.

En realidad, el tercer problema planteado que es el de la *inserción* no se consideró específicamente, y es conveniente hacer una mención sobre el mismo. Si en el circuito de la Fig. 15.29 antes de insertar el cuadripolo, sobre la carga se tienen I'_c ; V_c y P_c , y luego de la inserción del cuadripolo I'_2 ; V_2 y P_2 , las pérdidas por inserción pueden expresarse como:

$$dB = 10 \log \frac{P_c}{P_2} = 20 \log \frac{V_c}{V_2} = 20 \log \frac{I'_c}{I'_2}$$

Estas pérdidas por inserción pueden determinarse en base a cualquiera de las familias de parámetros estudiadas, dependiendo en definitiva la elección del caso específico a tratar.

Nótese que el problema de la transmisión relaciona a tensión de salida y entrada, suponiendo que la primera de ellas se mantiene constante. El problema de la inserción tiene en cuenta la caída de tensión que se produce en la impedancia del generador luego de insertado el cuadripolo, y es obvio que dichos problemas son coincidentes si dicha impedancia del generador es nula. También coinciden si al insertar el cuadripolo no cambia la corriente por la impedancia del generador lo que ocurre cuando se cumple la relación dada por la Ec. (15.193).

15.16 Problemas resueltos

15.16.1) Para el cuadripolo ilustrado en la Fig. 15.30 calcular \bar{z}_{11} e \bar{y}_{22} por simple inspección.

Solución:

$$\bar{z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 = (40 - j10) \Omega$$

$$\bar{y}_{22} = \frac{1}{\bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}} = (26,6 - j6,6) 10^{-3} \text{ S}$$

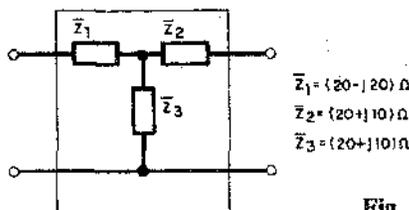


Fig. 15.30

15.16.2) Hallar las matrices transmisión de los cuádrupolos mostrados en la Fig. 15.31.a) y b), por aplicación de las definiciones de los parámetros.

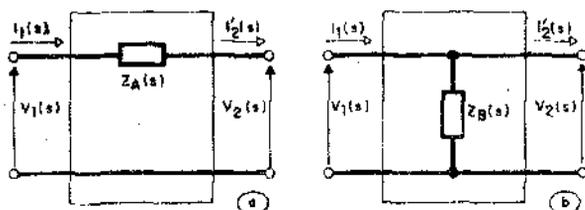


Fig. 15.31

Solución:

Cuádrupolo a)

$$A(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad \text{dado que } V_1(s) = V_2(s) \therefore$$

$$A(s) = 1$$

$$B(s) = \left. \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad \text{puesto que } I_2(s) = \frac{V_1(s)}{Z_A(s)} \therefore$$

$$B(s) = Z_A(s)$$

$$C(s) = \left. \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad \text{pero } I_2(s) = 0 = I_1(s) \therefore$$

$$C(s) = 0$$

$$D(s) = \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad \text{como } I_1(s) = I_2(s) \therefore$$

$D(s) = 1$ en consecuencia:

$$\left[\gamma_a(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & Z_A(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15.219)$$

Cuadripolo b)

$$A(s) = \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \quad \left| \quad I_2(s) = 0 \quad \text{como } V_1(s) = V_2(s) \right.$$

$$A(s) = 1$$

$$B(s) = \frac{V_1(s)}{I_2(s)} \quad \left| \quad V_2(s) = 0 \quad \text{si } V_2(s) = 0 = V_1(s) \therefore \right.$$

$$B(s) = 0$$

$$C(s) = \frac{I_1(s)}{V_2(s)} \quad \left| \quad I_2(s) = 0 \quad \text{como } I_1(s) = \frac{V_2(s)}{Z_B(s)} \therefore \right.$$

$$C(s) = \frac{1}{Z_B(s)}$$

$$D(s) = \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \quad \left| \quad V_2(s) = 0 \quad \text{pero } I_1(s) = I_2(s) \therefore \right.$$

$$D(s) = 1 \quad \text{en consecuencia}$$

$$[\gamma_b(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_B(s)} & 1 \end{bmatrix} \quad (15.220)$$

15.16.3) Hallar la matriz transmisión del cuadripolo ilustrado en la Fig. 15.32 por asociación de cuadripolos en base a los resultados encontrados en el problema 15.16.2.

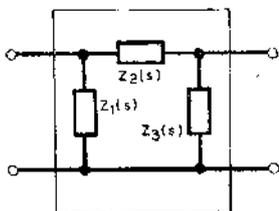


Fig. 15.32

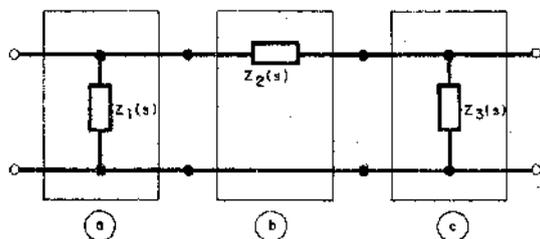


Fig. 15.33

Solución:

El cuadripolo tomado como dato puede construirse a partir de la asociación en cascada de tres cuadripolos como se muestra en la Fig. 15.33. Dichos cuadripolos se han individualizado con a); b) y c) respectivamente. Relacionando adecuadamente los resultados de las Ecs. (15.219) y (15.220), y adaptándolos al problema en cuestión será:

$$\left[\gamma_a(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_1(s)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\gamma_b(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & Z_2(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\gamma_c(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3(s)} & 1 \end{bmatrix}$$

por lo cual:

$$\left[\gamma_{ab}(s) \right] = \left[\gamma_a(s) \right] \left[\gamma_b(s) \right] = \begin{bmatrix} 1 & Z_2(s) \\ \frac{1}{Z_1(s)} & \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} + 1 \end{bmatrix} \therefore$$

$$\left[\gamma_{abc}(s) \right] = \left[\gamma_{ab}(s) \right] \left[\gamma_c(s) \right] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} & Z_2(s) \\ \frac{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_1(s) Z_3(s)} & \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \end{bmatrix} \quad (15.221)$$

15.16.4) Para el circuito ilustrado en la Fig. 15.34 hallar la expresión de la transmitancia de tensiones $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ empleando resultados obtenidos en los problemas 15.16.2 y 15.16.3.

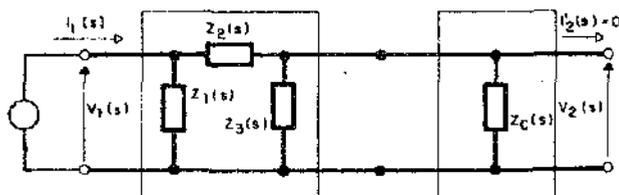


Fig. 15.34

Solución:

De la Ec. (15.220), adaptándola al problema es:

$$[\gamma_c(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_c(s)} & 1 \end{bmatrix}$$

De la Ec. (15.221):

$$[\gamma_{abc}(s)] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} & Z_2(s) \\ \frac{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_1(s) Z_3(s)} & \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \end{bmatrix}$$

por lo cual la matriz transmisión total es:

$$[\gamma(s)] = [\gamma_{abc}(s)] [\gamma_c(s)] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} + \frac{Z_2(s)}{Z_c(s)} & Z_2(s) \\ \frac{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_1(s) Z_3(s)} + \left(\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s) Z_c(s)} \right) & \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)} \end{bmatrix}$$

$$[\gamma(s)] = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad (15.222)$$

puesto que:

$$A(s) = \left. \frac{V_1(s)}{V_2(s)} \right|_{I_2(s) = 0}$$

como la condición $I_2(s) = 0$ la cumple el circuito de la Fig. 15.34, el cálculo de la transmitancia pedida se reduce a:

$$\left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s) = 0} = \frac{1}{A(s)} \quad (15.223)$$

en consecuencia relacionando la Ec. (15.222) con la Ec. (15.223) resulta:

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{\frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_3(s)} + \frac{Z_2(s)}{Z_c(s)}}$$

$$H(s) = \frac{Z_3(s) Z_c(s)}{Z_2(s) Z_c(s) + Z_3(s) Z_c(s) + Z_2(s) Z_3(s)}$$

15.16.5) Encontrar las expresiones de las impedancias iterativas e imagen del cuádrupolo ilustrado en la Fig. 15.35 en base a la matriz transmisión del mismo. Si adicionalmente se supone que $Z_1(s) = Z_3(s)$, determinar la im-

pedancia característica del cuádrupolo en base a los coeficientes de la matriz transmisión.

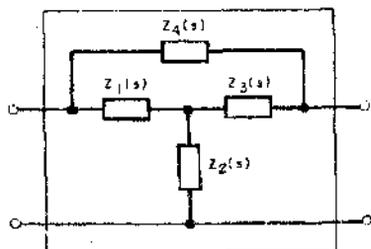


Fig. 15.35

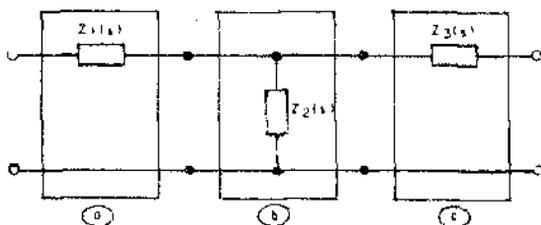


Fig. 15.36

Solución:

La matriz transmisión del cuádrupolo puede hallarse a partir de la asociación en cascada de tres cuádrupolos como se muestra en la Fig. 15.36. Las matrices individuales para cada uno de los cuádrupolos componentes fueron hallados en el problema 15.16.2, y adaptando los resultados a este problema será:

$$\begin{bmatrix} \gamma_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2(s)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_3(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo cual

$$[\gamma_{ab}(s)] = [\gamma_a(s)] [\gamma_b(s)] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} & Z_1(s) \\ \frac{1}{Z_2(s)} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en consecuencia}$$

$$[\gamma_{abc}(s)] = [\gamma_{ab}(s)] [\gamma_b(s)] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} & (1 + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)}) Z_3(s) + Z_1(s) \\ \frac{1}{Z_2(s)} & \frac{Z_3(s)}{Z_2(s)} + 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix}$$

(15.224)

Las expresiones de las impedancias iterativas las dan las Ec. (15.182) y Ec. (15.183) que se reproducen:

$$Z_{i1}(s) = \frac{A(s) - D(s)}{2C(s)} \pm \sqrt{\left(\frac{A(s) - D(s)}{2C(s)}\right)^2 + \frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.182)$$

$$Z_{i2}(s) = \frac{D(s) - A(s)}{2C(s)} \pm \sqrt{\left(\frac{D(s) - A(s)}{2C(s)}\right)^2 + \frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.183)$$

Empleando los valores de los parámetros dados en la Ec. (15.224) resulta:

$$\frac{A(s) - D(s)}{2C(s)} = \frac{\left(1 + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)}\right) - \left(\frac{Z_3(s)}{Z_2(s)} + 1\right)}{\frac{2}{Z_2(s)}} = \frac{Z_1(s) - Z_3(s)}{2} \quad (15.225)$$

a su vez:

$$\frac{D(s) - A(s)}{2C(s)} = \frac{Z_3(s) - Z_1(s)}{2} \quad (15.226)$$

por otra parte:

$$\frac{B(s)}{C(s)} = \frac{Z_3(s) + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} \quad Z_3(s) + Z_1(s)}{\frac{1}{Z_2(s)}} = Z_1(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s) + Z_1(s) Z_3(s) \quad (15.227)$$

reemplazando las Ecs. (15.225) y (15.227) en la Ec. (15.182):

$$Z_{i1}(s) = \frac{Z_1(s) - Z_3(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Z_1(s) - Z_3(s)}{2}\right)^2 + Z_1(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s) + Z_1(s) Z_3(s)} \quad (15.228)$$

y reemplazando las Ecs. (15.226) y (15.227) en la Ec. (15.183):

$$Z_{i2}(s) = \frac{Z_3(s) - Z_1(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Z_3(s) - Z_1(s)}{2}\right)^2 + Z_1(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s) + Z_1(s) Z_3(s)} \quad (15.229)$$

Las Ecs. (15.228) y (15.229) dan las expresiones de las impedancias iterativas buscadas.

A su vez, las impedancias imágenes pueden calcularse a partir de las Ecs. (15.190) y (15.189) que se reproducen:

$$Z_{I1}(s) = \sqrt{\frac{A(s) B(s)}{C(s) D(s)}} \quad (15.190)$$

$$Z_{I2}(s) = \sqrt{\frac{B(s) D(s)}{A(s) C(s)}} \quad (15.189)$$

Empleando los valores de los parámetros dados en la Ec. (15.224) y operando resulta:

$$Z_{I1}(s) = \sqrt{\frac{Z_1^2(s)(Z_2(s) + Z_3(s)) + Z_2^2(Z_1(s) + Z_3(s)) + 2Z_1(s)Z_2(s)Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)}} \quad (15.230)$$

$$Z_{I2}(s) = \sqrt{\frac{Z_2^2(s)(Z_1(s) + Z_3(s)) + Z_3^2(s)(Z_1(s) + Z_2(s)) + 2Z_1(s)Z_2(s)Z_3(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}} \quad (15.231)$$

Las Ecs. (15.230) y (15.231) dan las expresiones de las impedancias imágenes buscadas. Si adicionalmente se supone que $Z_1(s) = Z_3(s)$, es decir que el cuádrupolo es simétrico, las impedancias iterativas e imágenes coinciden y pueden calcularse a partir de la Ec. (15.193) que se transcribe:

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{B(s)}{C(s)}} \quad (15.193)$$

o bien se encuentra haciendo $Z_1(s) = Z_3(s)$ en las Ecs. (15.228) (15.229), (15.230) y (15.231), resultando:

$$Z_0(s) = \sqrt{Z_1^2(s) + 2Z_1(s)Z_2(s)}$$

15.16.6) Un cuádrupolo pasivo y simétrico, posee con la salida en cortocircuito una resistencia de entrada de 7,5 ohm, y con la salida a circuito abierto una resistencia de entrada de 10 ohm. Se desea calcular la impedancia característica del cuádrupolo.

Solución:

De acuerdo a lo expuesto en el párrafo 15.14.c) es evidente que:

$$7,5 \Omega = h_{11}$$

$$10 \Omega = z_{11}$$

en consecuencia aplicando la Ec. (15.196):

$$Z_0 = \sqrt{h_{11} z_{11}} = \sqrt{7,5 \cdot 10}$$

$$Z_0 = 8,66 \Omega$$

15.17 Problemas propuestos

15.17.1) Para el cuadripolo ilustrado en la Fig. 15.30 calcular \bar{h}_{11} y \bar{A} por simple inspección.

Resultados:

$$\bar{h}_{11} = (30 - j15) \Omega$$

$$\bar{A} = (1,4 - j1,2)$$

15.17.2) Calcular las matrices admitancia de los cuadripolos indicados en la Fig. 15.37.a) y b) aplicando las definiciones de los parámetros.

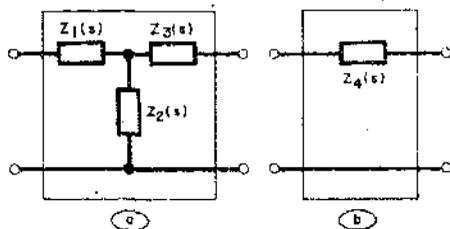


Fig. 15.37

Resultados:

$$\begin{bmatrix} y_a(s) \\ y_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1(s) + \frac{Z_2(s) Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)}} & -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s) Z_3(s) + Z_1(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s)} \\ -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s) Z_3(s) + Z_1(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s)} & \frac{1}{Z_3(s) + \frac{Z_1(s) Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_b(s) \\ y_a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_4(s)} & -\frac{1}{Z_4(s)} \\ -\frac{1}{Z_4(s)} & \frac{1}{Z_4(s)} \end{bmatrix}$$

15.17.3) Hallar la matriz admitancia del cuadripolo ilustrado en la Fig. 15.38 por asociación de los cuadripolos del problema 15.17.2.

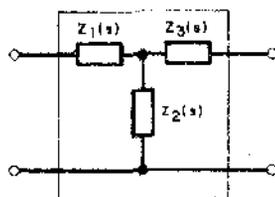


Fig. 15.38

Resultados:

$$[y(s)] = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$y_{11}(s) = \frac{Z_2(s) + Z_3(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)} + \frac{1}{Z_4(s)}$$

$$y_{12} = y_{21}(s) = \frac{-Z_2(s)}{Z_1(s)Z_3(s) + Z_1(s)Z_2(s) + Z_2(s)Z_3(s)} - \frac{1}{Z_4(s)}$$

$$y_{22}(s) = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)} + \frac{1}{Z_4(s)}$$

15.17.4) Encontrar los parámetros correspondientes a la matriz "g" para el cuadripolo del problema 15.17.3 empleando la equivalencia con los parámetros admitancia.

Resultados:

$$g_{11}(s) = \frac{\Delta y(s)}{\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)} + \frac{1}{Z_4(s)}}$$

$$g_{12}(s) = g_{21}(s) = \frac{\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)Z_3(s) + Z_1(s)Z_2(s) + Z_2(s)Z_3(s)} - \frac{1}{Z_4(s)}}{\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)} + \frac{1}{Z_4(s)}}$$

$$g_{22}(s) = \frac{1}{\frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)} + \frac{1}{Z_4(s)}}$$

15.17.5) Hallar la expresión de la impedancia de entrada para el cuadripolo mostrado en la Fig. 15.39, en condiciones normales de funcionamiento. Pueden emplearse resultados parciales obtenidos en el problema 15.16.4.

Resultados:

$$Z_e(s) = \frac{(Z_c(s) Z_3(s) + Z_c(s) Z_2(s) + Z_2(s) Z_3(s)) Z_1(s)}{Z_1(s) Z_c(s) + Z_2(s) Z_c(s) + Z_3(s) Z_c(s) + Z_1(s) Z_3(s) + Z_2(s) Z_3(s)}$$

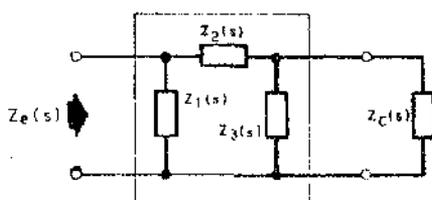


Fig. 15.39

Circuitos acoplados inductivamente

16.1 Introducción: En el párrafo 1.3 del primer capítulo, al mencionar los elementos de circuitos pasivos necesarios para caracterizar las distintas formas de almacenamiento o intercambio de energía, se vio que el inductor mutuo se utilizaba para representar la transferencia de energía entre dos partes de un esquema eléctrico a través del campo magnético. También se dijo que, a diferencia de los otros elementos pasivos de dos terminales, éste requería un modelo de tres o cuatro terminales para su caracterización. Por esta causa se dejó su estudio para este capítulo, con el fin de disponer de técnicas de análisis más adecuadas. Se comenzará por definir la inductancia mutua y el coeficiente de acoplamiento, introduciendo la diferenciación entre acoplamientos débiles y fuertes.

Luego se estudiarán las tensiones de inducción mutua, relacionándolas cualitativamente con las de autoinductancia. Se introducirán las polaridades de los arrollamientos y la forma de plantear las ecuaciones en circuitos con acoplamiento inductivo débil. Ordenando las ecuaciones, se encontrará la forma de construir circuitos equivalentes donde el acoplamiento inductivo no aparezca en forma explícita, sino a través de generadores controlados o de modificaciones de los valores de las autoinductancias.

Luego se verá como aplicar el método de las mallas y el teorema de Thevenin a circuitos con acoplamiento inductivo débil, introduciendo el concepto de impedancia reflejada y otras formas de circuitos equivalentes.

Se completará el estudio de los circuitos con acoplamiento inductivo débil, analizando la respuesta de frecuencia de circuitos acoplados sintonizados.

A continuación se definirá el transformador ideal y se hallará el circuito equivalente de un transformador real con acoplamiento fuerte.

Finalmente, se estudiará la respuesta de frecuencia de un transformador real con núcleo ferromagnético.

16.2) Inductancia mutua: Se dice que dos circuitos están acoplados magnética o inductivamente, cuando al variar la corriente en uno de ellos, se induce una tensión en el restante, sin que exista un vínculo conductivo entre ambos.

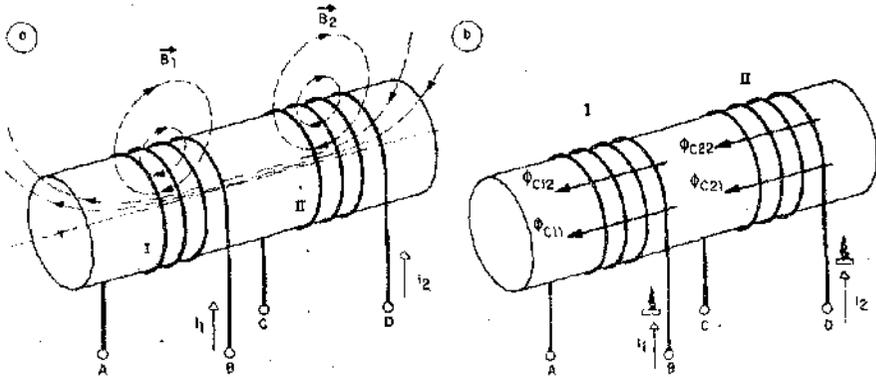


Fig. 16.1

En la Fig. 16.1.a.), se muestran dos arrollamientos conductores próximos entre sí, que no están unidos conductivamente. Supóngase que se aplica una corriente constante I_1 que entra por el borne B . Aplicando la regla del tirabuzón de rosca derecha, se deduce que la circulación de la corriente I_1 por el arrollamiento I crea un flujo ϕ_{C11} con el sentido indicado en la Fig. 16.1.b), que es concatenado por dicho arrollamiento. Pero además, la circulación de I_1 por el arrollamiento I crea un flujo ϕ_{C21} , que es concatenado por el arrollamiento II. Nótese que el primer subíndice numérico identifica al arrollamiento que concatena el flujo, mientras que el segundo hace lo propio con el que lo crea. Está claro que si I_1 varía, ϕ_{C11} y ϕ_{C21} también serán variables con el tiempo y por lo tanto se inducirán tensiones en ambos arrollamientos. En consecuencia, podemos afirmar que los arrollamientos conductores de la Fig. 16.1 están acoplados inductivamente.

Un análisis similar mostraría que la circulación de la corriente I_2 creará un campo magnético cuyas líneas de inducción serán concatenadas por los arrollamientos I y II dando lugar a los flujos concatenados ϕ_{C22} y ϕ_{C21} .

De acuerdo a la definición introducida en el capítulo 1, párrafo 1.4.3,

las inductancias que ahora podemos llamar con más precisión inductancias propias ó autoinductancias de los arrollamientos serán:

$$L_1 = L_{11} = \frac{\phi_{c11}}{I_1} \quad (16.1)$$

y

$$L_2 = L_{22} = \frac{\phi_{c22}}{I_2} \quad (16.2)$$

a partir de ellas se obtienen las tensiones de autoinducción producidas por las variaciones de las corrientes I_1 e I_2 . Ellas son:

$$v_{11}(t) = \frac{d\phi_{c11}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[L_{11} i_1(t) \right] = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.3)$$

$$v_{22}(t) = \frac{d\phi_{c22}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[L_{22} i_2(t) \right] = L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (16.4)$$

Del análisis efectuado surge naturalmente la conveniencia de introducir las inductancias mutuas, para caracterizar las tensiones inducidas en un arrollamiento por las variaciones de corriente en el restante.

Por analogía con las inductancias propias, las inductancias mutuas se definen de la siguiente manera:

$$M_{12} = \frac{\phi_{c12}}{I_2} \quad (16.5)$$

$$M_{21} = \frac{\phi_{c21}}{I_1} \quad (16.6)$$

En base a consideraciones energéticas, puede demostrarse que las inductancias mutuas son iguales entre sí, Esto es:

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (16.7)$$

En este libro se toman M_{12} y M_{21} siempre positivos, al igual que L_1 y L_2 .

La siguiente demostración de la validez de la Ec. (16.7), puede ser omitida en una primera lectura, sin que esto afecte la comprensión de los temas siguientes.

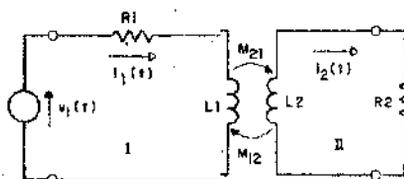


Fig. 16.2

Considérese el circuito acoplado inductivamente de la Fig. 16.2 con condiciones iniciales nulas. Las ecuaciones del equilibrio instantáneo, planteadas como se enseña en el párrafo 16.6 son las siguientes:

$$\text{Malla I: } v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (16.8)$$

$$\text{Malla II: } 0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.9)$$

Donde el signo negativo de M_{12} y M_{21} surge de considerar que los flujos propios y mutuos se debilitan entre sí.

Multiplicando las Ec. (16.8) por la cantidad elemental de carga $i_1(t) dt$ y la Ec. (16.9) por $i_2(t) dt$ resulta:

$$v_1(t) i_1(t) dt = R_1 i_1^2(t) dt + L_1 i_1(t) di_1(t) - M_{12} i_1 di_2 \quad (16.10)$$

$$0 = R_2 i_2^2(t) dt + L_2 i_2(t) di_2(t) - M_{21} i_2(t) di_1(t) \quad (16.11)$$

Las ecuaciones de equilibrio instantáneo también pueden ser planteadas partiendo de un balance energético, de modo de satisfacer el principio de conservación de la energía, tal como lo hace HERMAN ELIGES en su trabajo "Energía Mutua y de Transferencia en Circuitos Magnéticamente Acoplados" publicado en los ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA de Julio-Agosto de 1971; Tomo CXCH, pág. 3.

En ese caso resulta:

$$\text{Malla I: } v_1(t) i_1(t) dt = R_1 i_1^2(t) dt + dw_{c1} + dw_{T1} \quad (16.12)$$

$$\text{Malla II: } dw_{T2} = R_2 i_2^2(t) dt + dw_{c2} \quad (16.13)$$

Donde:

$v_1(t) i_1(t) dt$ es la energía elemental entregada por el generador.

$R_1 i_1^2(t) dt$ y $R_2 i_2^2(t) dt$ son las energías disipadas por los resistores R_1 y R_2 .

dw_{T1} es la energía elemental trasferida desde el primario hacia el secundario.

dw_{T2} es la energía elemental recibida por el secundario.

De acuerdo al principio de conservación de la energía debe ser:

$$dw_{T2} = dw_{T1} \quad (16.14)$$

dw_{c1} y dw_{c2} son las energías elementales almacenadas por el campo en los arrollamientos de la Malla I (primario) y de la Malla II (secundario), respectivamente. Los valores de estas energías son los siguientes:

La energía w_{c1} almacenada por el campo en el primario es:

$$w_{c1} = \frac{1}{2} i_1(t) \phi_{c1} = \frac{1}{2} i_1(t) (\phi_{c11} - \phi_{c12}) \quad (16.15)$$

Donde:

$\phi_{c1} = \phi_{c11} - \phi_{c12}$ es el flujo total concatenado por el arrollamiento primario.

ϕ_{c11} es el flujo creado y concatenado por el primario.

ϕ_{c12} es el flujo creado por el arrollamiento secundario y concatenado por el primario.

Reemplazando en la Ec. (16.15) las expresiones de ϕ_{c11} y ϕ_{c12} deducidas de las Ec. (16.1) y (16.5) resulta:

$$w_{c1} = \frac{1}{2} i_1^2(t) L_1 - \frac{1}{2} M_{12} i_1(t) i_2(t)$$

y diferenciando

$$dw_{c1} = L_1 i_1(t) di_1(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_1(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_2(t) di_1(t) \quad (16.16)$$

Análogamente, la energía almacenada por el secundario es:

$$\begin{aligned} w_{c2} &= \frac{1}{2} i_2(t) \phi_{c2} = \frac{1}{2} i_2(t) (\phi_{c22} - \phi_{c21}) = \\ &= \frac{1}{2} i_2^2(t) L_2 - \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) i_2(t) \end{aligned}$$

$$\therefore dw_{c2} = L_2 i_2(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_2(t) di_1(t) \quad (16.17)$$

Reemplazando las Ecs. (16.16) y (16.17) en las Ecs. (16.12) y (16.13), respectivamente, se obtienen:

$$v_1(t) i_1(t) dt = R_1 i_1^2(t) dt + L_1 i_1(t) di_1(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_1(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_2(t) di_1(t) + dw_{T1} \quad (16.18)$$

$$dw_{T2} = R_2 i_2^2(t) dt + L_2 i_2(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_2(t) di_1(t) \quad (16.19)$$

Comparando la Ec. (16.18) con la Ec. (16.10) resulta:

$$-M_{12} i_1(t) di_2(t) = -\frac{1}{2} M_{12} i_1(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_2(t) di_1(t) + dw_{T1}$$

$$\therefore dw_{T1} = \frac{1}{2} M_{12} i_2(t) di_1(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_1(t) di_2(t) \quad (16.20)$$

Análogamente, comparando las Ec. (16.19) y (16.11), se llega a:

$$M_{21} i_2(t) di_1(t) = \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) di_2(t) + \frac{1}{2} M_{21} i_2(t) di_1(t) + dw_{T2}$$

$$\therefore dw_{T2} = \frac{1}{2} M_{21} i_2(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) di_2(t) \quad (16.21)$$

Finalmente, reemplazando las Ecs. (16.20) y (16.21) en la Ec. (16.14) queda:

$$\frac{1}{2} M_{21} i_2(t) di_2(t) - \frac{1}{2} M_{21} i_1(t) di_2(t) =$$

$$= \frac{1}{2} M_{12} i_2(t) di_1(t) - \frac{1}{2} M_{12} i_1(t) di_2(t)$$

que se satisface para:

$$M_{12} = M_{21}$$

16.3 Coeficiente de acoplamiento

En el párrafo 16.6 Ej. 6, se demuestra que la energía entregada por el generador que alimenta al circuito acoplado inductivamente de la Fig. 16.3, supuesto condiciones iniciales nulas está dada por la expresión:

$$W \Big|_0^t = W_{R_1} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2(t) \quad (16.22)$$

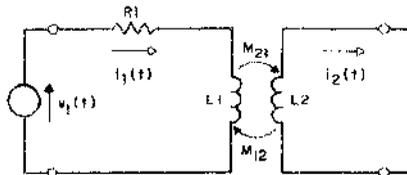


Fig. 16.3

Donde $W_{R_1} \Big|_0^t$ es la energía disipada por el resistor entre 0 y t segundos. Nótese que en la Ec. (16.22), si

$$L_1 \gg \frac{M^2}{L_2}$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} \ll 1 \quad (16.23)$$

la energía que suministra el generador es igual a la que disipa R_1 más la que almacena L_1 . Esto es, si las inductancias mutuas son muy pequeñas frente a las propias, el circuito de entrada primario se comporta como si no existiera el acoplamiento magnético con el segundo circuito (secundario).

Esto ocurre cuando los arrollamientos están tan alejados entre sí, que el flujo creado por cada uno de ellos no es concatenado por el otro.

Por el contrario, si

$$L_1 = \frac{M^2}{L_2}$$

o, lo que es igual

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 \quad (16.24)$$

El último término del segundo miembro de la Ec. (16.22) se anula y toda la energía entregada por la fuente se disipa en R_1 . En este caso, el acoplamiento es tan fuerte que las energías almacenadas en las inductancias propias y mutuas se llegan a cancelar entre sí.

Esto ocurre cuando los arrollamientos están encimados y todo el flujo creado por cada uno de ellos es concatenado íntegramente por el restante. Naturalmente que se trata de un caso ideal. El análisis realizado muestra que el cociente

$$\frac{M^2}{L_1 L_2}$$

puede ser tomado como un parámetro normalizado para caracterizar el grado de interacción entre los campos magnéticos creados por los dos arrollamientos.

En consecuencia, se introduce el coeficiente de acoplamiento k definido como indica la Ec. (16.25):

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (16.25)$$

$$\therefore M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (16.26)$$

Puesto que la energía suministrada por el generador no puede ser negativa para todo $t > 0$, de acuerdo a la Ec. (16.22) resulta:

$$L_1 - \frac{M^2}{L_2} \geq 0$$

$$\therefore \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$$

y teniendo en cuenta la Ec. (16.25):

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$$

Teniendo en cuenta que M , L_1 y L_2 son positivos y el menor valor de M es cero, resulta:

$$0 \leq k \leq 1 \quad (16.27)$$

Cuando k toma valores pequeños se dice que el acoplamiento es *débil*, mientras que para valores grandes de k el acoplamiento se denomina *fuerte*. Normalmente, el estudio de los circuitos con acoplamiento débil se realiza empleando las inductancias mutuas y circuitos equivalentes que derivan de ellas. Por el contrario, cuando el acoplamiento es próximo a la unidad, como ocurre en los transformadores con núcleo ferromagnético, el estudio se efectúa mediante modelos que se construyen a partir de un transformador ideal caracterizado por la relación

$$a = \frac{V_1}{V_2} \quad (16.28)$$

denominada relación de transformación.

16.4 Tensiones de inducción mutua

Considérese nuevamente el circuito de la Fig. 16.1. Si no existiera el arrollamiento II, la tensión de autoinducción en el arrollamiento I sería la dada por la Ec. (16.3):

$$v_{11}(t) = \frac{d\phi_{c11}}{dt} = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.3)$$

Si se toma en cuenta la influencia del arrollamiento II, debe considerarse también la influencia del flujo ϕ_{c12} creado por II y concatenado por I. Esto es:

$$v_I(t) = \frac{d\phi_{c1}}{dt} = \frac{d}{dt} (\phi_{c11} \pm \phi_{c12}) = \frac{d\phi_{c11}}{dt} \pm \frac{d\phi_{c12}}{dt} \quad (16.29)$$

Donde el signo + corresponde al caso en que los flujos propios y mutuos se refuerzan entre sí, como ocurre en la Fig. 16.1.b). El signo - corresponde al caso de la Fig. 16.4, en la cual los flujos propios y mutuos se oponen entre sí.

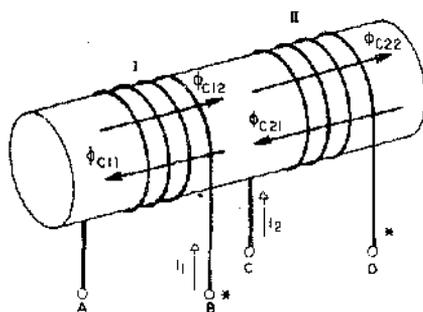


Fig. 16.4

Teniendo en cuenta las Ecs. (16.1) y (16.5), la Ec. (16.29) puede escribirse:

$$v_I(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (16.30)$$

Análogamente, la tensión inducida en el arrollamiento II resulta:

$$v_{II}(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.31)$$

En los segundos miembros de las Ecs. (16.30) y (16.31), los primeros términos son las tensiones de autoinducción dados por las Ecs. (16.3) y (16.4). Los restantes términos son las tensiones inducidas por los flujos mutuos. Por tal causa se las denomina tensiones de inducción mutua.

$$v_{M_{12}}(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (16.32)$$

$$v_{M_{21}}(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.33)$$

16.5 Polaridades de los arrollamientos

Puesto que la inductancia mutua aparece inevitablemente ligada a la presencia de autoinductancia, resulta razonable su representación en los modelos circuitales idealizados mediante el símbolo gráfico de cuatro terminales de la Fig. 16.5.

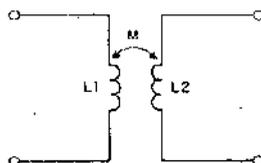


Fig. 16.5

Comparando el símbolo de la Fig. 16.5 con los arrollamientos reales de la Fig. 16.1, se observa que el primero carece de información acerca de si los flujos propios y mutuos se refuerzan o se debilitan entre sí. En el circuito real, esta información se deduce de la geometría y de los sentidos de las corrientes.

16.5.1) **Bornes de igual polaridad respecto del flujo:** Para incorporar al símbolo de la Fig. 16.5 la información sobre el carácter de la interacción entre los flujos mutuos y propios, se definen las polaridades de los arrollamientos de la siguiente manera: Se dice que dos bornes tienen igual polaridad respecto del flujo, o bien que son homólogos, cuando al entrar (o salir) por ambos la corriente, se crean flujos propios y mutuos que se refuerzan entre sí. Los bornes homólogos se identifican con un asterisco, un punto o con indicaciones similares, tal como se muestra en la Fig. 16.6.

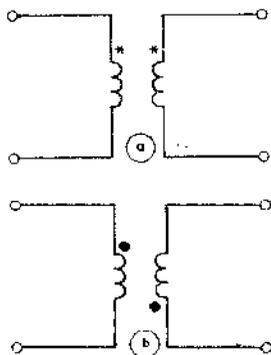


Fig. 16.6

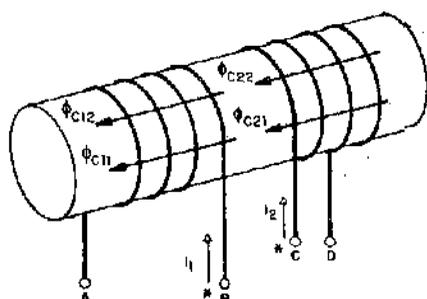


Fig. 16.7

Si se aplica la definición anterior al esquema de las Fig. 16.4, resulta claro que el homólogo del B es el D, ya que al entrar las corrientes por ambos, los flujos propios y mutuos se refuerzan entre sí. Análogamente, en la Fig. 16.7, los bornes de igual polaridad respecto del flujo son B y C ó bien A y D.

16.5.2) **Propiedades de los bornes homólogos:** 1ª Propiedad. Si en un borne de un arrollamiento se produce un incremento positivo de la corriente entrante al mismo, en el borne homólogo del otro arrollamiento, la corriente tendrá un incremento positivo saliente.

En la Fig. 16.8 se resume esta propiedad, que se deduce de la ley de Lenz. En efecto, ΔI_2 debe ser tal que se oponga a la causa que la genera,

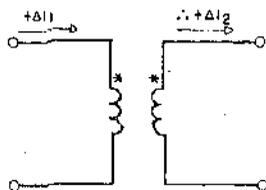


Fig. 16.8

que es el incremento del flujo. Para crear un flujo que debilite al original, la corriente debe ser saliente.

2ª Propiedad: Si en un arrollamiento se produce un incremento positivo del potencial de un borne, respecto del restante, en otro arrollamiento acoplado inductivamente, existirá un incremento positivo del borne homólogo, respecto del complementario. Esta propiedad es ilustrada en la Fig. 16.9. Como es evidente, esta propiedad es una consecuencia de la anterior, ya que $+\Delta V_1$ tiene el sentido necesario para producir $+\Delta I_1$, mientras que $+\Delta V_2$, es el que aparecerá sobre una carga al circular $+\Delta I_2$.

Es interesante destacar que la aplicación de la 2ª propiedad permite establecer un método rápido, simple y seguro para identificar los bornes de igual polaridad respecto del flujo. En efecto, considérese el esquema de la Fig. 16.10. Se trata de hallar el borne homólogo del A. Se elige un resistor R de valor adecuado para limitar la corriente en el primario y un voltímetro de alcance conveniente. Se cierra el interruptor y se observa el sentido en el que se mueve la aguja indicadora del voltímetro. Si se desplaza hacia la derecha, el borne homólogo del A es el C, al cual se ha conectado el terminal positivo del voltímetro.

Si el desplazamiento de la aguja es opuesto, el borne homólogo es el D.

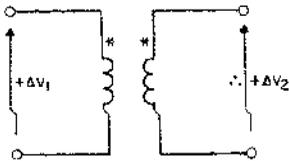


Fig. 16.9

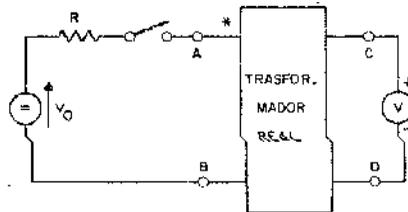


Fig. 16.10

16.6 Planteo de las ecuaciones en circuitos con acoplamiento inductivo

Para plantear las ecuaciones en circuitos con inductancia mutua, puede aplicarse la 2ª ley de Kirchhoff, teniendo en cuenta que para cada inductor L_α , afectado de uno o más acoplamientos inductivos, el flujo concatenado será de la forma:

$$\phi_{c\alpha} = \phi_{c\alpha\alpha} \pm \phi_{c\alpha\beta} \pm \phi_{c\alpha\gamma} \pm \dots \quad (16.34)$$

y por lo tanto, en el dominio del tiempo deberá computarse una tensión:

$$v_\alpha(t) = \frac{d\phi_{c\alpha}}{dt} = \frac{L_\alpha di_\alpha(t)}{dt} \pm M_{\alpha\beta} \frac{di_\beta(t)}{dt} \pm M_{\alpha\gamma} \frac{di_\gamma(t)}{dt} \pm \dots \quad (16.35)$$

En el dominio transformado de frecuencia compleja será:

$$V_\alpha(s) = sL_\alpha I_\alpha(s) \pm sM_{\alpha\beta} I_\beta(s) \pm sM_{\alpha\gamma} I_\gamma(s) \pm \dots \quad (16.36)$$

y en el dominio $j\omega$

$$\bar{V}_\alpha = j\omega L_\alpha \bar{I}_\alpha \pm j\omega M_{\alpha\beta} \bar{I}_\beta \pm j\omega M_{\alpha\gamma} \bar{I}_\gamma \pm \dots \quad (16.37)$$

En las Ecs.(16.34) a (16.37) debe tomarse el signo positivo para los términos correspondientes a los flujos mutuos que refuercen al flujo propio $\phi_{c\alpha\alpha}$ y el signo negativo para los que lo debiliten. Para determinar si los flujos mutuos tienen sentido opuesto o igual a $\phi_{c\alpha\alpha}$ deben analizarse los sentidos de las corrientes respecto de los terminales de igual polaridad respecto del flujo. Así por ejemplo, si las corrientes $i_\alpha(t)$ e $i_\beta(t)$ son ambas entrantes (o ambas salientes) a los bornes homólogos, los flujos $\phi_{c\alpha\alpha}$ y $\phi_{c\alpha\beta}$ tienen igual sentido y se toma el signo positivo para la tensión mutua. Si no están dados los sentidos de las corrientes, se los fija arbitrariamente.

En consecuencia, al aplicar la 2ª ley de Kirchoff, se toman con el mismo signo que la tensión en la autoinductancia L_α , todas las tensiones de inductancia mutua para las cuales los flujos mutuos tengan igual sentido al flujo propio $\phi_{c\alpha\alpha}$ y con signo opuesto las que establezcan flujos mutuos contrarios.

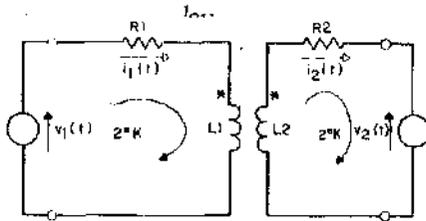


Fig. 16.11

Ejemplo 1:

Plantear las ecuaciones correspondientes al circuito de la Fig.16.11. Aplicando la 2ª ley de Kirchoff a la malla de la izquierda, resulta:

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

Donde se ha tomado $M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$ con signo opuesto a $L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$ pues $i_1(t)$ entra al borne marcado, mientras que $i_2(t)$ sale del borne homólogo.

Análogamente para la malla de la derecha, se tiene:

$$-v_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$$

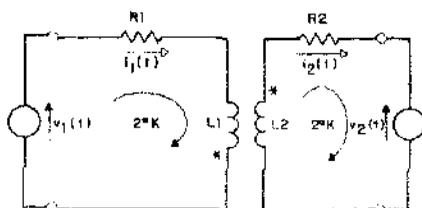


Fig. 16.12

Ejemplo 2:

Plantear las ecuaciones correspondientes al circuito de la Fig. 16.12. En este caso, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son salientes de los bornes homogólogos, de modo que los flujos mutuos y propios se refuerzan entre sí resultando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ -v_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

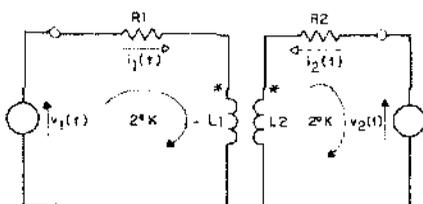


Fig. 16.13

Ejemplo 3:

Plantear las ecuaciones para el circuito de la Fig. 16.13, suponiendo que no se da el sentido de referencia de $i_2(t)$.

En primer término se fija arbitrariamente el sentido de $i_2(t)$, por ejemplo, el indicado con línea de trazos. Luego se plantean las Ecuaciones teniendo en cuenta que para el sentido de $i_2(t)$ adoptado, los flujos se refuerzan entre sí, pues ambas corrientes entran a los bornes homogólogos.

$$\begin{cases} v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ -v_2(t) = -R_2 i_2(t) - L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

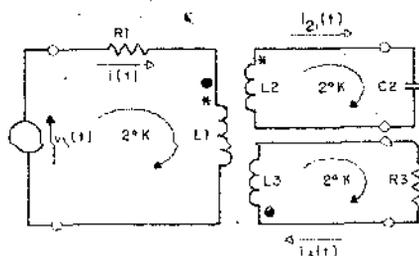


Fig. 16.14

Ejemplo 4:

Plantear las ecuaciones correspondientes al circuito de la Fig. 16.14.

$$\begin{cases} v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} + M_{13} \frac{di_3(t)}{dt} \\ 0 = \frac{1}{c_2} \int_0^t i_2(t) dt + V_{c_2}(0) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \\ 0 = R_3 i_3(t) + L_3 \frac{di_3(t)}{dt} + M_{31} \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Nótese que no existe acoplamiento inductivo entre L_2 y L_3 .

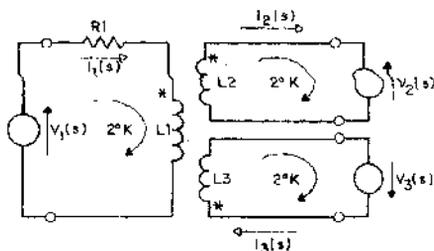


Fig. 16.15

Ejemplo 5:

Plantear las ecuaciones correspondientes al circuito de la Fig. 16.15. En este caso, por tratarse del dominio s las tensiones de inducción mutua serán del tipo mostrado en la Ec. (16.36). Esto es:

$$\begin{cases} V_1(s) = R_1 I_1(s) + sL_1 I_1(s) - sM_{12} I_2(s) + sM_{13} I_3(s) \\ -V_2(s) = R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - sM_{21} I_1(s) - sM_{23} I_3(s) \\ V_3(s) = R_3 I_3(s) + sL_3 I_3(s) + sM_{31} I_1(s) - sM_{32} I_2(s) \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso existe acoplamiento inductivo entre L_2 y L_3

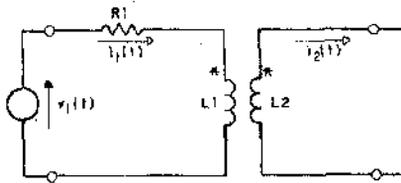


Fig. 16.16

Ejemplo 6:

Plantear las ecuaciones para el circuito de la Fig. 16.16 y determinar la expresión de la energía entregada por el generador. Nótese que este circuito es el de la Fig. 16.3, con el agregado de las polaridades. Las ecuaciones son:

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (16.38)$$

$$0 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.39)$$

Despejando $\frac{di_2(t)}{dt}$ de la Ec. (16.39), se obtiene:

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{M_{21}}{L_2} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.40)$$

Sustituyendo la Ec. (16.40) en la Ec. (16.38), resulta:

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - \frac{M_{12} M_{21}}{L_2} \frac{di_1(t)}{dt}$$

que puede escribirse, recordando que $M_{12} = M_{21} = M$

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.41)$$

La potencia desarrollada por el generador es:

$$p_1(t) = v_1(t) i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1(t) \frac{di_1(t)}{dt} \quad (16.42)$$

y la energía entregada por el generador o y t segundos:

$$W_1 \int_0^t = \int_0^t P_1(t) dt = R_1 \int_0^t i_1^2(t) dt + \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \int_0^t i_1(t) di_1(t)$$

que puede escribirse:

$$W_1 \int_0^t = W_{R_1} \int_0^t + \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2(t) \quad (16.43)$$

donde $W_{R_1} \int_0^t = R_1 \int_0^t i_1^2(t) dt$ es la energía disipada por el resistor R_1 entre 0 y t segundos.

16.7 Asociación de inductores con acoplamiento inductivo en serie y en paralelo

Considérese el circuito de la Fig. 16.17, constituido por dos inductores acoplados inductivamente, conectados en serie.

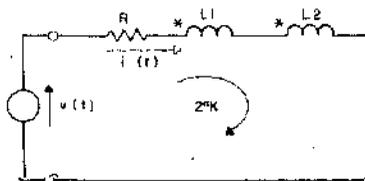


Fig. 16.17

Aplicando la 2ª regla de Kirchhoff, resulta teniendo en cuenta que los flujos propios y mutuos se refuerzan entre sí:

$$v(t) = R i(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + M_{12} \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + M_{21} \frac{di(t)}{dt}$$

teniendo en cuenta que $M_{12} = M_{21} = M$ puede escribirse:

$$v(t) = R i(t) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt} \quad (16.44)$$

Si las polaridades fueran las indicadas en la Fig. 16.18, los flujos propios y mutuos se debilitarían entre sí y la Ec. (16.44) se convertiría en:

$$v(t) = R i(t) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di(t)}{dt} \quad (16.45)$$

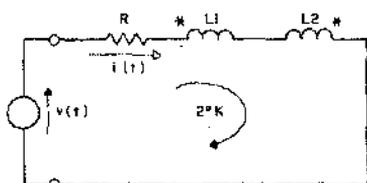


Fig. 16.18

Las Ecs. (16.44) y (16.45) pueden ser resumidas en la siguiente:

$$V(t) = R i(t) + (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di(t)}{dt} \quad (16.46)$$

que permite dibujar el circuito equivalente de la Fig. 16.19, donde:

$$L_{TS} = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (16.47)$$

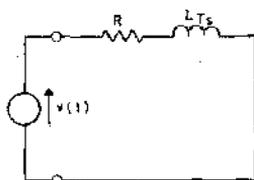


Fig. 16.19

El signo positivo corresponde cuando los flujos se refuerzan y el negativo cuando se debilitan entre sí.

Teniendo en cuenta la Ec. (16.26), la Ec. (16.47) puede ser expresada:

$$L_{TS} = L_1 + L_2 \pm 2k \sqrt{L_1 L_2} \quad (16.48)$$

y si $L_1 = L_2 = L$

$$L_{TS} = 2L \pm 2kL = 2L(1 \pm k) \quad (16.49)$$

Para $k = 0$ se obtiene, como es natural, $L_{TS} = 2L$.

Para $0 < k < 1$, resulta, tomando en cuenta los dos signos de la Ec. (16.49):

$$0 < L_{TS} < 4L$$

Nótese que girando un arrollamiento respecto de otro, pueden variarse M y k en forma continua, cambiando incluso el signo que les antecede en las Ecs. (16.47) a (16.49). De este modo, puede variarse la inductancia total dentro de un amplio margen, sin que se modifique la resistencia, tal como ocurriría si se cambiara el número de espiras mediante un cursor.

Considérese ahora la asociación en paralelo de la Fig. 16.20.

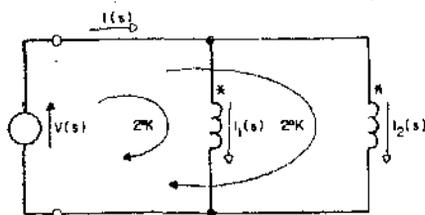


Fig. 16.20

Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff en las dos mallas indicadas en la Fig. 16.20, resulta, teniendo en cuenta que tanto I_1 como $I_2(s)$ entran por los bornes homólogos:

$$\begin{cases} V(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) & (16.50) \\ V(s) = sL_2 I_2(s) + sM I_1(s) & (16.51) \end{cases}$$

Ordenando y despejando $I_1(s)$ e $I_2(s)$, se obtienen:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} V(s) & sM \\ V(s) & sL_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{vmatrix}} = \frac{V(s) s(L_2 - M)}{s^2 L_1 L_2 - s^2 M^2} = \frac{V(s)}{s} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} \quad (16.52)$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} sL_1 & V(s) \\ sM & V(s) \end{vmatrix}}{s^2 L_1 L_2 - s^2 M^2} = \frac{V(s)}{s} \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2} \quad (16.53)$$

Aplicando la ley de Kirchoff y teniendo en cuenta las Ecs. (16.52) y (16.53), resulta:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) = \frac{V(s)}{s(L_1 L_2 - M^2)} (L_2 - M + L_1 - M)$$

$$\therefore I(s) = \frac{V(s)}{s} \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2}$$

y despejando $V(s)$

$$V(s) = s \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} I(s) \quad (16.54)$$

que permite dibujar el circuito equivalente de la Fig. 16.21, donde:

$$L_{Tp} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (16.55)$$

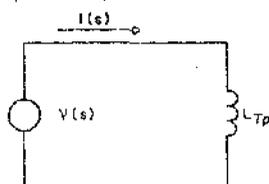


Fig. 16.21

Si las polaridades fueran opuestas, la Ec. (16.55) resultaría:

$$L_{Tp} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (16.56)$$

Las Ecs. (16.55) y (16.56) pueden ser resumidas en la siguiente:

$$L_{Tp} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \quad (16.57)$$

Donde el signo negativo corresponde al caso en que los flujos se refuerzan y el positivo cuando se debilitan entre si. Expresando M en función de k , la Ec. (16.57) queda:

$$L_{Tp} = \frac{L_1 L_2 - k^2 L_1 L_2}{L_1 + L_2 \mp 2k \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{(1 - k^2) L_1 L_2}{L_1 + L_2 \mp 2k \sqrt{L_1 L_2}} \quad (16.58)$$

y si $L_1 = L_2 = L$

$$L_{TP} = \frac{(1-k^2) L^2}{2L \mp 2kL} = \frac{L}{2} \frac{1-k^2}{1 \mp k} \quad (16.59)$$

Para $k = 0$ se obtiene, como es lógico:

$$L_{TP} = \frac{L}{2}$$

Para $0 < k < 1$, resulta, tomando en cuenta ambos signos del denominador de la Ec. (16.59).

$$0 < L_{TP} < L$$

16.8 Circuitos equivalentes con "generadores controlados"

Considérese una rama como la de la Fig. 16.22.a, que incluye un inductor L_α , acoplado inductivamente con otros a través de las inductancias mutuas $M_{\alpha\beta}$ y $M_{\alpha\gamma}$. Supóngase que $\phi_{c\alpha\alpha}$ es reforzado por $\phi_{c\alpha\beta}$ y debilitado por $\phi_{c\alpha\gamma}$, de modo que la tensión total incluyendo el efecto de las inductancias propias y mutuas es, en el dominio temporal:

$$v_\alpha(t) = L_\alpha \frac{di_\alpha(t)}{dt} + M_{\alpha\beta} \frac{di_\beta(t)}{dt} - M_{\alpha\gamma} \frac{di_\gamma(t)}{dt} \quad (16.60)$$

y en el dominio de frecuencia compleja:

$$V_\alpha(s) = sL_\alpha I_\alpha(s) + sM_{\alpha\beta} I_\beta(s) - sM_{\alpha\gamma} I_\gamma(s) \quad (16.61)$$

Nótese que la tensión de autoinductancia

$$V_{L\alpha}(s) = sL_\alpha I_\alpha(s)$$

depende de la corriente $I_\alpha(s)$ que circula por la rama considerada, mientras que las tensiones de inducción mutua.

$$V_{\alpha\beta}(s) = sM_{\alpha\beta} I_\beta(s) \quad \text{y} \quad V_{\alpha\gamma}(s) = sM_{\alpha\gamma} I_\gamma(s)$$

son funciones de las corrientes en otras ramas.

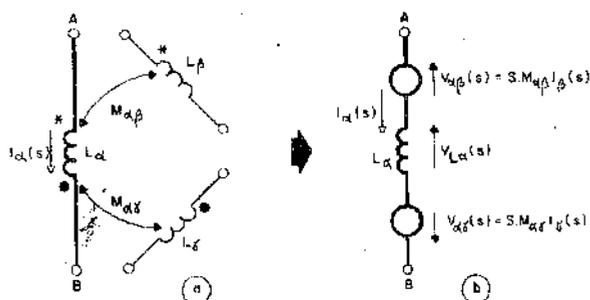


Fig. 16.22

En consecuencia, puede dibujarse un circuito equivalente al de la rama dada que en lugar de tener el acoplamiento inductivo incluya un generador controlado por cada inductancia mutua, tal como se muestra en la Fig. 16.22.b.). Las tensiones de inducción mutua se toman siempre con signo positivo. Su sentido de referencia, es igual al de la tensión en la inductancia propia cuando los flujos se refuerzan y opuesto cuando se debilitan mutuamente.

La tensión mutua es de la forma:

$$\text{En el dominio } t : v_{\alpha\beta}(t) = M_{\alpha\beta} \frac{di_{\beta}(t)}{dt} \quad (16.62)$$

$$\text{En el dominio } s : V_{\alpha\beta}(s) = s M_{\alpha\beta} I_{\beta}(s) \quad (16.63)$$

$$\text{En el dominio } j\omega : \bar{V}_{\alpha\beta} = j\omega M_{\alpha\beta} \bar{I}_{\beta} \quad (16.64)$$

Nótese que para dibujar el circuito equivalente con generadores controlados no es necesario plantear las ecuaciones, ya que se agrega un generador controlado cuya tensión está dada por alguna de las Ecs. (16.62) a (16.64), por cada acoplamiento.

El sentido de la tensión de cada generador controlado se toma igual al de la tensión de autoinductancia cuando los flujos se refuerzan y opuesto cuando se debilitan entre sí.

Ejemplo 1:

Dibujar el modelo con generadores controlados equivalente al circuito de la Fig. 16.14.

En la malla de la izquierda deben incluirse dos generadores controlados, de tensiones:

$$v_{12}(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt}$$

y

$$v_{13}(t) = M_{13} \frac{di_3(t)}{dt}$$

El primero con sentido opuesto a $v_{L1}(t)$ y el segundo con el mismo sentido que $v_{L1}(t)$, ya que $i_1(t)$ e $i_3(t)$ son entrantes a los bornes homólogos mientras que $i_2(t)$ es saliente.

Con igual criterio, se colocan un generador controlado de tensión $v_{21}(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$ en la segunda malla y uno $v_{31}(t) = M_{31} \frac{di_1(t)}{dt}$ en la tercera. En la Fig. 16.22.c) se muestra el circuito equivalente.

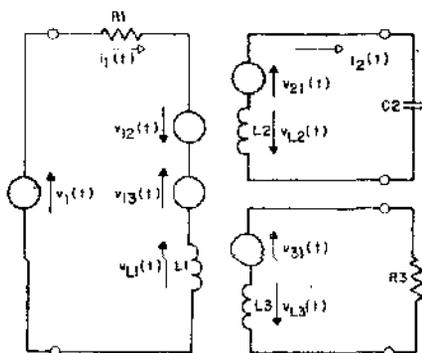


Fig. 16.22

Nótese que aun cuando el circuito equivalente de la Fig. 16.22.c), incluye cuatro "generadores controlados", es pasivo, pues es equivalente al de la Fig. 16.14 donde la única excitación es $v_1(t)$. Por otra parte, haciendo $v_1(t) = 0$, se anulan todas las corrientes y tensiones.

Ejemplo 2:

Dibujar el modelo equivalente con generadores controlados correspondientes al circuito de la Fig. 16.15.

Procediendo como en el caso anterior, pero usando la Ec. (16.63), se obtiene el circuito de la Fig. 16.23.

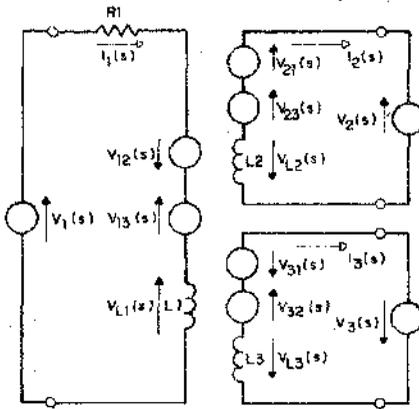


Fig. 16.23

16.9 Aplicación del método de las mallas a circuitos con acoplamiento inductivo

Considérese el circuito de la Fig. 16.24. Las ecuaciones correspondientes a las dos mallas, planteadas como se explicó en el parágrafo 16.6, son las siguientes:

$$\begin{cases} V_1(s) = R_1 I_1(s) + \frac{1}{s C_1} I_1(s) + s L_1 I_1(s) - s M I_2(s) \\ -V_2(s) = R_2 I_2(s) + \frac{1}{s C_2} I_2(s) + s L_2 I_2(s) - s M I_1(s) \end{cases}$$

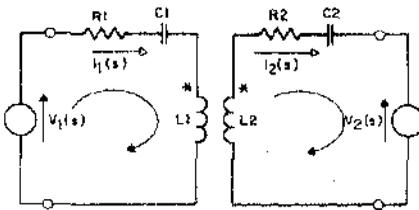


Fig. 16.24

Ordenando según las corrientes queda:

$$\begin{cases} V_1(s) = \left(R_1 + s L_1 + \frac{1}{s C_1} \right) I_1(s) - s M I_2(s) \\ -V_2(s) = -s M I_1(s) + \left(R_2 + s L_2 + \frac{1}{s C_2} \right) I_2(s) \end{cases} \quad (16.65)$$

Si se invirtiera la polaridad de uno de los arrollamientos se obtendría:

$$\begin{cases} V_1(s) = \left(R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} \right) I_1(s) + sMI_2(s) \\ -V_2(s) = +sMI_1(s) + \left(R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} \right) I_2(s) \end{cases} \quad (16.66)$$

Resumiendo los sistemas de las Ecs. (16.65) y (16.66) en una ecuación matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ -V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} & \pm sM \\ \pm sM & R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (16.67)$$

Donde el signo positivo corresponde al caso en que los flujos se refuerzan y el negativo cuando se debilitan mutuamente. Comparando la Ec. (16.67) con la Ec. (16.68) correspondiente al método de las mallas.

$$\begin{bmatrix} \sum_I V(s) \\ \sum_{II} V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (16.68)$$

Puede escribirse:

$$\begin{aligned} \sum_I V(s) &= V_1(s) \quad ; \quad \sum_{II} V(s) = -V_2(s) \\ Z_{11}(s) &= R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} \quad ; \quad Z_{22} = R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} \\ Z_{12} &= Z_{21} = \pm sM \end{aligned}$$

De donde pueden deducirse las siguientes reglas para aplicar el método de las mallas a circuitos con acoplamiento inductivo.

- 1°) Los elementos de la matriz de excitación se calculan como si no existiera el acoplamiento magnético, entre las mallas. Si hay acoplamiento entre dos inductores de una misma malla, se toma la inductancia total L_{TS} dada por la Ec. (16.47), (al terminar el capítulo, ver los ejemplos 16.18.3 y 16.18.4).
- 2°) Las Impedancias propias $Z_{\alpha\alpha}(s)$ se determinan como si no existiera acoplamiento inductivo.
- 3°) Si no existe acoplamiento conductivo las impedancias mutuas o compartidas $Z_{\alpha\alpha}(s)$ se toman iguales a $+sM$ si los flujos se suman y $-sM$ si se debilitan entre sí.
- 4°) Si existen acoplamientos conductivo y magnético, tal como se muestra en la Fig. 16.25, resulta:

$$Z_{\alpha\beta}(s) = -Z(s) \pm sM \quad (16.69)$$

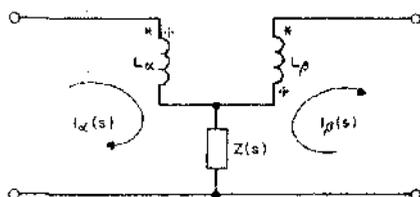


Fig. 16.25

Donde $Z(s)$ es la impedancia compartida conductivamente y sM la impedancia mutua correspondiente al acoplamiento inductivo.

Ejemplo:

Plantear las ecuaciones, del método de las mallas para el circuito de la Fig. 16.26. Aplicando las reglas arriba mencionadas resulta:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ 0 \\ 0 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} & \bar{Z}_{24} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} & \bar{Z}_{34} \\ \bar{Z}_{41} & \bar{Z}_{42} & \bar{Z}_{43} & \bar{Z}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \\ \bar{I}_4 \end{bmatrix}$$

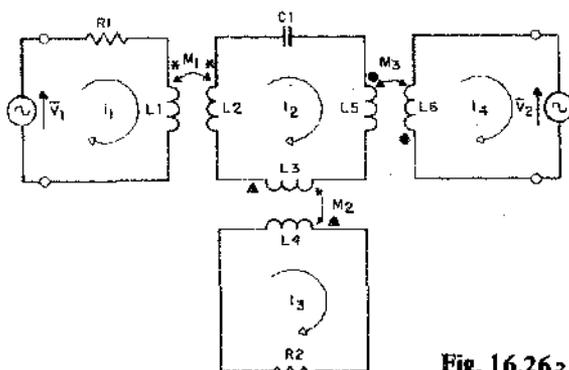


Fig. 16.26

donde:

$$\bar{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

$$\bar{Z}_{22} = j\omega L_2 + j\omega L_3 + j\omega L_5 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\bar{Z}_{33} = R_2 + j\omega L_4$$

$$\bar{Z}_{44} = j\omega L_6$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = -j\omega M_1$$

$$\bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{31} = 0$$

$$\bar{Z}_{14} = \bar{Z}_{41} = 0$$

$$\bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{32} = +j\omega M_2$$

$$\bar{Z}_{24} = \bar{Z}_{42} = +j\omega M_3$$

$$\bar{Z}_{34} = \bar{Z}_{43} = 0$$

16.10 El circuito con acoplamiento inductivo débil como cuadripolo

En la Fig. 16.27 se ha dibujado un circuito con inductancia mutua encastrado en un cuadripolo, respetando los sentidos de referencia introducidos en

el capítulo 15. Planteando las ecuaciones para dichos sentidos de referencia resulta:

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + \dots + sMI_2 \\ V_2(s) = \dots + sMI_1(s) + sL_2 I_2 \end{cases}$$

y comparando con la familia de parámetros \bar{z} .

$$\begin{cases} V_1(s) = \bar{z}_{11} I_1(s) + \bar{z}_{12} I_2(s) \\ V_2(s) = \bar{z}_{21} I_1(s) + \bar{z}_{22} I_2(s) \end{cases}$$

queda:

$$z_{11} = sL_1 ; z_{22} = sL_2$$

$$z_{12} = z_{21} = \dots + sM$$

Donde el signo positivo corresponde al caso en que las corrientes $I_1(s)$ e $I_2(s)$ entran a los bornes marcados.

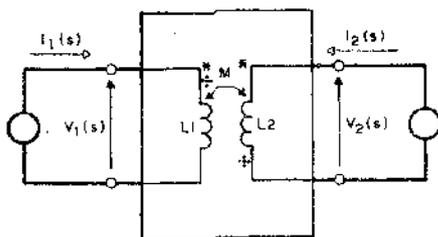


Fig. 16.27

Los parámetros correspondientes a las restantes familias pueden ser obtenidos a través del cuadro de equivalencias de la Fig. 15.19.

16.11 Impedancia reflejada

Considérese el circuito de la Fig. 16.28, constituido por dos mallas acopladas inductivamente. Se ha señalado con trazo continuo un par de bornes homólogos para el cual los flujos se debilitan y punteado otro par para el

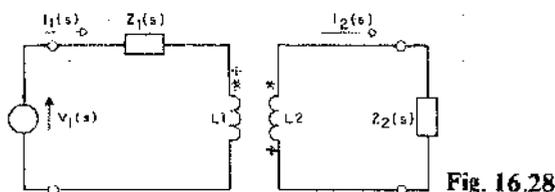


Fig. 16.28

cual los flujos se refuerzan entre sí. Las ecuaciones del método de las mallas para el circuito en estudio son:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (16.70)$$

Donde:

$$Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = \overline{\dots} sM$$

Donde el signo negativo corresponde a los asteriscos dibujados con trazo lleno y el positivo a los punteados.

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & \overline{\dots} sM \\ \overline{\dots} sM & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

despejando $I_1(s)$ resulta:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(s) & \overline{\dots} sM \\ 0 & Z_{22}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & \overline{\dots} sM \\ \overline{\dots} sM & Z_{22}(s) \end{vmatrix}} = V_1(s) \frac{Z_{22}(s)}{Z_{11}(s) Z_{22}(s) - s^2 M^2}$$

De modo que la impedancia de excitación alimentada por el generador, o impedancia de entrada del circuito acoplado es:

$$Z_e(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{V_1(s)}{V_1(s) \frac{Z_{22}(s)}{Z_{11}(s) Z_{22}(s) - s^2 M^2}} = Z_{11}(s) - \frac{s^2 M^2}{Z_{22}(s)} \quad (16.71)$$

Como el generador tiene una impedancia interna nula, $Z_{11}(s)$ es la impedancia que presentaría el circuito si no existiera acoplamiento inductivo. En consecuencia, el término restante puede ser interpretado como la impedancia $Z_R(s)$ reflejada sobre la malla de la izquierda por la de la derecha. Esto es:

$$Z_e(s) = Z_{11}(s) + Z_R(s) \quad (16.72)$$

Donde

$$Z_R(s) = - \frac{s^2 M^2}{Z_{22}(s)} \quad (16.73)$$

Así por ejemplo, la componente resistiva de $Z_R(s)$ representa en la malla de entrada la energía cedida al medio por los resistores de la malla de la derecha.

Nótese que al ser $M^2 = k^2 L_1 L_2$, resulta:

$$Z_R(s) = - \frac{s^2 L_1 L_2 k^2}{Z_{22}(s)} \quad (16.74)$$

De modo que la impedancia reflejada disminuye con el cuadrado del índice de acoplamiento, al alejar los arrollamientos. Obsérvese además que las polaridades de los arrollamientos no afectan el signo de la impedancia reflejada.

Si se trabaja en régimen senoidal permanente, la impedancia reflejada de la Ec. (16.73) se convierte en:

$$\bar{Z}_R = - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\bar{Z}_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_{22}} \quad (16.75)$$

Si $\bar{Z}_{22} = R_{22} + jX_{22}$, reemplazando en la Ec. (16.75) se obtiene:

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} = R_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - jX_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \quad (16.76)$$

La Ec. (16.76) muestra claramente que el signo de la reactancia total de la malla de la derecha o secundario, se invierte al reflejarse sobre la malla conectada al generador o primario.

16.12 Circuito equivalente con una impedancia reflejada y un generador controlado

Según se vio en el párrafo anterior, el primario puede ser caracterizado por las Ecs. (16.72) y (16.73). Esto es:

$$Z_e(s) = Z_{11}(s) + Z_R(s) \quad (16.72)$$

con

$$Z_R(s) = - \frac{s^2 M^2}{Z_{22}(s)} \quad (16.73)$$

Pero al mismo tiempo el secundario puede ser caracterizado por la expresión:

$$0 = Z_{22}(s) I_2(s) + s M I_1(s) \quad (16.77)$$

Las Ecs. (16.72), (16.73) y (16.77) permiten construir otro circuito equivalente al dado, que en lugar de tener dos generadores controlados, tenga una impedancia reflejada y un generador controlado. En efecto, si se aplica la segunda regla de Kirchhoff a las mallas del circuito equivalente de la Fig. 16.29, se obtienen las Ecs. (16.72) y (16.77).

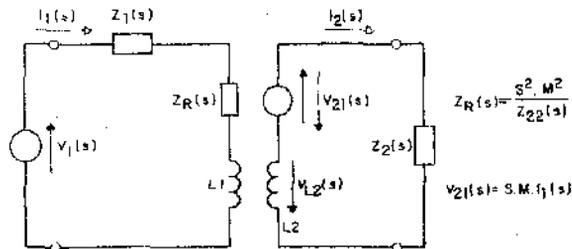


Fig. 16.29

El circuito equivalente de la Fig. 16.29, permite efectuar un análisis de tipo cualitativo para determinar la influencia que tiene sobre un inductor la aproximación de un blindaje. En efecto, al acercar el blindaje, las líneas de inducción del campo creado por el inductor, son cortadas por la superficie metálica y el conjunto se comporta como un circuito acoplado inductivamente, donde el secundario tiene una resistencia R_{22} y una reactancia X_{22} de carácter inductivo.

Según la Ec. (16.76), la impedancia reflejada será:

$$\bar{Z}_R = R_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j X_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

y la impedancia presentada por el inductor será:

$$\bar{Z}_e = \bar{Z}_{11} + \bar{Z}_R = R_1 + j\omega L_1 + R_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - j X_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

ordenado resulta:

$$\bar{Z}_e = \left(R_1 + R_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) + j\omega \left(L_1 - X_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) \quad (16.78)$$

La Ec. (16.78) muestra que al acercar un blindaje aumenta la resistencia efectiva y disminuye la inductancia efectiva del inductor. En consecuencia, el factor de mérito disminuirá al acercar el blindaje, ya que:

$$Q = \frac{|X_e|}{R_e} = \frac{\left| \omega \left(L_1 - X_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) \right|}{R_1 + R_{22} \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}} \quad (16.79)$$

16.13 Aplicación del teorema de Thevenin a circuitos con acoplamiento inductivo

Se trata de aplicar el teorema de Thevenin para sustituir la parte del circuito de la Fig. 16.30 que se encuentra hacia la izquierda de los bornes C y D.

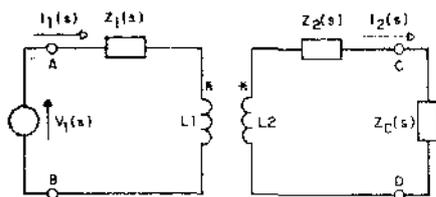


Fig. 16.30

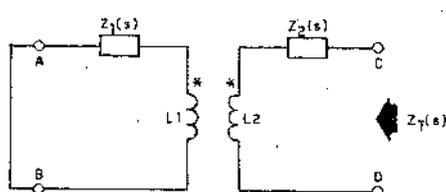


Fig. 16.31

La impedancia de Thevenin es la que presenta el circuito entre los terminales C y D , con los generadores desactivados y la carga desconectada. Esto es, la impedancia indicada en la Fig. 16.31. Si se imagina excitado el circuito desde los terminales C y D la impedancia que estos presentarán será la propia de la malla de la derecha.

$$Z_{22}(s) = sL_2 + Z_2(s)$$

más la reflejada por la malla de la izquierda sobre la derecha. Es decir:

$$Z_{R21}(s) = -\frac{s^2 M^2}{Z_{11}(s)} = -\frac{s^2 M^2}{Z_1(s) + sL_1}$$

En consecuencia:

$$Z_T(s) = sL_2 + Z_2(s) - \frac{s^2 M^2}{Z_1(s) + sL_1} \quad (16.80)$$

La tensión de Thevenin, es la que existe entre los terminales C y D con la carga desconectada, tal como se indica en el circuito equivalente de la Fig. 16.32, donde $Z_{R12}(s) = 0$ pues $Z_{22} \rightarrow \infty$ por estar el secundario a circuito abierto. Por tal causa, se denomina $I_{10}(s)$ a la corriente del primario.

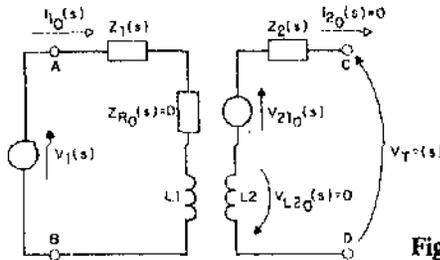


Fig. 16.32

Como $I_{20}(s) = 0$, resulta $V_{L20}(s) = 0$ al igual que la caída de tensión en $Z_2(s)$. En consecuencia, aplicando la 2ª regla de Kirchoff resulta, para el sentido de $V_{210}(s)$ en el caso considerado.

$$V_T(s) = V_{210}(s) = sMI_{10}(s) \quad (16.81)$$

Donde

$$I_{10}(s) = \frac{V_1(s)}{sL_1 + Z_1(s)} \text{ por ser } Z_{R0}(s) = 0$$

quedando finalmente:

$$V_T(s) = sM \frac{V_1(s)}{sL_1 + Z_1(s)} \quad (16.82)$$

que permite dibujar el circuito equivalente de la Fig. 16.33 para la malla de la derecha. Nótese que si las polaridades se cambiaran, las Ecs. (16.81) y (16.82) tendrían el signo opuesto pero la Ec. (16.80) no se modifica.

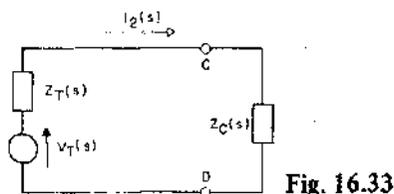


Fig. 16.33

16.14 Diagramas fasoriales de circuitos con acoplamiento inductivo

Al construirse estos diagramas fasoriales, debe tenerse en cuenta que las tensiones de inducciones mutuas dependen de la corriente en una malla, pero aparecen en la suma fasorial correspondiente a la otra malla.

Considérese, a manera de ejemplo, el circuito de la Fig. 16.34.a.) del cual se desea dibujar el diagrama fasorial. Se suponen conocidos los valores de todos los parámetros, así como el módulo de la corriente \bar{I}_2 . Para efectuar la construcción se elige \bar{I}_2 como fasor de referencia asignándole arbitrariamente fase cero.

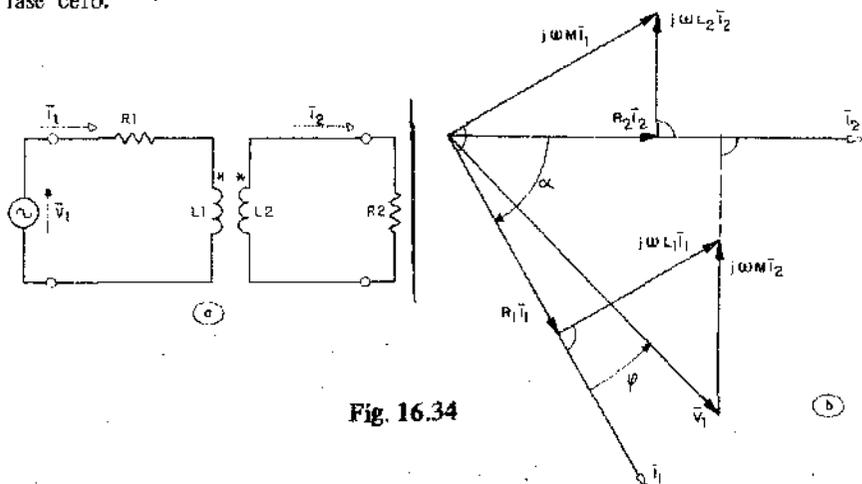


Fig. 16.34

En fase con \bar{I}_2 se dibuja, en la escala de tensiones elegida, las tensiones $R_2 I_2$ en fase con \bar{I}_2 y $j\omega L_2 I_2$, adelantada en 90° con respecto a dicha corriente, por estar afectada del operador j . Puesto que en la malla de la derecha solo actúan las tensiones dibujadas y la de inductancia mutua, el triángulo de tensiones debe cerrarse con la tensión $j\omega M I_1$ tal como se mues-

tra en la Fig. 16.34.b). Para determinar el sentido del fasor dibujado en último término deben analizarse los sentidos de las corrientes \bar{I}_1 e \bar{I}_2 respecto de los bornes de igual polaridad respecto del flujo. En la Fig. 16.34.a) se observa que \bar{I}_1 entra al borne marcado, mientras que \bar{I}_2 sale del homólogo.

En consecuencia, los flujos se debilitan y $j\omega M\bar{I}_1$ debe tener sentido opuesto al de $j\omega L_1\bar{I}_2$ en el triángulo de tensiones. En efecto, la ecuación de la malla considerada es:

$$0 = R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \quad (16.83)$$

Conocido el fasor $j\omega M \bar{I}_1$, la determinación del módulo y la fase de \bar{I}_1 es inmediata.

En la Fig. 16.34.b) se ha dibujado \bar{I}_1 atrasada 90° respecto de $j\omega M \bar{I}_1$. En fase con \bar{I}_1 se tiene la tensión $R_1 \bar{I}_1$, adelantada 90° está $j\omega L_1 \bar{I}_1$ y, finalmente adelantada 90° respecto de \bar{I}_2 se encuentra $j\omega M \bar{I}_2$. Sumando fasorialmente estas tres tensiones mediante una poligonal, se obtiene la tensión aplicada \bar{V}_1 , tal como corresponde a la ecuación de la malla entrada:

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 - j\omega M \bar{I}_2 \quad (16.84)$$

Nótese que el ángulo α debe ser menor que $\pi/2$ ya que ($L_2 > 0$). \bar{V}_1 queda comprendido entre \bar{I}_1 e \bar{I}_2 .

En la Fig. 16.35.b) se muestra el diagrama fasorial correspondiente al circuito de la Fig. 16.35.a), en el cual se han cambiado las polaridades de modo que los flujos propios y mutuos se refuerzan entre sí.

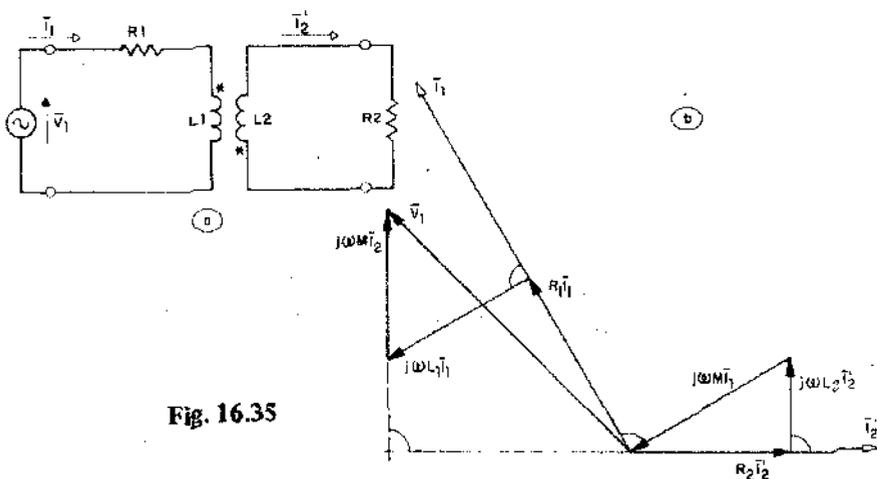


Fig. 16.35

El diagrama responde a las ecuaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \\ 0 = R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \end{array} \right. \quad (16.85)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \\ 0 = R_2 \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1 \end{array} \right. \quad (16.86)$$

Es interesante destacar que al despejar \bar{I}_2 del sistema de las Ecs. (16.83) y (16.84) que corresponde al circuito de la Fig. 16.34.a), resulta:

$$\bar{I}_2 = \frac{j\omega M \bar{V}_1}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad (16.87)$$

Si en cambio se despeja \bar{I}_2 del sistema de las Ecs. (16.85) y (16.86) correspondientes al circuito de la Fig. 16.35.a), se obtiene:

$$\bar{I}'_2 = \frac{-j\omega M \bar{V}_1}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

Es decir que:

$$\bar{I}'_2 = -\bar{I}_2 \quad (16.88)$$

De modo que al tomar \bar{I}'_2 con signo negativo en todos los fasores en que interviene en el diagrama de la Fig. (16.35.b), quedan invertidos los sentidos de I_2 , $R_2 \bar{I}'_2$, $j\omega L_2 \bar{I}'_2$ y $j\omega M \bar{I}'_2$, obteniéndose, como es natural, el diagrama de la Fig. 16.34.b), que es el que corresponde a la realidad física, de acuerdo a la Ley de Lenz.

16.15 Respuesta de frecuencia de los circuitos con acoplamiento inductivo débil

16.15.1) **Introducción:** El análisis de la respuesta de frecuencia de los circuitos con acoplamiento inductivo débil, se realiza de la misma manera que para los modelos circuitales sin acoplamiento. Esto es, se debe hallar la función operacional de transferencia $H(s)$ que corresponda y luego obtener las curvas de $H(\omega)$ y $O(\omega)$ a partir de la configuración de polos y ceros, o mediante los gráficos asintóticos Bode o bien con un análisis cualitativo y cuantitativo tradicionales. La cantidad de polos de $H(s)$ estará directamente relacionada con el número de elementos reactivos del circuito. Así, para el circuito

de la Fig. 16.36, en el que existen dos elementos reactivos, la función $H(s)$ está dada por la Ec. (16.89), que presenta dos polos:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \\
 &= \frac{R_2}{\sqrt{L_1 L_2}} \frac{k}{1 - k^2} \frac{s}{s^2 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right) \frac{1}{1 - k^2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \frac{1}{1 - k^2}}
 \end{aligned} \quad (16.89)$$

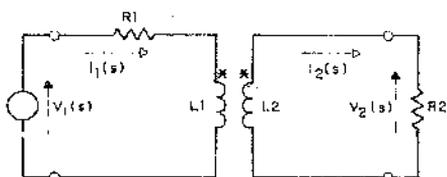


Fig. 16.36

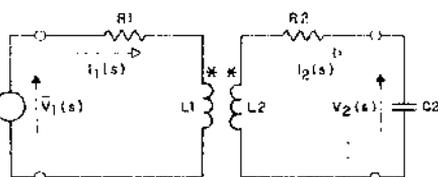


Fig. 16.37

En la Fig. 16.37 se muestra un circuito con sintonía simple que se emplea en los amplificadores de radiofrecuencia sintonizados acoplados por transformador. El circuito mencionado posee 3 elementos reactivos y su transmitancia de tensiones, dada por la Ec. (16.90), posee 3 polos.

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k \omega_0^2}{1 - k^2}$$

$$\frac{s}{s^3 + \frac{1}{1 - k^2} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right) s^2 + \left(\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} + \frac{1}{L_2 C_2}\right) s + \frac{R_1}{L_1 L_2 C_2}} \quad (16.90)$$

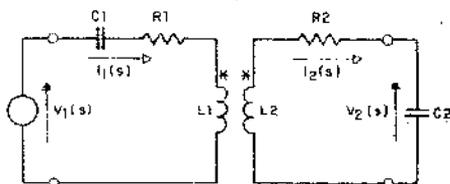


Fig. 16.38

Finalmente, el circuito doble sintonizado de la Fig. 16.38, de gran aplicación en la práctica, que será analizado con todo detalle en los dos párrafos

siguientes, tiene cuatro elementos reactivos y su transmitancia de tensiones $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ posee 4 polos, según muestran la Fig. 16.45 y la Ec. (16.118).

La diferencia que estas funciones $H(s)$ presentan con las estudiadas en los capítulos anteriores reside en que dependen del índice de acoplamiento k . Por lo tanto, presentará gran interés la investigación de la manea en que k afecta la forma de la curva de respuesta de amplitud, así como la determinación de su valor más adecuado para cada configuración. A manera de ejemplo se analizará con detalle la respuesta de frecuencia del circuito acoplado doble sintonizado.

Se ha elegido este circuito por corresponder al caso más general, para el que pueden extraerse interesantes conclusiones y además por ser el más empleado en la práctica.

16.15.2) Análisis cualitativo de la respuesta de frecuencia del circuito doble sintonizado con acoplamiento inductivo débil. Se trabajará en el dominio $j\omega$ con el circuito equivalente de la Fig. 16.39. Se supone que el primario y el secundario tienen igual factor de selectividad y frecuencias de resonancia coincidentes.

Esto es:

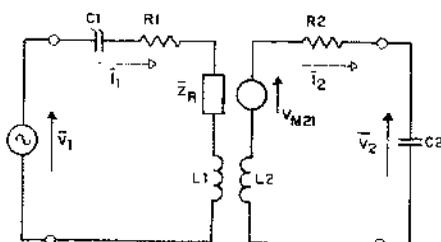


Fig. 16.39

Esto es:

$$\frac{\omega_0 L_1}{R_1} = Q_{01} = Q_{02} = \frac{\omega_0 L_2}{R_2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_{01} = \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

La impedancia reflejada por el secundario sobre el primario está dada por la expresión:

$$\bar{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \quad (16.91)$$

y teniendo en cuenta que

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

puede escribirse

$$\bar{Z}_R = \frac{\omega^2 L_1 L_2 k^2}{R_2 + j X_2} \quad \text{con } X_2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \quad (16.92)$$

La Ec. (16.92) muestra lo siguiente:

- a) Z_R es directamente proporcional al cuadrado del índice de acoplamiento k .
- b) A la frecuencia de resonancia ω_0 el denominador se hace mínimo y Z_R toma su máximo valor:

$$\bar{Z}_{R0} = \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2} k^2 \quad (16.93)$$

- c) Al racionalizar la Ec. (16.92), se obtiene:

$$\bar{Z}_R = \omega^2 L_1 L_2 k^2 \left[\frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} - j \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right] \quad (16.94)$$

La Ec. (16.94) muestra que la parte reactiva de \bar{Z}_R tiene signo opuesto a la de \bar{Z}_{22} . Esto es cuando el secundario es inductivo, se refleja sobre el primario como capacitivo y viceversa.

Se analizarán en primer término las curvas de las corrientes I_1 y V_2 en función de la frecuencia, para distintos valores de k . La corriente I_1 está dada por

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_{11} + \bar{Z}_R} = \frac{\bar{V}_1}{R_1 + j \left(\omega L_1 + \frac{1}{\omega C_1} \right) + \bar{Z}_R} \quad (16.95)$$

La tensión de inducción mutua es:

$$\bar{V}_{M21} = j\omega M \bar{I}_1 = j\omega \sqrt{L_1 L_2} k \bar{I}_1 \quad (16.96)$$

Resultando la corriente, \bar{I}_2 :

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{M21}}{\bar{Z}_{22}} = j\omega L_1 L_2 k \bar{I}_1 \bar{Y}_{22} \quad (16.97)$$

y finalmente la tensión \bar{V}_2 :

$$\bar{V}_2 = \frac{\bar{I}_2}{j\omega C_2} = \frac{j\omega L_1 L_2}{j\omega C_2} k \bar{I}_1 \bar{Y}_{22} = \left(\frac{L_1 L_2}{C} k \right) \bar{I}_1 \bar{Y}_{22} \quad (16.98)$$

Se comenzará el análisis suponiendo que el acoplamiento es muy débil
 $\kappa \ll 1$

En estas condiciones, la impedancia reflejada \bar{Z}_R , que según la Ec. (16.92) es proporcional al cuadrado de k , se hace despreciable frente a la impedancia propia del primario \bar{Z}_{11} . La Ec. (16.95) queda entonces:

$$\bar{I}_1 \cong \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_{11}} = \frac{\bar{V}_1}{R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)} \quad (16.99)$$

que corresponde a un circuito resonante serie como el analizado en el capítulo 12. En la Fig. 16.40 se muestra la curva correspondiente.

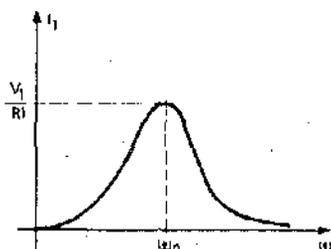


Fig. 16.40

Para analizar la forma de V_2 , se parte de la Ec. (16.98)

$$\bar{V}_2 = \left(\frac{L_1 L_2}{C} k \right) \bar{I}_1 \bar{Y}_{22} \quad (16.98)$$

El factor $\left(\frac{L_1 L_2}{C_2} k\right)$ es constante para una configuración dada, mientras que \bar{I}_1 y \bar{Y}_{22} son dos curvas de resonancia simples que presentan un máximo para $\omega = \omega_0$ y que poseen la misma selectividad ya que $Q_{01} = Q_{02}$.

En consecuencia V_2 estará representada por una curva de mayor selectividad, con un máximo para $\omega = \omega_0$, tal como muestra la Fig. 16.41.

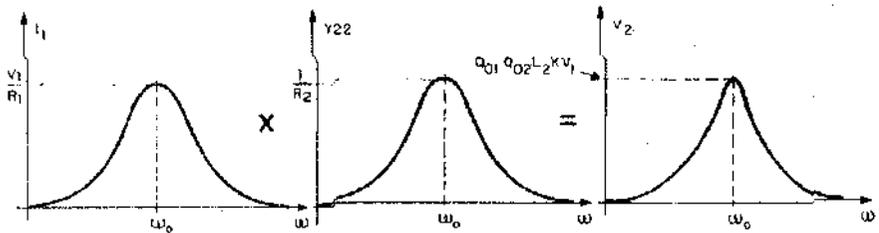


Fig. 16.41

Supóngase ahora que k es suficientemente elevado como para que exista una marcada influencia del secundario sobre el primario. En estas condiciones, ocurre lo siguiente:

- 1º) Para $\omega = \omega_0$ la impedancia toma su máximo valor, dado por la Ec. (16.93).

$$\bar{Z}_{R0} = \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_2} k^2$$

Consecuentemente la corriente I_{10} resulta menor que para acoplamiento despreciable, pues aumenta la resistencia del primario según muestra la Ec. (16.100).

$$\bar{I}_{10} = \frac{\bar{V}_1}{R_1 + \bar{Z}_{R0}} = \frac{\bar{V}_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2} k^2} \quad (16.100)$$

- 2º) Para $\omega > \omega_0$, \bar{Z}_{22} es inductiva y por lo tanto Z_R resulta capacitiva. En consecuencia, si el acoplamiento es suficientemente fuerte, llega a cancelar la reactancia inductiva del primario, produciendo una resonancia que se manifiesta con un pico en la curva de I_1 para $\omega_{M2} > \omega_0$.
- 3º) Para $\omega < \omega_0$, \bar{Z}_{22} es capacitiva y se refleja como inductiva. Como en el caso anterior, puede llegar a cancelar la reactancia capacitiva del primario dando lugar a un pico de resonancia para $\omega_{M1} < \omega_0$.

La curva de I_1 en función de ω se representa en la Fig. 16.42.

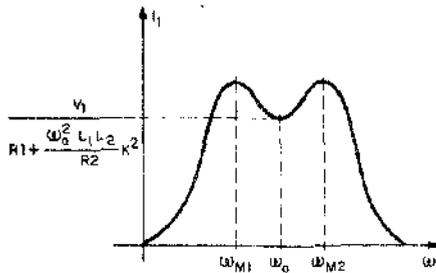


Fig. 16.42 :

4º) La curva de V_2 también presenta 2 picos, levemente más juntos y con un valle menos pronunciado.

Esto es así ya que V_2 depende del producto de I_1 por Y_{22} , de acuerdo a la Ec. (16.97) y la Fig. 16.43.

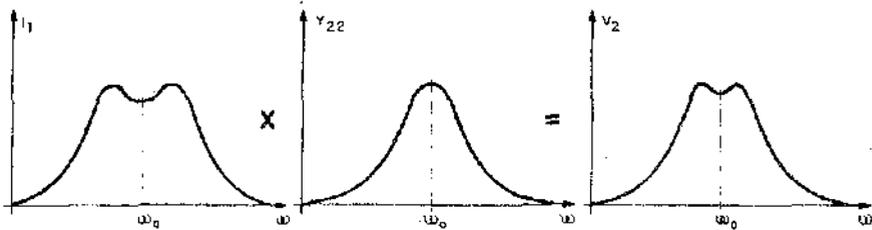


Fig. 16.43

Además, por haber aumentado el acoplamiento, la curva de V_2 para acoplamiento más fuerte estará por encima de la correspondiente al más débil.

Comparando la curva de V_2 de la Fig. 16.40, dibujada para acoplamiento muy débil, con la de la Fig. 16.43, correspondiente a acoplamiento fuerte se intuye que debe existir algún valor particular del índice de acoplamiento que corresponde a la transición entre las curvas de V_2 que poseen uno y dos máximos.

Este valor particular de $k = k_t$ se denomina acoplamiento transicional y cuando es $Q_{01} = Q_{02}$ coincide con el acoplamiento crítico k_C , que permite obtener la mayor amplitud de V_2 para $\omega = \omega_0$, tal como muestra la Fig. 16.44.

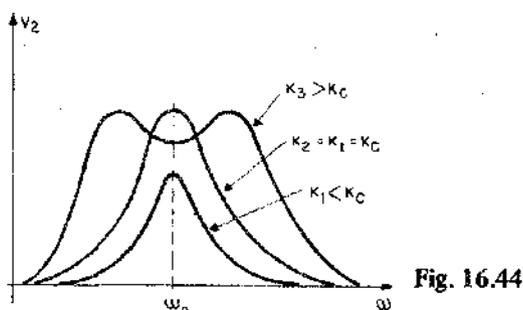


Fig. 16.44

16.15.3) **Análisis cuantitativo de la respuesta del circuito doble sintonizado con acoplamiento débil:** Se estudiará nuevamente el circuito de la Fig. 16.38, trabajando ahora en el dominio de frecuencia compleja, para completar el análisis conceptual del párrafo anterior. Las ecuaciones del método de las mallas correspondientes al circuito de la Fig. 16.38 son:

$$\begin{cases} V_1(s) = Z_{11}(s) I_1(s) + Z_{12}(s) I_2(s) \\ 0 = Z_{21}(s) I_1(s) + Z_{22}(s) I_2(s) \end{cases}$$

Resolviendo para $I_2(s)$ se obtiene:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & V_1(s) \\ Z_{21}(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{vmatrix}} = \frac{V_1(s) Z_{21}(s)}{Z_{11}(s) Z_{22}(s) - Z_{12}(s) Z_{21}(s)} \quad (16.101)$$

y como:

$$V_2(s) = \frac{1}{s C_2} I_2(s) \quad (16.102)$$

Sustituyendo la Ec. (16.101) en la (16.102) se obtiene la transmitancia de tensiones $H(s)$ buscada:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s C_2} \frac{Z_{21}(s)}{Z_{11}(s) Z_{22}(s) - Z_{12}(s) Z_{21}(s)} \quad (16.103)$$

Interesa investigar cómo varía $H(\omega_0) = \left| \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0}$ en función del índice de acoplamiento k , para determinar el valor óptimo de este. Para ello se expresará la Ec. (16.103) para régimen senoidal permanente, a la frecuencia de resonancia del primario y el secundario que se suponen coincidentes. En estas condiciones es:

$$\bar{Z}_{110} = R_1 + j\omega_0 L_1 + \frac{1}{j\omega_0 C_1} = R_1 \quad (16.104)$$

$$\bar{Z}_{220} = R_2 + j\omega_0 L_2 + \frac{1}{j\omega_0 C_2} = R_2 \quad (16.105)$$

$$\bar{Z}_{120} = Z_{210} = -j\omega_0 M = -j\omega_0 k \sqrt{L_1 L_2} \quad (16.106)$$

Reemplazando las Ecs. (16.104) a (16.106) en la Ec. (16.103) resulta:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0} &= \frac{j\omega_0 k \sqrt{L_1 L_2}}{j\omega_0 C_2} \frac{1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 L_1 L_2 k^2} = \\ &= \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{C_2} \frac{1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 L_1 L_2 k^2} \end{aligned}$$

Sacando factor común $\omega_0^2 L_1 L_2$ en el denominador y recordando que $\omega_0^2 L_2 C_2 = 1$, queda:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0} &= \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{\omega_0^2 L_1 L_2 C_2} \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{\omega_0^2 L_1 L_2} + k^2} = \\ &= \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{\omega_0^2 L_1 L_2} + k^2} \quad (16.107) \end{aligned}$$

y como los factores de selectividad del primario y el secundario son:

$$Q_{01} = \frac{\omega_0 L_1}{R_1} \quad \text{y} \quad Q_{02} = \frac{\omega_0 L_2}{R_2} \quad (16.108)$$

sustituyendo sus valores en la Ec. (16.107), resulta finalmente:

$$\left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{\frac{1}{Q_{01} Q_{02}} + k^2} \quad (16.109)$$

Como es natural, por estar en resonancia resulta $\left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0} = \left| \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0}$. Derivando la Ec. (16.109) respecto de k e igualando a cero, se obtiene el valor óptimo de k , llamado coeficiente de acoplamiento crítico k_c para el cual es $\left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{\omega_0}$ máximo.

$$\frac{d}{dk} \left| \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right|_{\omega_0} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left[\frac{\left(\frac{1}{Q_{01} Q_{02}} + k^2 \right) - k \cdot 2k}{\left(\frac{1}{Q_{01} Q_{02}} + k^2 \right)^2} \right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{Q_{01} Q_{02}} + k_c^2 - 2k_c^2 = 0$$

De donde surge:

$$k_c = \frac{1}{\sqrt{Q_{01} Q_{02}}} \quad (16.110)$$

Es interesante hallar el valor que toma la impedancia reflejada para $\omega = \omega_0$ y $k = k_c$. La expresión de \bar{Z}_{RC} es:

$$\bar{Z}_{RC} = \frac{\omega_0^2 M_0^2}{\bar{Z}_{220}} = \frac{\omega_0^2 k_c^2 L_1 L_2}{\bar{Z}_{220}}$$

que puede escribirse, teniendo en cuenta las Ecs. (16.105) y (16.110):

$$\bar{Z}_{RC} = \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2 Q_{01} Q_{02}} \quad (16.111)$$

y sustituyendo en la Ec. (16.111) los valores de Q_{01} y Q_{02} dados por las Ec. (16.108):

$$Z_{RC} = \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2 \frac{\omega_0 L_1}{R_1} \frac{\omega_0 L_2}{R_2}} = R_1 \quad (16.112)$$

Puede decirse entonces, que el acoplamiento crítico es aquel para el cual la tensión $V_2(\omega_0)$ toma su máximo valor y la impedancia reflejada por el secundario sobre el primario a la frecuencia de resonancia, es igual a la resistencia R_1 propia del primario.

Esto significa que cuando se tiene el acoplamiento crítico, la mitad de la potencia disipada al medio es cedida por el primario y la otra mitad por el secundario.

Se retomará ahora el análisis general en el dominio de la frecuencia compleja. Se supondrá para facilitar el desarrollo, que además de resonar a la misma frecuencia, el primario y el secundario tienen factores de selectividad iguales.

$$\text{Esto es:} \quad \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$$

$$Q_{01} = Q_{02} = Q_0$$

$$\text{como} \quad Q_{01} = \frac{\omega_0 L_1}{R_1} = Q_{02} = \frac{\omega_0 L_2}{R_2} = Q_0$$

$$\text{resulta:} \quad \frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2} = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (16.113)$$

$$\text{Por otra parte:} \quad \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_0^2 \quad (16.114)$$

teniendo en cuenta las Ecs. (16.113) y (16.114), las expresiones de las impedancias propias y mutuas pueden escribirse:

$$\begin{aligned} Z_{11}(s) &= R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{L_1}{s} \left(s^2 + \frac{R_1}{L_1} s + \frac{1}{L_1 C_1} \right) \\ &= \frac{L_1}{s} \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right) \end{aligned} \quad (16.115)$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{22}(s) &= R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{L_2}{s} \left(s^2 + \frac{R_2}{L_2} s + \frac{1}{L_2 C_2} \right) = \\ &= \frac{L_2}{s} \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right)\end{aligned}\quad (16.116)$$

$$\bar{Z}_{12}(s) = \bar{Z}_{21}(s) = -sM = -sk\sqrt{L_1 L_2} \quad (16.117)$$

Sustituyendo las Ecs. (16.115) a (16.117) en la Ec. (16.103) resulta:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sC_2} \frac{sk\sqrt{L_1 L_2}}{\frac{L_1}{s} \left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right)^2 - s^2 k^2 L_1 L_2}$$

que puede escribirse, sacando factor común $\frac{L_1 L_2}{s^2}$ en el denominador:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k\sqrt{L_1 L_2}}{C_2 L_1 L_2} \frac{s^2}{\left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right) - k^2 s^2}$$

Teniendo en cuenta que

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

el denominador puede ponerse como sigue:

$$H(s) = \frac{k\sqrt{L_1 L_2}}{C_2 L_1 L_2}$$

$$\frac{s^2}{\left[\left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right) + k s^2 \right] \left[\left(s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right) - k s^2 \right]}$$

y agrupando los términos en s^2 del denominador

$$H(s) = \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{C_2 L_1 L_2} \cdot \frac{s^2}{\left[s^2 (1+k) + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right] \left[s^2 (1-k) + \frac{\omega_0}{Q_0} s + \omega_0^2 \right]}$$

Recordando que $\frac{1}{C_2 L_2} = \omega_0^2$ y haciendo unitarios los coeficientes de los términos en s^2 del denominador queda:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2 \sqrt{L_1 L_2} k}{L_1 (1+k)(1-k)} \cdot \frac{s^2}{\left[s^2 + \frac{\omega_0}{Q(1+k)} s + \frac{\omega_0^2}{1+k} \right] \left[s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0(1-k)} s + \frac{\omega_0^2}{1-k} \right]}$$

Resultando finalmente:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \omega_0^2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{1-k^2} \cdot \frac{s^2}{\left[s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0(1+k)} s + \frac{\omega_0^2}{1+k} \right] \left[s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0(1-k)} s + \frac{\omega_0^2}{1-k} \right]} \quad (16.118)$$

Esta transmitancia de tensiones posee un cero doble en el origen y otro, también doble en el punto impropio del plano s .

Además tiene 4 polos dados por:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2 Q_0 (1+k)} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4 Q_0^2 (1+k)^2} - \frac{\omega_0^2}{1+k}} \quad (16.119)$$

$$p_{3,4} = -\frac{\omega_0}{2 Q_0 (1-k)} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4 Q_0^2 (1-k)^2} - \frac{\omega_0^2}{1-k}} \quad (16.120)$$

Como para los circuitos selectivos es $Q_0 \gg 1$, los polos resultan complejos conjugados y las Ecs. (16.119) y (16.120) se pueden escribir:

$$p_{1;2} = -\frac{\omega_0}{2Q_0(1+k)} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2(1+k)}} \quad (16.121)$$

y

$$p_{3;4} = -\frac{\omega_0}{2Q_0(1-k)} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2(1-k)}} \quad (16.122)$$

En la Fig. 16.45 se ha representado la configuración de polos y ceros de $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$

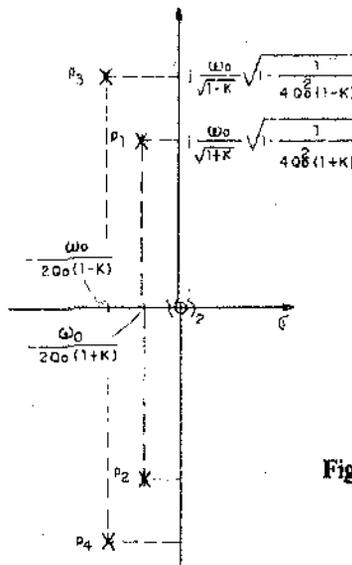


Fig. 16.45

Suponiendo que $Q_0 > 5$ y $k < 0,5$ pueden escribirse las Ecs. (16.121) y (16.122) como sigue, cometiendo un error menor del 1%:

$$p_{1;2} \cong -\frac{\omega_0}{2Q_0(1+k)} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad (16.123)$$

$$p_{3;4} \cong -\frac{\omega_0}{2Q_0(1-k)} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \quad (16.124)$$

En general Q_0 toma valores del orden de 100 o superiores. Reemplazando este valor de Q_0 en la Ec. (16.110) resulta $k_c = 0,01$. Es decir que en la práctica suele ser $k \ll 1$. Aceptando que esto se cumple, puede suponerse que las componentes reales de los cuatro polos son coincidentes, lo que facilita notablemente las construcciones geométricas posteriores.

En estas condiciones:

$$p_{1;2} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}$$

$$p_{3;4} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$$

que pueden escribirse, teniendo en cuenta que

$$(1 \pm k)^{-n} = 1 \mp n k + \frac{n(n+1)}{2!} k^2 \mp \dots \text{ con } k^2 < 1$$

y

$$(1 \pm k)^{-n} \cong 1 \mp n k \quad \text{cuando } k^2 \ll 1$$

$$p_{1;2} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j \omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right) \quad (16.125)$$

$$p_{3;4} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j \omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (16.126)$$

En la Fig. 16.46 se muestra la configuración de polos y ceros para un valor genérico de k , para $Q_0 \gg 1$ y $k \ll 1$, de modo que sean válidas las Ecs. (16.125) y (16.126).

La respuesta de frecuencia de amplitud, determinada como se explicó en el capítulo 11, parágrafo 11.7, está dada por:

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = A_0 \frac{|\bar{A}|^2}{|\bar{B}| |\bar{C}| |\bar{D}| |\bar{E}|} \quad (16.127)$$

Donde \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} y \bar{E} son los factores dirigidos desde los ceros y los polos al punto del eje $j\omega$ considerado.

Como $Q_0 \gg 1$, resulta:

$$\omega_0 \left(1 \pm \frac{k}{2}\right) \cong \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

por lo cual, en las proximidades de ω_0 es:

$$\sqrt{|\bar{D}| |\bar{E}|} \cong 2 |\bar{A}| \quad (16.128)$$

Sustituyendo la aproximación (16.128) en la Ec. (16.127) queda:

$$H(\omega) \cong A_0 \frac{A^2}{4A^2 BC} = \frac{A_0}{4} \frac{1}{BC} \quad (16.129)$$

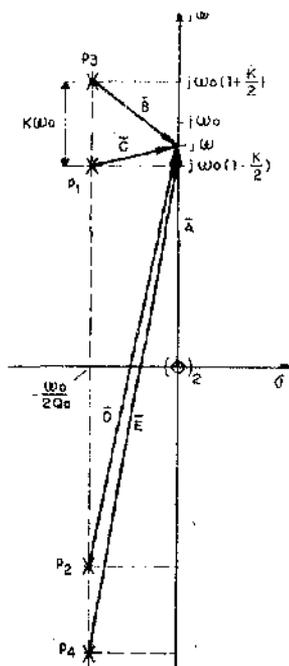


Fig. 16.46

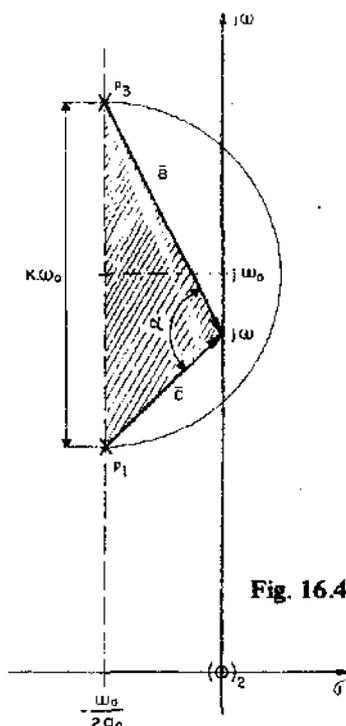


Fig. 16.47

Es decir que la respuesta de amplitud queda gobernada por los dos fasores ubicados en el semiplano superior.

Para las coordenadas de los máximos de $H(\omega)$ se traza una semicircunferencia que tenga como diámetro al segmento que une los dos polos del semiplano superior, tal como muestra la Fig. 16.47. El área del triángulo rayado está dada por el producto de dos de sus lados por la mitad del seno del ángulo comprendido.

Esto es:

$$AREA = \frac{1}{2} |\bar{B}| |\bar{C}| \operatorname{sen} \alpha \quad (16.130)$$

que también puede expresarse como la mitad del producto de la base por la altura

$$AREA = \frac{1}{2} \left(k \omega_0 \right) \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0} \right) = \frac{1}{4} \frac{k \omega_0^2}{Q_0} \quad (16.131)$$

Igualando la Ec. (16.130) y (16.131) queda:

$$\frac{1}{2} BC \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \frac{k \omega_0^2}{Q_0}$$

$$\therefore BC = \frac{k \omega_0^2}{2 Q_0 \operatorname{sen} \alpha} \quad (16.132)$$

Sustituyendo la Ec. (16.132) en la Ec. (16.129) resulta:

$$H(\omega) = \frac{A_0 Q_0 \operatorname{sen} \alpha}{2 k \omega_0^2} \quad (16.133)$$

Según la Ec. (16.118), la constante de escala es:

$$A_0 = \omega_0^2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{1 - k^2} \quad (16.134)$$

Reemplazando la Ec. (16.134) en la (16.133) se obtiene:

$$H(\omega) \cong \omega_0^2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{1 - k^2} \frac{Q_0 \operatorname{sen} \alpha}{2 k \omega_0^2}$$

y simplificando:

$$H(\omega) \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{Q_0}{2 (1 - k^2)} \operatorname{sen} \alpha \quad (16.135)$$

Para un circuito dado, todos los factores de la Ec. (16.135) son constantes, excepto $\operatorname{sen} \alpha$. En consecuencia, $H(\omega)$ será máximo cuando lo sea $\operatorname{sen} \alpha$.

Se presentan tres casos posibles, según que $\frac{k \omega_0}{2}$ sea mayor, menor o igual que $\frac{\omega_0}{2 Q_0}$. En la Fig. 16.48 se muestran las tres posibilidades.

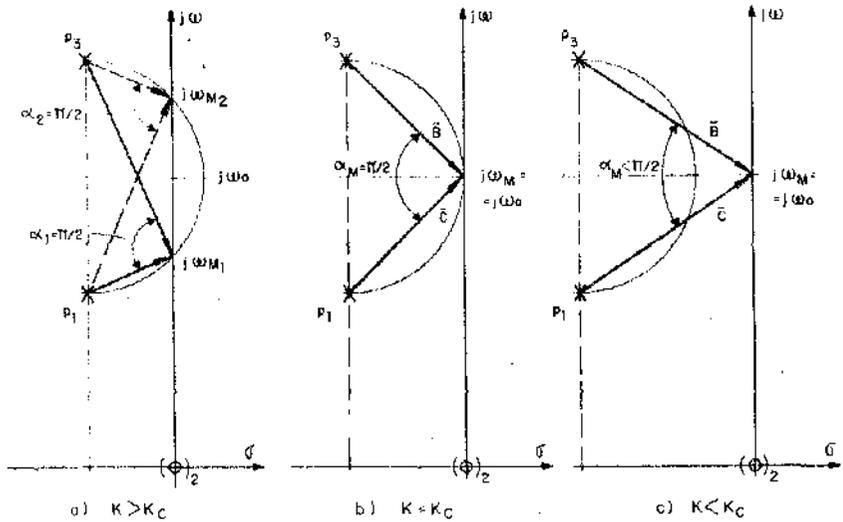


Fig. 16.48

Primer caso: Acoplamiento superior al crítico

Este caso es el mostrado en la Fig. 16.48.a.

Se presenta cuando:

$$\frac{k \omega_0}{2} > \frac{\omega_0}{2 Q_0}$$

o lo que es lo mismo, cuando

$$k > \frac{1}{Q_0} \quad (16.136)$$

Según la Ec. (16.110), para $Q_{01} = Q_{02} = Q_0$ es:

$$k_c = \frac{1}{Q_0} \quad (16.137)$$

De modo que la condición 16.136 puede ser expresada:

$$k > k_c \quad (16.138)$$

Este caso se denomina *sobreacoplado* y la curva de $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ presenta dos máximos para las pulsaciones en que la semicircunferencia corta al eje $j\omega$. En efecto, en esos puntos $\text{sen } \alpha$ toma su máximo valor ya que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Para todo otro ω es $\alpha > \frac{\pi}{2}$. En la Fig. 16.49 se muestra la curva de respuesta correspondiente, que parte de cero para $\omega = 0$, debido al cero doble en el origen y tiende a cero para $\omega \rightarrow \infty$ debido al cero doble implícito en el punto impropio.

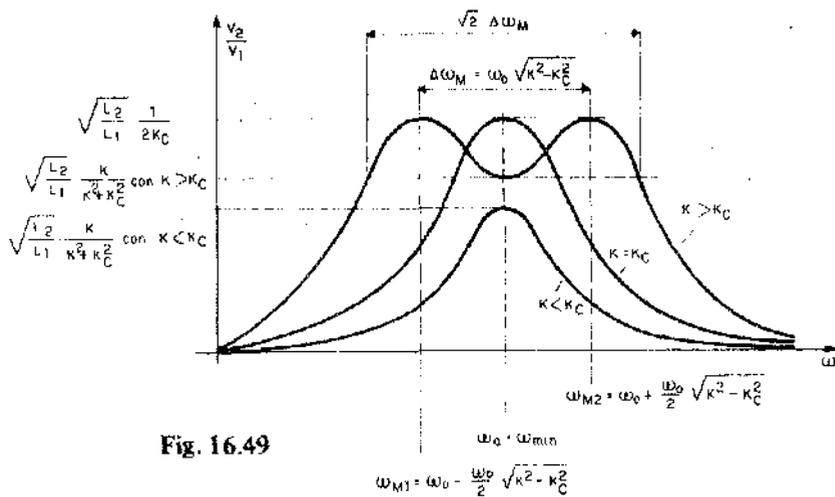


Fig. 16.49

Como $\text{sen } \alpha = 1$ para ambos máximos, ellos tienen la misma amplitud. De acuerdo a la Ec. 16.135 la ordenada de los máximos vale:

$$H(\omega)]_{\text{máx}} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{Q_0}{2(1-k^2)} \quad (16.139)$$

y sustituyendo Q_0 en base a la Ec. (16.137)

$$H(\omega)]_{\text{máx}} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{1}{2 k_c (1-k^2)} \quad (16.140)$$

y como $k^2 \ll 1$

$$H(\omega)]_{\text{máx}} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{1}{2 k_c} \quad (16.141)$$

que es independiente del valor de k . Esto significa que al aumentar k se separan más los máximos pero no se altera su amplitud, siempre que se cumplan las hipótesis simplificativas introducidas.

$$(\omega_{01} = \omega_{02} ; Q_{01} = Q_{02} ; Q_0 \gg 1 ; k^2 \ll 1)$$

Para hallar las expresiones de las pulsaciones ω_{M1} y ω_{M2} correspondientes a los máximos de $H(\omega)$, se utilizará la Fig. 16.50. En ella se deduce que:

$$\cos \beta = \frac{\Delta \omega_2}{|\bar{C}|} \quad (16.142)$$

y también

$$\cos \beta = \frac{|\bar{C}|}{k \omega_0} \quad (16.143)$$

Igualando los segundos miembros resulta:

$$\frac{\Delta \omega_2}{C} = \frac{C}{k \omega_0}$$

$$\therefore k \omega_0 \Delta \omega_0 = C^2 \quad (16.144)$$

Pero aplicando Pitágoras

$$C^2 = \Delta \omega_2^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0} \right)^2 \quad (16.145)$$

Igualando las Ecs. (16.144) y (16.145) queda:

$$k \omega_0 \Delta \omega_2 = \Delta \omega_2^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0} \right)^2$$

$$\therefore \Delta \omega_2^2 - k \omega_0 \Delta \omega_2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0} \right)^2 = 0$$

Ecuación de segundo grado que permite obtener:

$$\Delta \omega_2 = + \frac{k \omega_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k \omega_0}{2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0} \right)^2}$$

y como $\frac{1}{Q_0^2} = k_C^2$, puede escribirse

$$\Delta \omega_2 = \frac{k \omega_0}{2} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{k^2 - k_C^2} \quad (16.146)$$

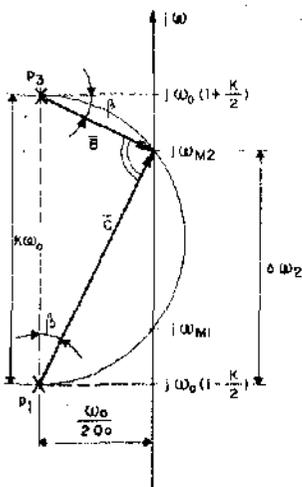


Fig. 16.50

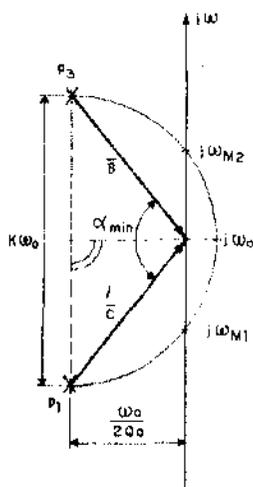


Fig. 16.51

En la Fig. 16.50 se ve que:

$$\omega_{M_2} = \omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right) + \Delta\omega_2 \quad (16.147)$$

y sustituyendo el valor de $\Delta\omega_2$ dado por la Ec. (16.146) en la Ec. (16.147) resulta:

$$\omega_{M_{1;2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\omega_0 k}{2} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

que simplificando se reduce a:

$$\omega_{M_{1;2}} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (16.148)$$

La separación entre los máximos es:

$$\Delta\omega_M = \omega_{M_2} - \omega_{M_1} = \omega_0 \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (16.149)$$

que aumenta a medida que el índice de acoplamiento se hace mayor.

Para hallar la ordenada del mínimo de $H(\omega)$ se hará referencia a la Fig. 16.51. En la zona comprendida entre ω_{M_1} y ω_{M_2} , $\text{sen } \alpha$ toma su mínimo

valor para $\omega = \omega_0$ en que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se hace máximo. Por la simetría de la figura, puede escribirse:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{\frac{1}{2} k \omega_0}{|B|} = \frac{\frac{1}{2} k \omega_0}{\sqrt{\left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0}\right)^2}} \quad (16.150)$$

$$\text{y} \quad \operatorname{cos} \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{\frac{\omega_0}{2 Q_0}}{|B|} = \frac{\frac{\omega_0}{2 Q_0}}{\sqrt{\left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0}\right)^2}} \quad (16.151)$$

Sustituyendo las Ecs. (16.150) y (16.151) en

$$\operatorname{sen} \alpha_{\min} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}$$

resulta:

$$\operatorname{sen} \alpha_{\min} = 2 \frac{k \omega_0}{2} \frac{\omega_0}{2 Q_0} \frac{1}{\left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0}\right)^2}$$

Simplificando:

$$\operatorname{sen} \alpha_{\min} = \frac{k}{Q_0 \left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{2 Q_0^2}\right)} \quad (16.152)$$

Sustituyendo la Ec. (16.152) en la expresión de $H(\omega)$ dada por la Ec. (16.135), se obtiene:

$$H(\omega) \Big|_{\min} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \frac{Q_0}{2(1-k^2)} \frac{k}{Q_0 \left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{2 Q_0^2}\right)}}$$

Simplificando queda:

$$H(\omega) \Big|_{\min} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1} \frac{k}{(1-k^2) \left(k^2 + \frac{1}{Q_0^2}\right)}}$$

y sustituyendo:

$$\frac{1}{Q_0^2} = k_c^2$$

$$H(\omega) \Big|_{\min} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{(1-k^2)(k^2+k_c^2)} \quad (16.153)$$

y si $k^2 \ll 1$

$$H(\omega) \Big|_{\min} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{k^2+k_c^2} \quad (16.154)$$

Falta hallar las pulsaciones de corte superior e inferior, para las cuales $H(\omega)$ se reduce al 70,7 % de su valor máximo.

Esto es:

$$H(\omega_c) = \frac{\sqrt{2}}{2} H(\omega) \Big|_{\max} \quad (16.155)$$

Reemplazando en la Ec. (16.155) las expresiones de $H(\omega_c)$ y $H(\omega) \Big|_{\max}$ dadas por las Ec. (16.135) y (16.139) queda:

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{Q_0}{2(1-k^2)} \operatorname{sen} \alpha_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{L_1}{L_1}} \frac{Q_0}{2(1-k^2)}$$

Simplificando se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha_c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \alpha_c = \frac{\pi}{4} \quad (16.156)$$

En la Fig. 16.52 se muestra la construcción para la obtención de las pulsaciones de corte superior ω_{CS} e inferior ω_{CI} . Se parte de la construcción efectuada para obtener ω_{M_1} y ω_{M_2} . En efecto, se determina el punto F en el cual la horizontal que pasa por $j\omega_0$ corta a la circunferencia que tiene un diámetro que pasa por los polos p_1 y p_3 . Con centro en F y radio igual al segmento tendido entre F y p_3 se traza una nueva circunferencia. Los puntos G y H en los que ésta corta el eje $j\omega$ corresponden a las pulsaciones de corte buscadas. En efecto, el ángulo α_c formado por los fasores B y C tendidos desde los polos al punto G ó el H es de 45° , de modo que satisface a la Ec. (16.156).

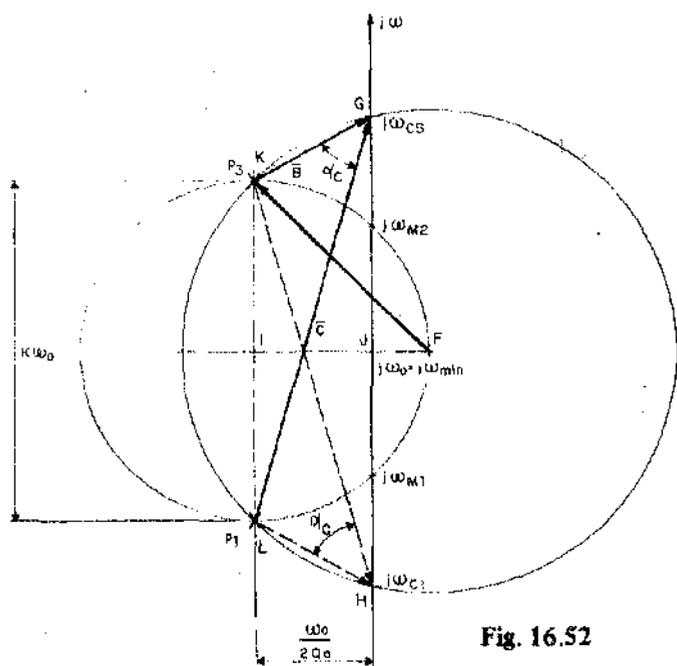


Fig. 16.52

En la Fig. 16.52 quedan ubicadas todas las pulsaciones de interés.

Las expresiones de ω_{cs} y ω_{c1} pueden ser obtenidas a partir de la Fig. 16.52. En efecto, de ella se deduce que:

$$\overline{KF}^2 = \overline{FJ}^2 + \overline{JK}^2 = \left(\frac{k\omega_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)^2 \quad (16.157)$$

$$\text{además } \overline{GF} = \overline{kF} \text{ por construcción} \quad (16.158)$$

$$\text{y } \omega_{cs} - \omega_0 = \overline{GJ} = \sqrt{\overline{GF}^2 - \overline{JF}^2} \quad (16.159)$$

$$\text{Siendo } \overline{JF} = \frac{k\omega_0}{2} - \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{k\omega_0}{2} - \frac{k_c\omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{2}(k - k_c) \quad (16.160)$$

Reemplazando las Ecs. (16.157) y (16.160) en la Ec. (16.159), teniendo en cuenta previamente la Ec. (16.158) resulta:

$$\omega_{cs} - \omega_0 = \sqrt{2\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 (k - k_c)^2} = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{2k^2 - (k - k_c)^2}$$

Desarrollando la cantidad subradical y despejando ω_{CS} queda:

$$\omega_{CS} = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2 + 2k k_c} \quad (16.161)$$

Análogamente se obtiene

$$\omega_{CI} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2} \sqrt{k^2 - k_c^2 + 2k k_c} \quad (16.162)$$

Resultando el ancho de banda de potencia media, o reactancia total igual a la resistencia, o para una caída de 3 dB:

$$\Delta \omega_C = \omega_{CS} - \omega_{CI} = \omega_0 \sqrt{k^2 - k_c^2 + 2k k_c} \quad (16.163)$$

En la Fig. 16.53 se muestra la interpretación del ancho de banda $\Delta \omega_C$.

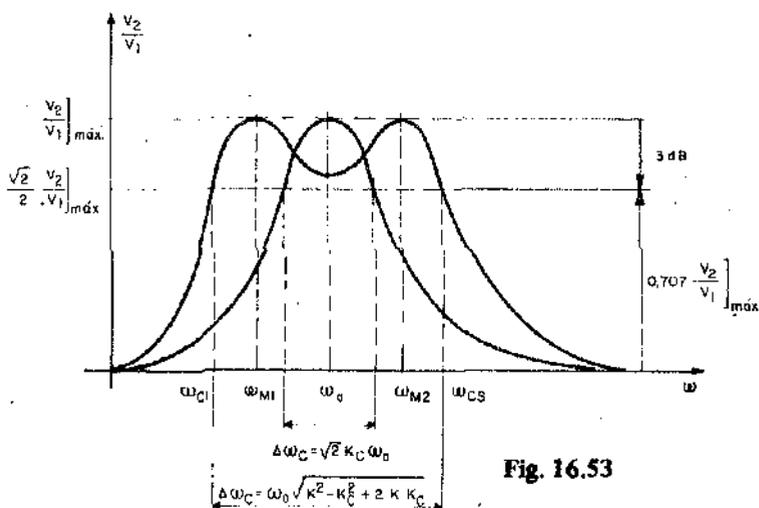


Fig. 16.53

Segundo caso: Acoplamiento crítico

Este es el caso mostrado en la Fig. 16.48.b).

Se presenta cuando $\frac{k \omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{2 Q_0} \therefore k = \frac{1}{Q_0} = k_c$

En la figura mencionada puede verse que existe un solo valor de ω para el cual $\text{sen } \alpha$ se hace máximo. Esto ocurre para $\omega_M = \omega_0$ en que $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Sustituyendo este valor de α en la Ec. (16.135) se obtiene.

$$H(\omega)]_{\max} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{Q_0}{2(1-k^2)} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{1}{2k_c(1-k^2)} \quad (16.164)$$

que coincide con la amplitud de los máximos de $H(\omega)$ para $k > k_c$, dada por la Ec. (16.140). En la Fig. 16.49 se ha representado la curva de $H(\omega)$ en función de ω , junto con la curva para $k > k_c$.

Para hallar las pulsaciones de corte puede emplearse la misma construcción utilizada para el caso I en la Fig. 16.52. En cuanto a las expresiones de ω_{cs} , ω_{ci} y $\Delta\omega_c$, basta tomar $k = k_c$ en las Ecs. (16.161) a (16.163), resultando

$$\omega_{cs} = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} k_c \sqrt{2} \quad (16.165)$$

$$\omega_{ci} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2} k_c \sqrt{2} \quad (16.166)$$

$$\Delta\omega_c = \sqrt{2} k_c \omega_0 \quad (16.167)$$

En la Fig. 16.53 se muestra la curva de $H(\omega)$ y el significado del ancho de banda $\Delta\omega_c$.

Tercer caso: Acoplamiento inferior al crítico

En la Fig. 16.48.c) puede verse el caso en que $\frac{k \omega_0}{2} < \frac{\omega_0}{2Q_0}$ ó $k < k_c$, denominado *sub-acoplado*. Puede verse que α toma su mayor valor para $\omega_M = \omega_0$, pero no llega a valer $\frac{\pi}{2}$, por lo cual el máximo es de amplitud inferior a la de los 2 casos anteriores, tal como muestra la Fig. 16.49. Para hallar el valor $H(\omega)]_{\max}$ se utiliza la Fig. 16.48.c) como base. En ella resulta:

$$|\bar{B}| = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q_0}\right)^2 + \left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2} \quad (16.168)$$

$$|C| = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q_0}\right)^2 + \left(\frac{k \omega_0}{2}\right)^2} \quad (16.169)$$

Según las Ec. (16.129) y (16.134) es:

$$H(\omega) \cong \frac{A_0}{4} \frac{1}{BC} \quad (16.129)$$

$$A_0 = \omega_0^2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{1-k^2} \quad (16.134)$$

Reemplazando las Ecs. (16.168); (16.169) y (16.134) en la Ec. (16.129) queda:

$$H(\omega)_{\max} \cong \frac{\omega_0^2}{4} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{1-k^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{2Q_0}\right)^2 + \left(\frac{k\omega_0}{2}\right)^2}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{Q_0} = k_c$ y simplificando:

$$H(\omega)_{\max} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{(1-k^2)(k_c^2 + k^2)} \quad (16.135)$$

y por ser $k^2 \ll 1$

$$H(\omega)_{\max} \cong \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{k}{k_c^2 - k^2} \quad (16.136)$$

Nótese que la Ec. (16.136) coincide con la Ec. (16.154) que corresponde al mínimo de $H(\omega)$ para $k > k_c$. Debe tenerse presente sin embargo que la Ec. (16.154) se calcula para $k > k_c$ y la Ec. (16.163) para $k < k_c$, de modo que

$$H(\omega)_{\min}^{k > k_c} > H(\omega)_{\max}^{k < k_c}$$

Puede demostrarse que el ancho de banda $\Delta \omega_c$ vale en este caso:

$$\Delta \omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{2(k^4 + k_c^4)} - (k_c^2 - k^2)} \quad (16.137)$$

16.15.4) **Acoplamiento transicional:** En los párrafos anteriores se ha considerado el caso muy frecuente en que $\omega_{01} = \omega_{02}$ y $Q_{01} = Q_{02}$.

Si $Q_{01} = Q_{02}$ pero $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, puede demostrarse que es posible em-

plear las mismas curvas, siempre que: $\Delta \omega = |\omega_{02} - \omega_{01}| \ll \omega_0^0 = \sqrt{\omega_{01} \omega_{02}}$. Para ello debe adoptarse para cada curva un coeficiente de acoplamiento efectivo algo superior, dado por la expresión:

$$k_e = \sqrt{k^2 + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (16.138)$$

Si $\omega_{01} = \omega_{02}$ pero $Q_{01} \neq Q_{02}$, el acoplamiento transicional k_t , cuyo valor debe ser superado para que la curva de V_2 presente dos picos, resulta algo superior al crítico. Este acoplamiento k_t definido por C.B. Aiken en "Two-mesh tuned coupled circuit filters" Proc. IRE Vol. 25.2 (Feb. 1937) Pág. 230 y Errata 26.6 (Jun. 1937), Pág. 672, tiene por valor:

$$k_t = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q_{01}^2} + \frac{1}{Q_{02}^2} \right)} \quad (16.139)$$

k_t provee el mejor ancho de banda para curvas de un solo pico. Nótese que para $Q_{01} = Q_{02} = Q_0$ resulta

$$k_t = \frac{1}{Q_0} = k_c$$

Cuando $Q_{01} \neq Q_{02}$ el pico de frecuencia más baja resulta algo más elevado, aunque el efecto es poco notorio para valores de k que no difieran excesivamente. Además la amplitud de los máximos decrece al aumentar el acoplamiento en lugar de mantenerse invariable como en el caso de $Q_{01} = Q_{02}$.

En la Fig. 16.54 se muestran las curvas correspondientes al caso en que $\omega_{01} = \omega_{02}$ y $Q_{01} \neq Q_{02}$

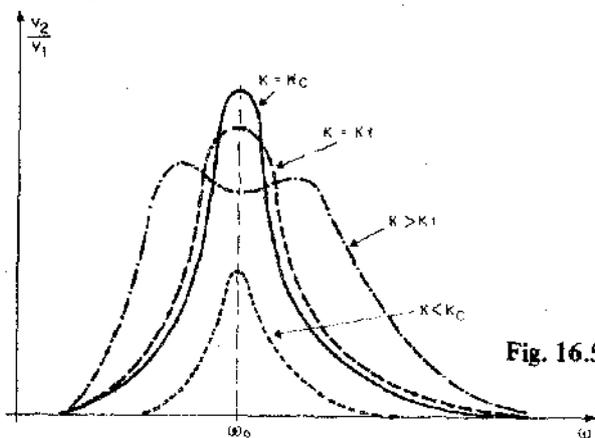


Fig. 16.54

Finalmente, el caso más general es aquel en el que $\omega_{02} \neq \omega_{01}$ y $Q_{02} \neq Q_{01}$. En estas condiciones, la curva de V_2/V_1 para $k > k_c$ no es simétrica respecto del pico para $k > k_c$, como muestra la Fig. 16.55.

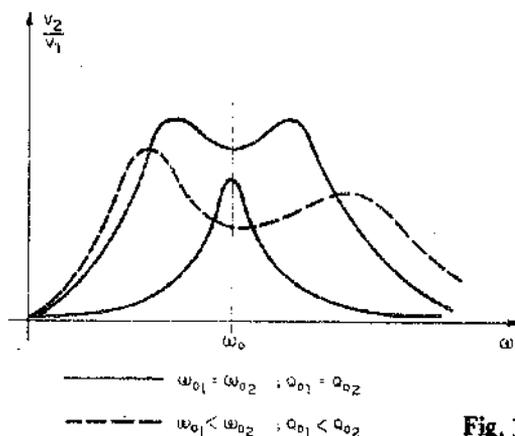


Fig. 16.55

16.16 Circuitos con acoplamiento perfecto. Transformadores

16.16.1) Acoplamiento perfecto Cuando los circuitos acoplados inductivamente tienen un índice de acoplamiento $k = 1$ se dice que están perfectamente acoplados, ya que todo el flujo creado por un inductor es integralmente concatenado por el restante. Esto es lo que ocurre muy aproximadamente en los transformadores con núcleo ferromagnético. Estos están constituidos por dos o más arrollamientos conductores dispuestos sobre un núcleo de material magnético de alta permeabilidad, tal como muestra la Fig. 16.56. El transformador sirve para transferir energía de un circuito a otro con distintos valores de tensión y corriente en cada arrollamiento.

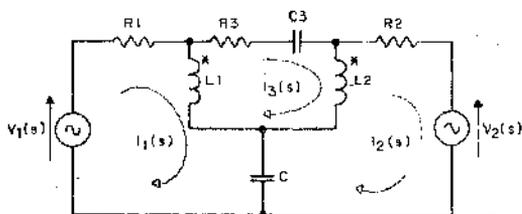


Fig. 16.56

Los modelos circuitales utilizados para representar los transformadores, difieren de los empleados para los circuitos con acoplamiento inductivo débil. Para introducir dichos modelos se debe efectuar una conceptualización previa, definiendo el transformador ideal.

16.16.2) **Transformador ideal** Se denomina así al elemento de circuito de cuatro terminales representado en la Fig. 16.57, que satisface las siguientes expresiones, válidas para condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} V_2(s) = a V_1(s) & (16.140) \\ I_2(s) = \frac{1}{a} I_1(s) & (16.141) \end{cases}$$

Donde a es un número positivo denominado *relación de transformación*.

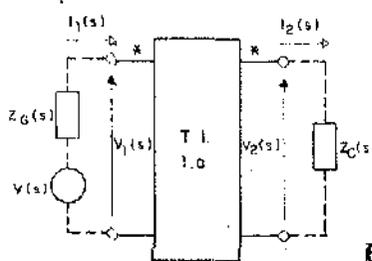


Fig. 16.57

Si $a > 1$ se dice que el transformador es elevador y si $a < 1$ reductor. De las Ecs. (16.140) y (16.141) surgen las siguientes propiedades:

1º) Si se conecta una impedancia de carga $Z_C(s)$ al secundario resulta:

$$I_2(s) = \frac{V_2(s)}{Z_C(s)} \quad (16.142)$$

Despejando $I_1(s)$ de la Ec. (16.141) y $V_1(s)$ de la Ec. (16.140), se obtienen:

$$I_1(s) = a I_2(s) \quad (16.143)$$

$$V_1(s) = \frac{1}{a} V_2(s) \quad (16.144)$$

La impedancia de excitación que presentan los bornes del primario es:

$$Z_e(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \quad (16.145)$$

Reemplazando las Ecs. (16.143) y (16.144) en la Ec. (16.145) resulta:

$$Z_c(s) = \frac{1}{a^2} \frac{V_2(s)}{I_2(s)}$$

y teniendo en cuenta la Ec. (16.142)

$$Z_c(s) = \frac{Z_c(s)}{a^2} \quad (16.146)$$

Esto es, la impedancia de carga \bar{Z}_c se ve refleja sobre el primario dividida por el cuadrado de la relación de transformación, tal como muestra la Fig. 16.58.

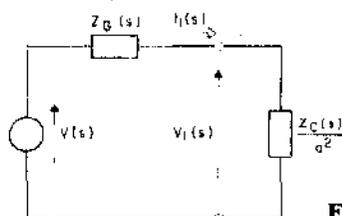


Fig. 16.58.

Nótese que si $Z_c(s) = 0$, resulta $Z_e(s) = 0$

2° Si $I_2(s) = 0$, según la Ec. (16.143) es:

$$I_1(s) = 0$$

Es decir que al quedar el secundario a circuito abierto, el transformador ideal presenta una impedancia de excitación infinita. Esto también surge de la Ec. (16.145).

3° Si $a > 1$ (transformador elevador), la tensión aumenta a veces y la corriente disminuye en igual proporción. Teniendo en cuenta las Ecs. (16.140) y (16.141), resulta:

$$V_2(s) I_2(s) = a V_1(s) \frac{1}{a} I_1(s) = V_1(s) I_1(s)$$

y en el dominio $j\omega$:

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 \bar{I}_2 &= \bar{V}_1 \bar{I}_1 \\ \therefore \bar{P}s_2 &= \bar{P}s_1\end{aligned}\quad (16.147)$$

En consecuencia, el transformador ideal transfiere íntegramente la energía que recibe, alterando únicamente los valores de la tensión y la corriente pero manteniendo constante su producto. Interesa relacionar el transformador ideal con el circuito con inductancia mutua, sin pérdidas y con acoplamiento perfecto de la Fig. 16.59.

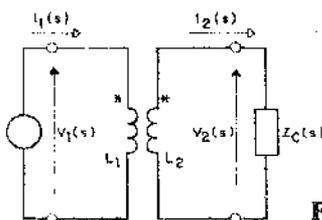


Fig. 16.59

Las ecuaciones del circuito mencionado son, teniendo en cuenta que para $k = 1$ es $M = \sqrt{L_1 L_2}$:

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) - s\sqrt{L_1 L_2} I_2(s) \end{cases} \quad (16.148)$$

$$\begin{cases} 0 = s\sqrt{L_1 L_2} I_1(s) + [sL_2 + Z_C(s)] I_2(s) \end{cases} \quad (16.149)$$

Resolviendo para $I_2(s)$ resulta:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} sL_1 & V_1(s) \\ -s\sqrt{L_1 L_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_1 & -s\sqrt{L_1 L_2} \\ -s\sqrt{L_1 L_2} & sL_2 + Z_C(s) \end{vmatrix}} = \frac{s\sqrt{L_1 L_2} V_1(s)}{sL_1[sL_2 + Z_C(s)] - s^2 L_1 L_2}$$

$$\begin{aligned}\therefore I_2(s) &= \frac{s\sqrt{L_1 L_2} V_1(s)}{s^2 L_1 L_2 + sL_1 Z_C(s) - s^2 L_1 L_2} = \\ &= \frac{s\sqrt{L_1 L_2} V_1(s)}{sL_1 Z_C(s)} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \frac{V_1(s)}{Z_C(s)}\end{aligned}\quad (16.150)$$

Reemplazando la Ec. (16.150) en la siguiente:

$$V_2(s) = Z_C(s) I_2(s)$$

queda:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (16.151)$$

Comparando la Ec. (16.151) con la Ec. (16.140), es posible pensar que el circuito acoplado sin pérdidas y con $k = 1$ satisface las condiciones del transformador ideal. Sin embargo, no es así. En efecto, resolviendo las Ecs. (16.148) y (16.149) para I_1 , se obtiene:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(s) & -s\sqrt{L_1 L_2} \\ 0 & sL_2 + Z_C(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sL_1 & -s\sqrt{L_1 L_2} \\ -s\sqrt{L_1 L_2} & sL_2 + Z_C(s) \end{vmatrix}} = \frac{V_1(s)[sL_2 + Z_C(s)]}{sL_1 Z_C(s)} \quad (16.152)$$

Haciendo el cociente entre las Ecs. (16.150) y (16.152) resulta:

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s\sqrt{L_1 L_2}}{sL_2 + Z_C(s)} \quad (16.153)$$

que no satisface a la Ec. (16.141) del transformador ideal, a menos que $sL_2 \gg Z_C(s)$. Por lo tanto, debería ser $L_2 \rightarrow \infty$ para que la Ec. (16.153) se convierte en la Ec. (16.141). Pero además, según la Ec. (16.152) es:

$$I_1(s) = \frac{V_1(s)}{Z_C(s)} \frac{L_2}{L_1} + \frac{V_1(s)}{sL_1} \quad (16.154)$$

Si el secundario queda a circuito abierto ($Z_C(s) \rightarrow \infty$), el primer término del segundo miembro de la Ec. (16.154) se anula pero queda:

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{sL_1} \neq 0 \quad (16.155)$$

y a menos que $L_1 \rightarrow \infty$ $I(s)$ no se anulará.

Resumiendo:

Para lograr un transformador ideal a partir de un circuito acoplado inductivamente, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- 1°) No debe presentar pérdidas. Por lo tanto, las resistencias R_1 y R_2 de los arrollamientos serán nulas y el núcleo ferromagnético no tendrá pérdidas por histéresis ni por corrientes parásitas de Foucault.
- 2°) No debe existir flujo disperso ($k = 1$). Por lo tanto la permeabilidad μ del núcleo debe tender a infinito.
- 3°) La relación entre las tensiones será una constante $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = a$ al igual que entre las corrientes $\frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{a}$. Para ello, la inductancia del secundario deberá ser infinitamente grande ($\mu \rightarrow \infty$).
- 4°) Al quedar los bornes del secundario a circuito abierto, no debe tomar corriente en el primario. Para ello debe ser L_1 infinitamente grande. ($\mu \rightarrow \infty$).

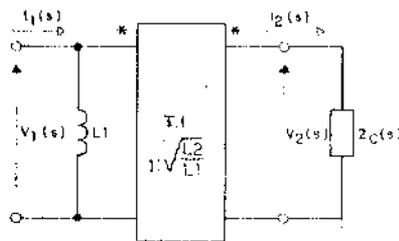


Fig. 16.60

Como se ve, el circuito acoplado sin pérdidas y $k = 1$ de la Fig. 16.59 no es un transformador ideal. En realidad el circuito equivalente de dicho circuito es el mostrado en la Fig. 16.60, donde se ha empeorado convenientemente un transformador ideal con el agregado de L_1 . En efecto en el secundario se tiene:

$$\begin{cases} V_2(s) = a V_1(s) \\ I_2(s) = \frac{1}{a} I_1(s) \end{cases}$$

y reflejando, $Z_C(s)$ sobre el primario como $\frac{Z_C(s)}{a^2}$ queda el circuito de la Fig. 16.61, para el cual la admitancia de excitación vale:

$$Y_e(s) = \frac{1}{sL_1} + \frac{L_1}{L_2} Z_C(s)$$

y por lo tanto

$$I_1(s) = V_1(s) Y_e(s) = \frac{V_1(s)}{sL_1} + V_1(s) \frac{L_2}{L_1 Z_C(s)}$$

que coincide con la Ec. (16.154).

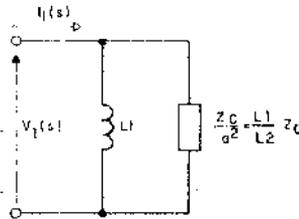


Fig. 16.61

16.16.3 Circuito equivalente del transformador no ideal sin pérdidas en el núcleo ferromagnético

Si parte del circuito correspondiente a dos arrollamientos con resistencia e inductancia, acoplados inductivamente, tal como el representado en la Fig. 16.62.

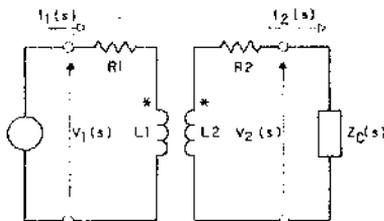


Fig. 16.62

Las ecuaciones correspondientes al circuito de la Fig. 16.62 son:

$$\begin{cases} V_1(s) = (R_1 + sL_1)I_1(s) - sMI_2(s) \\ 0 = -sMI_1(s) + \{R_2 + sL_2 + Z_C(s)\}I_2(s) \end{cases}$$

que pueden escribirse, recordando que

$$V_2(s) = Z_C(s)I_2(s)$$

$$\begin{cases} V_1(s) = (R_1 + sL_1)I_1(s) - sMI_2(s) & (16.156) \\ -V_2(s) = -sMI_1(s) + (R_2 + sL_2)I_2(s) & (16.157) \end{cases}$$

Estas ecuaciones pueden ser representadas por el circuito equivalente T de la Fig. 16.63. En efecto, sumando las Ecs. (16.156) y (16.157) y agrupando términos se obtiene:

$$V_1(s) - V_2(s) = [R_1 + s(L_1 - M)]I_1(s) + [R_2 + s(L_2 - M)]I_2(s) \quad (10.158)$$

que corresponde a la malla indicada en la Fig. 16.63. Por otra parte, aplicando la 2ª ley de Kirchhoff a la malla de la izquierda de la figura precitada, se obtiene la Ec. (16.156) y aplicando dicha ley a la malla de la derecha resulta la Ec. (16.157). Por lo tanto, el circuito de la Fig. 16.63 es equivalente al de la Fig. 16.62.

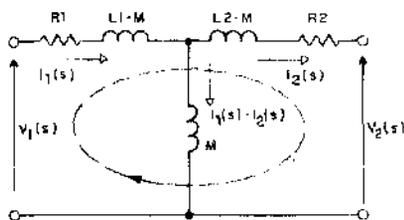


Fig. 16.63

El modelo de la Fig. 16.63 no siempre es realizable físicamente, pues si L_1 y L_2 son muy diferentes, alguna de las dos inductancias superiores

$(L_1 - M)$ y $(L_2 - M)$ puede resultar negativa. Por ejemplo, si $L_1 = 9 H$, $L_2 = 1 H$ y $k = 0,9$ es:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0,9 \sqrt{9} = 2,7 H$$

$$L_1 - M = 9 - 2,7 = 6,3 H$$

$$L_2 - M = 1 - 2,7 = -1,7 H$$

Aunque desde el punto de vista matemático esto no representa impedimento alguno para la caracterización buscada, es preferible modificar el modelo de modo que todos sus parámetros sean realizables físicamente. Por otra parte, el circuito de la Fig. 16.63 presenta un vínculo conductivo entre los terminales de entrada y salida inexistente en el circuito original.

Se modificará entonces el circuito equivalente de la Fig. 16.63, de manera que las dificultades enunciadas sean salvadas. Supóngase que $L_1 - M < 0$.

Dividiendo ambos miembros de la Ec. (16.157) por una constante arbitraria A , tal que

$$L_1 - \frac{M}{A} > 0$$

queda:

$$\frac{-V_2(s)}{A} = -s \frac{M}{A} I_1(s) + \frac{R_2 + sL_2}{A} I_2(s) \quad (16.159)$$

Sumando las Ecs. (16.156) y (16.159) se obtiene:

$$V_1(s) - \frac{V_2(s)}{A} = \left[R_1 + s \left(L_1 - \frac{M}{A} \right) \right] I_1(s) + \left[\frac{R_2}{A} + s \left(\frac{L_2}{A} - \frac{M}{A} \right) \right] I_2(s)$$

que puede escribirse, multiplicando y dividiendo por A el último término del 2° miembro, para que R_2 y L_2 queden divididos por A^2 , como si se los reflejara sobre el primario, al igual que en la Ec. (16.146):

$$V_1(s) - \frac{V_2(s)}{A} = \left[R_1 + s \left(L_1 - \frac{M}{A} \right) \right] I_1(s) + \left[\frac{R_2}{A^2} + s \left(\frac{L_2}{A^2} - \frac{M}{A} \right) \right] A I_2(s) \quad (16.160)$$

que conduce a la parte superior del circuito de la Fig. 16.64, ya que al aplicar la 2ª ley de Kirchoff en la malla indicada se obtiene la Ec. (16.160). El esquema se completa con la inductancia central $\frac{M}{A}$. El circuito de la Fig.

16.64 es equivalente al de la Fig. 16.63. En efecto aplicando la 2ª ley de Kirchoff a las mallas de la derecha y la izquierda de la Fig. 16.64 resulta:

$$\begin{cases} V_1(s) = R_1 I_1(s) + s \left(L_1 - \frac{M}{A} \right) I_1(s) + s \frac{M}{A} \left[I_1(s) - A I_2(s) \right] & (16.161) \\ -\frac{V_2(s)}{A} = \frac{R_2}{A^2} A I_2(s) + s \left(\frac{L_2}{A^2} - \frac{M}{A} \right) A I_2(s) - s \frac{M}{A} \left[I_1(s) - A I_2(s) \right] & (16.162) \end{cases}$$

Simplificando y ordenando las Ecs. (16.161) y (16.162), correspondientes al circuito de la Fig. 16.64, se obtienen las Ecs. (16.156) y (16.157), válidas para el modelo de la Fig. 16.63.

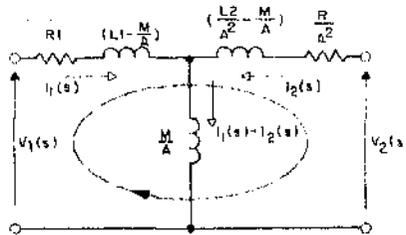


Fig. 16.64

Para que la tensión y la corriente de salida de la Fig. 16.64 sean iguales a las de la Fig. 16.63, se agrega un transformador ideal, como se muestra en la Fig. 16.65, donde queda eliminado el vínculo conductivo entre los bornes de entrada y salida.

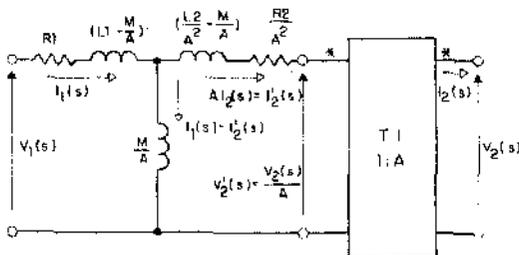


Fig. 16.65

Como $A > 0$ es un número arbitrario, surge naturalmente la idea de asignarle el valor dado por la relación indicada en la Ec. (16.151). Esto es, generalmente se adopta:

$$A = a = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (16.163)$$

Para este valor de A resulta:

$$\frac{M}{A} = M \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = k L_1 \quad (16.164)$$

$$L_1 - \frac{M}{A} = L_1 - k L_1 = L_1 (1 - k) \quad (16.165)$$

$$\frac{R_2}{A^2} = R_2 \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_2}{a^2} = R_2' \quad (16.166)$$

$$\frac{L_2}{A^2} - \frac{M}{A} = L_2 \frac{L_1}{L_2} - k L_1 = L_2 (1 - k) \quad (16.167)$$

y también

$$\frac{L_2}{A^2} - \frac{M}{A} = \frac{L_2}{a^2} - \frac{M}{a} = \frac{L_2}{a^2} \left(1 - \frac{M}{a} \frac{a^2}{L_1} \right) = L_2' \left(1 - k \frac{L_1}{L_2} \frac{L_2}{L_1} \right) = L_2' (1 - k) \quad (16.168)$$

Teniendo en cuenta las Ec. (16.164) a (16.168), el circuito de la Fig. 16.65 se convierte en el de la Fig. 16.66, que es el modelo circuital idealizado del transformador no ideal sin pérdidas en el núcleo ferromagnético, de relación de transformación a e índice de acoplamiento k .

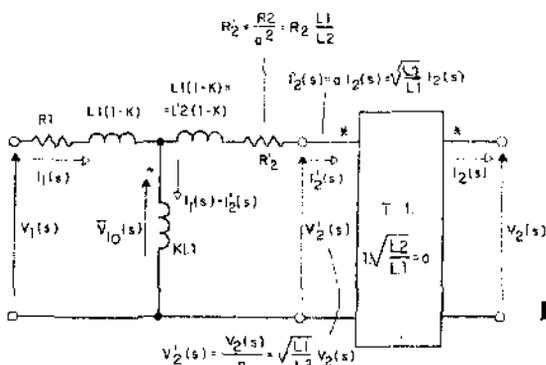


Fig. 16.66

16.16.4 Circuito equivalente del transformador real

Las inductancias.

$$L_{d1}' = L_1 (1 - k) \quad (16.169)$$

y

$$L_{d2}' = L_2 (1 - k) \quad (16.170)$$

se denominan respectivamente, inductancia de dispersión del primario e inductancia de dispersión del secundario, referida al primario. Cuando el acoplamiento es perfecto ($k = 1$), las inductancias de dispersión son nulas.

La inductancia

$$L_p = k L_1 \quad (16.171)$$

se denomina inductancia de magnetización del primario. Por ello circula la corriente de magnetización que establece el campo magnético en el núcleo. Cuando este presenta pérdidas por corrientes parásitas de Foucault y por histéresis, estas se manifiestan en el circuito equivalente a través de una conductancia de pérdidas G_p , en paralelo con la inductancia de magnetización L_p , tal como se ve en la Fig. 16.67.

Nótese que si el acoplamiento es perfecto ($k = 1$) y no existen pérdidas ($R_1 = R_2' = G_p = 0$), el circuito de la Fig. 16.67 se convierte en el de la Fig. 16.60, en el cual para $Z_C \rightarrow \infty$ la corriente del primario solo circula por $L_p = L_1$ para establecer el flujo de inducción en el núcleo del transformador.

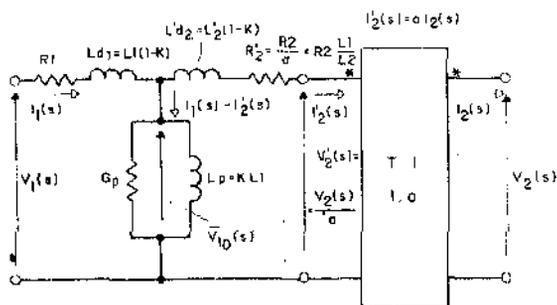


Fig. 16.67

Si además $L_1 \rightarrow \infty$ y $L_2 \rightarrow \infty$ manteniendo $\sqrt{L_2} = a$, solo queda el transformador ideal. No siempre se utiliza el circuito equivalente referido al primario de la Fig. 16.67. A veces se trabaja con el circuito equivalente de la Fig. 16.68, dibujada para régimen senoidal permanente. Para pasar R_2' y L_2' al secundario del transformador ideal, basta con multiplicar dichos valores por a^2 , obteniéndose.

$$R_2' a^2 = \frac{R_2}{a^2} a^2 = R_2$$

$$L_2' (1 - k) a^2 = L_1 (1 - k) a^2 = L_1 (1 - k) \frac{L_2}{L_1} = L_2 (1 - k)$$

En la Fig. 16.69 se muestra el diagrama fasorial correspondiente al primario del circuito de la Fig. 16.68 para $\bar{I}_2 = 0$, es decir, en vacío.

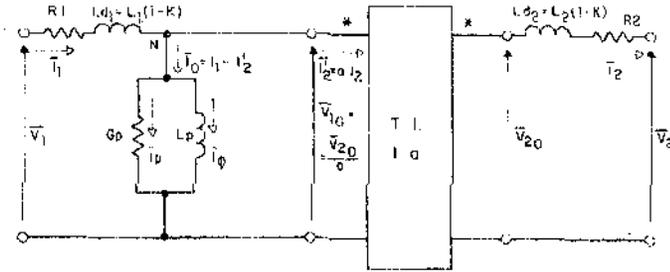


Fig. 16.68

\bar{I}_ϕ es la corriente de magnetización, que circula por L_p . Se encuentra en fase con el flujo.

\bar{I}_p es la corriente de pérdidas en cuadratura con \bar{I}_ϕ .

$\bar{I}_0 = \bar{I}_\phi + \bar{I}_p$ es la corriente del primario en vacío (con el secundario abierto o sin carga).

$\bar{V}_{10} = j\omega L_p \bar{I}_\phi$ es la tensión en los bornes de la inductancia de magnetización o inductancia del primario L_p en vacío. Se encuentra en cuadratura con \bar{I}_ϕ .

Las caídas de tensión $R_1 \bar{I}_0$ en la resistencia del primario y $j\omega L_{d1} \bar{I}_0$ en la inductancia de dispersión del primario son despreciables frente a \bar{V}_{10} , por ser muy pequeña \bar{I}_0 .

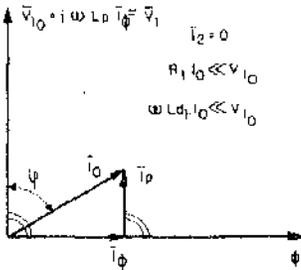


Fig. 16.69

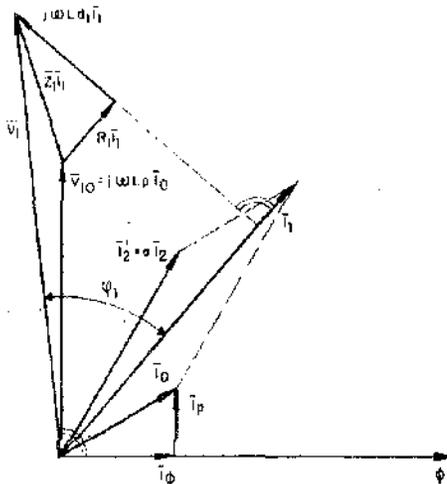


Fig. 16.70

Cuando $\bar{I}_2 \neq 0$, se refleja sobre el primario una corriente $\bar{I}'_2 = a \bar{I}_2$ que se suma fasorialmente con \bar{I}_0 como se muestra en la Fig. 16.70. En efecto, aplicando la ley de Kirchoff en el nodo N de la Fig. 16.68, resulta:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 - \bar{I}'_2$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 = \bar{I}_0 + a \bar{I}_2$$

En esta figura se ha representado el diagrama fasorial del transformador para una carga inductiva en el secundario. El diagrama fasorial del secundario es el mostrado en la Fig. 16.71.

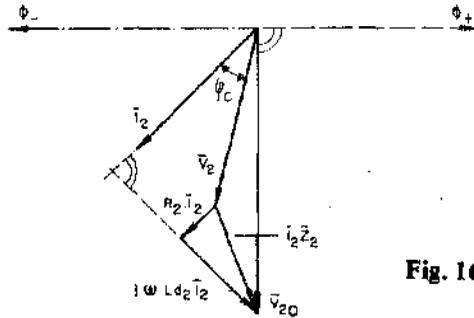


Fig. 16.71

Nótese que las caídas de tensión en R_2 y L_{d1} de la Fig. 16.70 no son ahora despreciables frente a \bar{V}_{10} , por lo que la tensión aplicada al primario \bar{V}_1 no coincide con \bar{V}_{10} .

Es interesante destacar que al ser la corriente de magnetización:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 - \bar{I}'_2 = \bar{I}_1 - a \bar{I}_2$$

resulta que \bar{I}_2 tiene un efecto desmagnetizante.

Por lo tanto al aumentar \bar{I}_2 , debe crecer \bar{I}_1 en igual proporción para mantener el mismo valor de \bar{I}_0 y consecuentemente el mismo flujo ϕ ; ya que $\bar{V}_{10} = j\omega L_p \bar{I}_0$ no puede variar sustancialmente, pues $\bar{V}_1 = \text{cte.}$

En la práctica, al ser $\mu \gg 1$ resulta:

$$\bar{I}_0 \ll a \bar{I}_2$$

y en consecuencia:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + a \bar{I}_2 \cong a \bar{I}_2$$

que se aproxima a la Ec. (16.143) del transformador ideal.

La posición relativa del diagrama fasorial del secundario, respecto del correspondiente al primario, depende de la ubicación de los bornes homólogos en el transformador ideal de la Fig. 16.68, pudiendo tener a \bar{I}_2 en fase o contrafase con \bar{I}_1 .

Otro tanto ocurre con \bar{V}_2 respecto a \bar{V}_1 .

16.17 Respuesta de frecuencia de un transformador con núcleo ferromagnético

16.17.1) **Introducción** Se parte del circuito equivalente reflejado sobre el primario de la Fig. 16.67, al cual se le deben agregar las capacitancias parásitas C_1 y C_2 de los arrollamientos primario y secundario. Dado que los materiales empleados en los núcleos de los transformadores que trabajan con frecuencia variable son de muy buena calidad puede desprejiciarse la conductancia de pérdidas G_p , por ser muy pequeña la corriente \bar{I}_ϕ que la atraviesa.

Suponiendo que el secundario del transformador esté cargado con una resistencia R_C y el primario alimentado con un generador de resistencia interna R_g , resulta el circuito equivalente de la Fig. 16.72, donde se ha suprimido el transformador ideal, por no tener influencia alguna sobre la respuesta de frecuencia.

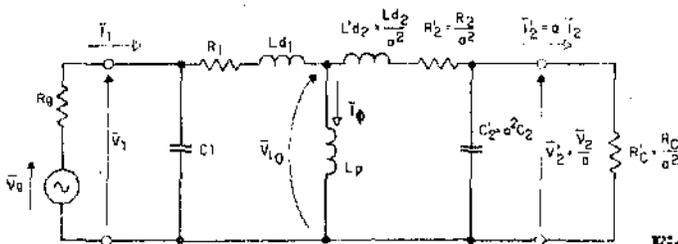


Fig. 16.72

Dada la gran cantidad de parámetros actuantes, con el objeto de simplificar el problema, se divide el análisis en tres partes:

- Frecuencias bajas
- Frecuencias medias
- Frecuencias altas

16.17.2) **Análisis cualitativo:** En baja frecuencia, las reactancias de los capacitores C_1 y C_2 de la Fig. 16.72 son tan elevadas, que las corrientes que

se derivan por ellos son despreciables. En consecuencia, se los puede eliminar del circuito.

Por otra parte, siendo el índice de acoplamiento muy próximo a la unidad (típicamente $k = 0,99$), las inductancias de dispersión $L_{d1} = L_1 (1 - K)$ y $L_{d2} = L'_2 (1 - k)$ son muy pequeñas y sus reactivancias pueden ser despreciadas frente a las resistencias R_1 y R'_2 , respectivamente, resultando el circuito equivalente de la Fig. 16.73.

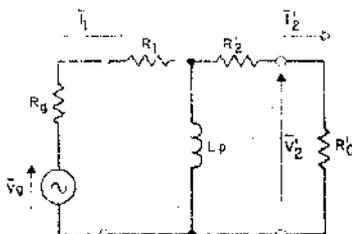


Fig. 16.73

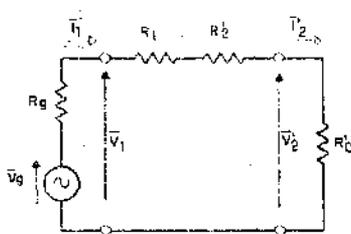


Fig. 16.74

Cuando la frecuencia crece, se entra en una banda, denominada de frecuencias medias, caracterizada por el hecho de que además de C_1 , C'_2 , L_{d1} , y L_{d2} , se hace despreciable la inductancia de magnetización L_p del primario, pues su reactivancia es suficientemente grande para que la corriente que la atraviesa no sea significativa. Resulta entonces el circuito equivalente aproximado de la Fig. 16.74.

Finalmente para las frecuencias altas, las corrientes que se derivan por C_1 y C'_2 comienzan a ser importantes, impidiendo eliminar dichos capacitores. Por otra parte las caídas de tensión en las inductancias de dispersión dejan de ser despreciables resultando el circuito aproximado de la Fig. 16.75.

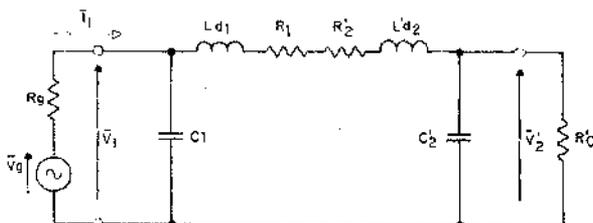


Fig. 16.75

Observando el circuito equivalente aproximado correspondiente a las frecuencias medias, puede deducirse que, al no incluir elementos reactivos, el módulo de la transmitancia de tensiones $H(\omega) = V_2/V_1$ es constante mientras sea válido el circuito de la Fig. 16.73.

Para las frecuencias bajas, el circuito aproximado de la Fig. 16.73 muestra que cuanto menor sea ω , más pequeña será ωL_p , disminuyendo V'_2 . En el límite, para $\omega = 0$, la transmitancia $H(\omega)$ se anula debido al cortocircuito introducido por L_p . Finalmente, para frecuencias altas, el esquema aproximado de la Fig. 16.75 permite advertir la presencia de un circuito resonante serie.

De acuerdo a lo estudiado en el capítulo 12, si el factor de selectividad es mayor que 0,707, la tensión sobre el capacitor V'_2 presentará un máximo. Una vez superada la frecuencia del máximo, C'_2 comienza a cortocircuitar a R'_C , haciendo disminuir gradualmente a V'_2 hasta anularse para $\omega \rightarrow \infty$.

En la Fig. 16.76 se muestra la respuesta de frecuencia de amplitud correspondiente al transformador con núcleo ferromagnético, indicando las zonas de validez de cada circuito aproximado.

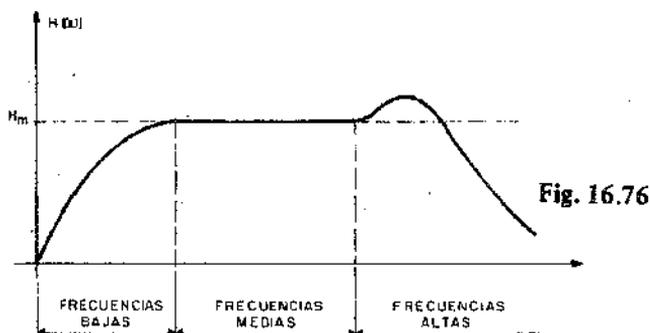


Fig. 16.76

16.17.3) Análisis cuantitativo:

a) Frecuencias medias

De acuerdo al circuito de la Fig. 16.74, resulta:

$$V'_2 = V_g \frac{R'_C}{R_g + R_1 + R'_2 + R'_C}$$

De modo que la transmitancia de tensiones para frecuencias medias es:

$$H_m(s) = H_m(j\omega) = \frac{V'_2}{V_g} = \frac{R'_C}{R_g + R_1 + R'_2 + R'_C} = H_m \quad (16.172)$$

La Ec. (16.172) muestra que la transmitancia de tensiones es real e independiente de la frecuencia en la zona de frecuencias medias.

b) Frecuencias bajas

Aplicando el teorema de Norton hacia la izquierda de R_1 en el circuito de la Fig. 16.73 y pasando el dominio $s = \sigma + j\omega$, se obtiene el esquema de la Fig. 16.77, donde.

$$I_N(s) = \frac{Y_g(s)}{R_g + R_1} \quad (16.173)$$

$$Y_N(s) = \frac{1}{R_g + R_1} \quad (16.174)$$

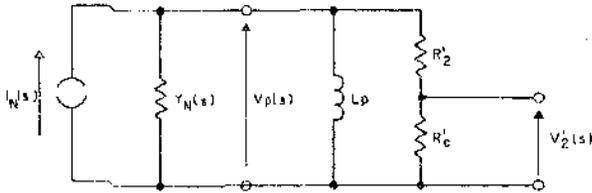


Fig. 16.77

La admitancia total en un paralelo con el generador de la Fig. 16.77 es:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{R_g + R_1} + \frac{1}{sL_p} + \frac{1}{R'_2 + R'_c} = \\ &= \frac{sL_p(R'_2 + R'_c) + (R'_c + R_1)(R'_2 + R'_c) + sL_p(R_g + R_1)}{sL_p(R_g + R_1)(R'_2 + R'_c)} \end{aligned}$$

y la tensión $V_p(s)$:

$$\begin{aligned} V_p(s) &= \frac{I_N(s)}{Y(s)} = \\ &= \frac{V_g(s)}{R_g + R_1} \frac{sL_p(R_g + R_1)(R'_2 + R'_c)}{sL_p(R'_2 + R'_c) + (R_g + R_1)(R'_2 + R'_c) + sL_p(R_g + R_1)} \end{aligned}$$

Simplificando $(R_g + R_1)$ y dividiendo numerador y denominador por $(R'_2 + R'_c)$ resulta:

$$V_p(s) = V_g(s) \frac{sL_p}{sL_p \left(1 + \frac{R_g + R_1}{R'_2 + R'_c} \right) + (R_g + R_1)}$$

que puede escribirse tomando $L_p \left(1 + \frac{R_g + R_1}{R_2' + R_C'} \right)$ factor común en el denominador

$$V_p(s) = \frac{V_g(s)}{\left(1 + \frac{R_g + R_1}{R_2' + R_C'} \right)} \frac{s}{\left[s + \frac{R_g + R_1}{\left(1 + \frac{R_g + R_1}{R_2' + R_C'} \right) L_p} \right]}$$

y operando:

$$V_p(s) = \frac{V_g(s) (R_2' + R_C')}{(R_g + R_1) + (R_2' + R_C')} \frac{s}{\left[s + \frac{(R_g + R_1) (R_2' + R_C')}{(R_g + R_1) + (R_2' + R_C')} \frac{1}{L_p} \right]} \quad (16.175)$$

Denominando:

$$\frac{(R_g + R_1) (R_2' + R_C')}{(R_g + R_1) + (R_2' + R_C')} = R_{eq} \quad (16.176)$$

la Ec. (16.175) puede escribirse

$$V_p(s) = \frac{V_g(s) (R_2' + R_C')}{(R_g + R_1) + (R_2' + R_C')} \frac{s}{s + \frac{R_{eq}}{L_p}} \quad (16.177)$$

La tensión $V_2'(s)$ puede calcularse en base al divisor de tensión constituido por R_2' y R_C'

$$V_2'(s) = V_p(s) \frac{R_C'}{R_2' + R_C'} \quad (16.178)$$

Sustituyendo la Ec. (16.177) en la Ec. (16.178) queda:

$$V_2'(s) = V_g(s) \frac{R_C'}{(R_g + R_1) + (R_2' + R_C')} \frac{s}{s + \frac{R_{eq}}{L_p}} \quad (16.179)$$

Teniendo en cuenta las Ec. (16.179) y (16.172), puede escribirse:

$$H_B(s) = \frac{V_2'(s)}{V_g(s)} \Big|_{CIN} = H_m \frac{s}{s + \frac{R_{eq}}{L_p}} \quad (16.180)$$

En la Fig. 16.78 se muestra la configuración de polos y ceros de la transmitancia de tensiones para baja frecuencia $H_b(s)$ y en la Fig. 16.78.b) la respuesta de frecuencia de amplitud correspondiente, trazada como se mostró en el capítulo 11.

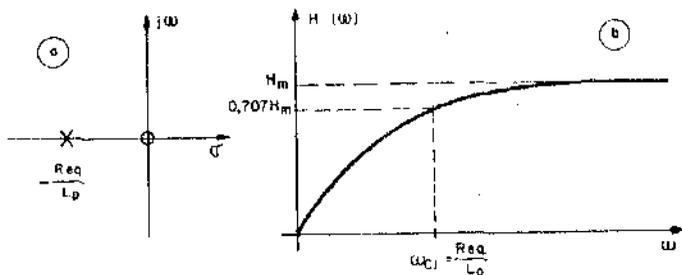


Fig. 16.78

Escribiendo la Ec. (16.180) en el dominio $j\omega$ queda:

$$H_B(j\omega) = H_m \frac{j\omega}{j\omega + \frac{R_{eq}}{L_p}}$$

En esta ecuación, para $\omega = \frac{R_{eq}}{L_p}$ resulta:

$$\begin{aligned} H_B(R_{eq}/L_p) &= \left| H_B(jR_{eq}/L_p) \right| = H_m \frac{\frac{R_{eq}}{L_p}}{\sqrt{\left(\frac{R_{eq}}{L_p}\right)^2 + \left(\frac{R_{eq}}{L_p}\right)^2}} = \\ &= \frac{H_m}{\sqrt{2}} = 0,707 H_m \end{aligned}$$

De modo que la pulsación de corte inferior resulta:

$$\omega_{ci} = \frac{R_{eq}}{L_p} \quad (16.181)$$

En el gráfico asintótico de Bode introducido en el capítulo 11, la pendiente de la asintota resulta de $6 \frac{db}{octava}$ y la pulsación de quebradura es la dada por la Ec. (16.181).

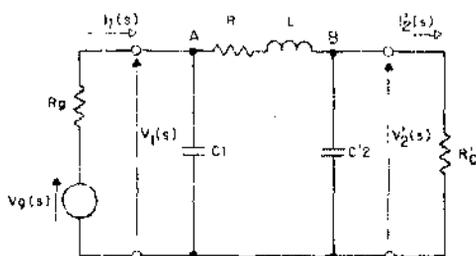


Fig. 16.79

c) Frecuencias altas

En la Fig. 16.79 se ha redibujado el circuito de la Fig. 16.75 en el dominio de frecuencia compleja, denominando.

$$R = R_t + R_2' \quad (16.182)$$

$$L = L_{d1} + L_{d2}' \quad (16.183)$$

Aplicando el método de los nodos resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{V_g(s)}{R_g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{AA}(s) & Y_{AB}(s) \\ Y_{BA}(s) & Y_{BB}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A(s) \\ V_B(s) \end{bmatrix}$$

y resolviendo para $V_B(s) = V_2'(s)$

$$V_2'(s) = V_B(s) = \frac{\begin{vmatrix} Y_{AA}(s) & \frac{V_g(s)}{R_g} \\ Y_{BA}(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{AA}(s) & Y_{AB}(s) \\ Y_{BA}(s) & Y_{BB}(s) \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{V_g(s)}{R_g} \frac{Y_{AB}(s)}{Y_{AA}(s)Y_{BB}(s) - Y_{AB}(s)Y_{BA}(s)} \quad (16.184)$$

Donde:

$$Y_{AA}(s) = \frac{1}{R_g} + sC_1 + \frac{1}{R + sL} = G_g + sC_1 + \frac{1}{R + sL} \quad (16.185)$$

$$Y_{BB}(s) = \frac{1}{R'_c} + sC_2 + \frac{1}{R + sL} = G'_c + sC_2 + \frac{1}{R + sL} \quad (16.186)$$

$$Y_{AB}(s) = Y_{BA}(s) = -\frac{1}{R + sL} \quad (16.187)$$

Sustituyendo las Ecs. (16.185), (16.186) y (16.187) en la Ec. (16.184) queda:

$$V'_2(s) = \frac{V_g(s)}{R_g} \frac{\frac{1}{R + sL}}{\left(G_g + sC_1 + \frac{1}{R + sL}\right)\left(G'_c + sC_2 + \frac{1}{R + sL}\right) - \left(\frac{1}{R + sL}\right)^2}$$

De modo que la transmitancia de tensiones resulta:

$$H_A(s) = \left. \frac{V'_2(s)}{V_g(s)} \right|_{CIN} = \frac{1}{R_g(R + sL)} \cdot \frac{1}{(G_g + sC_1)(G'_c + sC_2) + \frac{G_g + sC_1 + G'_c + sC_2}{R + sL} + \frac{1}{(R + sL)^2} - \frac{1}{(R + sL)^2}}$$

Simplificando y ordenando:

$$H_A(s) = \frac{1}{R_g} \frac{1}{(G_g + sC_1)(G'_c + sC_2) + (R + sL) + G_g + sC_1 + G'_c + sC_2}$$

o también:

$$H_A(s) = \frac{1}{R_g L C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{G_g}{C_1}\right)\left(s + \frac{G'_c}{C_2}\right)\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{s(C_1 + C_2) + G_g + G'_c}{L C_1 C_2}}$$

que puede escribirse:

$$H_A(s) = \frac{1}{R_g L C_1 C_2} \frac{1}{\left(s + \frac{G_g}{C_1}\right) \left(s + \frac{G'_c}{C_2}\right) \left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{L C_{eq}} \left(s + \frac{G_p}{C_p}\right)}$$

Donde.

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2'}{C_1 + C_2'}$$

$$G_p = G_p + G'_c$$

$$C_p = C_1 + C_2'$$

El denominador de la Ec. (16.188) es un polinomio de 3er. grado, que puede resolverse en forma numérica cuando se conocen los valores de los parámetros.

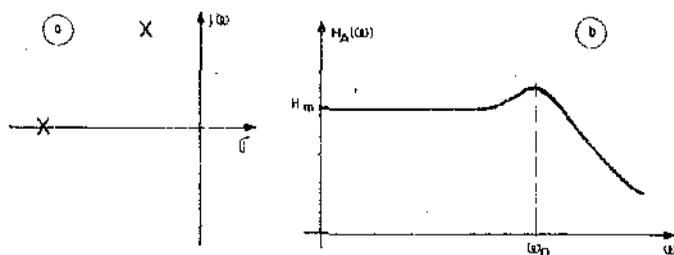


Fig. 16.80

El caso típico es el que corresponde a la configuración de polos y ceros de la Fig. 16.80a), donde existen dos polos complejos conjugados y uno real negativo. En la Fig. 16.80.b) se muestra la forma de la respuesta para $Q_0 > \sqrt{2}/2$. Naturalmente que la curva parte del valor de la transmitancia para frecuencias medias dada por la Ec. (16.172)

$$H_m = \frac{R'_c}{R_g + R_1 + R_2' + R'_c} \quad (16.172)$$

Nótese que cuando el factor de la selectividad es levemente superior a 0,707, se logra una extensión de la respuesta en alta frecuencia, ya que la

resonancia eleva la curva pero sin llegar a manifestarse el máximo correspondiente. En la Fig. 16.81 a) se muestra la configuración de polos y ceros del circuito completo y en la Fig. 16.81.b) se muestra la respuesta de frecuencia para $Q_0 \cong 0,75$.

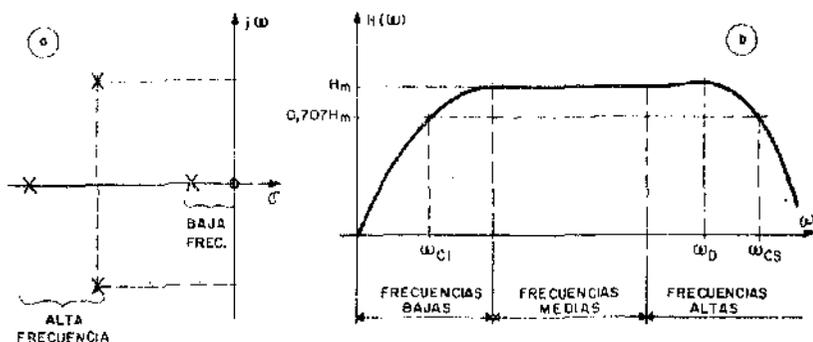


Fig. 16.81

Si, como ocurre con frecuencia, C_1 es despreciable por ser R_g pequeña, entonces desaparece el polo real negativo de la Fig. 16.80.a) y su equivalente de la Fig. 16.81.a). Si además es R'_c de valor elevado, según se vio en el capítulo 12 resulta:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_g + R} = \frac{\omega_0 (L_{d1} + L'_{d2})}{R_g + R_1 + R_2} \quad (16.189)$$

y

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C_2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2 Q_0^2}} \quad (16.190)$$

Donde $L = L_{d1} + L'_{d2}$.

La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de gráfico de Bode de amplitud resulta entonces de acuerdo a lo visto en el capítulo 11, de 12 dB/octava

16.18 Problemas resueltos

16.18.1) Calcular los valores máximo y mínimo de inductancia que pueden obtenerse asociando dos inductores de 1 H que pueden ser acoplados inducti-

vamente en serie o en paralelo, de tal modo que los flujos propios y mutuos se debiliten o se refuercen entre sí. El índice de acoplamiento puede variar entre:

$$0,1 \leq k \leq 0,9$$

Solución:

La inductancia máxima se obtendrá al asociar los inductores en serie. En este caso, de acuerdo a la Ec. (16.47) la inductancia total será:

$$L_{TS} = L_1 + L_2 \pm 2M = L_1 + L_2 \pm 2k \sqrt{L_1 L_2} \quad (16.47)$$

$$\text{y si } L_1 = L_2 = L$$

$$L_{TS} = 2L (1 \pm k) \quad (16.49)$$

Donde el signo positivo corresponde al caso en que los flujos mutuos y propios se refuerzan entre sí:

La Ec. (16.49) muestra claramente que la inductancia máxima se logra para el mayor índice de acoplamiento y el signo positivo. Esto es:

$$L_{TS \text{ máx}} = 2L (1 + k_{\text{máx}}) = 2(1 + 0,9) = 3,8 \text{ H}$$

que corresponde a la conexión indicada en la Fig. 16.82.a).

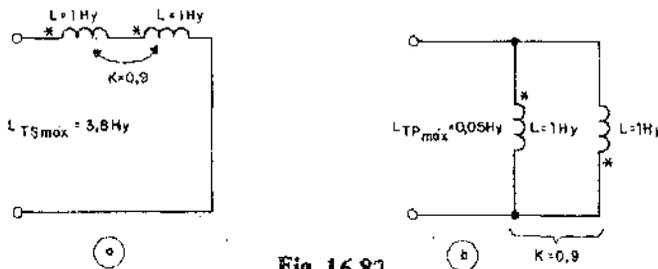


Fig. 16.82

16.18.2) Se dispone de dos inductores acoplados inductivamente. Cuando se los conecta en serie se miden los siguientes valores de inductancia total, según que los flujos se sumen o se resten.

$$L_{T_1} = 4 \text{ H}$$

$$L_{T_2} = 2 \text{ H}$$

Hallar el valor de la inductancia mutua.

Solución:

De acuerdo a la Ec. (16.47) resulta:

$$L_{T_1} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{T_2} = L_1 + L_2 - 2M$$

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$L_{T_1} - L_{T_2} = L_1 + L_2 + 2M - L_1 - L_2 + 2M$$

$$\therefore L_{T_1} - L_{T_2} = 4M$$

y, finalmente:

$$M = \frac{L_{T_1} - L_{T_2}}{4} = \frac{4H - 2H}{4} = 0,5H$$

16.18.3) Plantear las ecuaciones del método de las mallas para el circuito de la Fig. 16.83.

Solución:

Para aplicar las reglas dadas en el párrafo 16.9, reemplazamos los inductores de L_1 y L_2 por $L_{TSA} = L_1 + L_2 + 2M_A$ y los inductores L_3 y L_4 por $L_{TSB} = L_3 + L_4 - 2M_B$, tal como se ve en la Fig. 16.84.

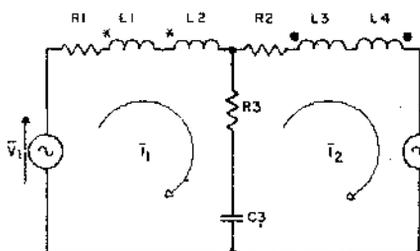


Fig. 16.83

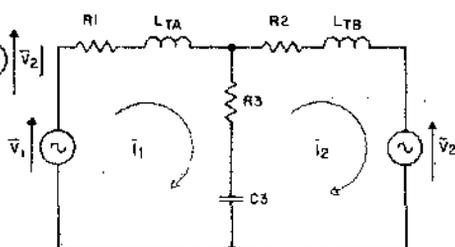


Fig. 16.84

En estas condiciones resulta:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ -\bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\bar{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_{TA} + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = R_1 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M_A)$$

$$\bar{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_{TB} + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} + j\omega(L_3 + L_4 - 2M_B)$$

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = - \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)$$

16.18.4) Plantear las ecuaciones del método de las mallas para el circuito de la Fig. 16.85.

Solución:

Aplicando las reglas del parágrafo 16.9, resulta:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ -V_2(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) & z_{13}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) & z_{23}(s) \\ z_{31}(s) & z_{32}(s) & z_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}$$

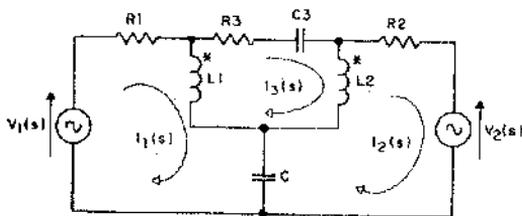


Fig. 16.85 ⁵

Donde:

$$Z_{11}(s) = R + sL_1 + \frac{1}{sC}$$

$$Z_{22}(s) = R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC}$$

$$Z_{33}(s) = R_3 + sL_T + \frac{1}{sC} = R_3 + s(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{1}{sC_3}$$

$$Z_{12}(s) = Z_{21}(s) = -\frac{1}{sC} - sM$$

$$Z_{13}(s) = Z_{31}(s) = -sL_1 + sM$$

$$Z_{23}(s) = Z_{32}(s) = -sL_2 + sM$$

16.18.5) Calcular el valor del coeficiente de acoplamiento crítico para el circuito acoplado de la Fig. 16.86.

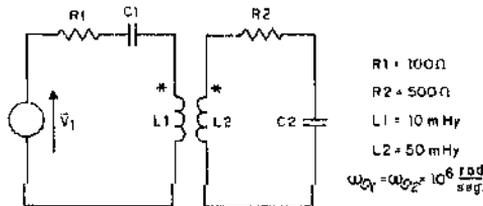


Fig. 16.86

Solución:

Según se vio en el párrafo 16.15.3, Ec. (16.112), cuando se tiene el acoplamiento crítico, la resistencia reflejada por el secundario sobre el primario a la frecuencia de resonancia es igual a la resistencia del primario.

La impedancia reflejada por el secundario sobre el primario es:

$$\bar{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \quad (16.191)$$

a la frecuencia de resonancia debe ser esta impedancia igual a R_1 . Esto es:

$$\bar{Z}_{R0} = R_1$$

que puede escribirse, teniendo en cuenta la Ec. (16.191).

$$\frac{\omega_0^2 k_c^2 L_1 L_2}{R_2} = R_1$$

$$\therefore k_c^2 = \frac{R_1 R_2}{\omega_0^2 L_1 L_2}$$

y reemplazando valores:

$$k_c^2 = \frac{100 \cdot 500}{10^{12} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 10^{-4}$$

$$\therefore k_c = 0,01$$

Naturalmente que se pudo haber hallado también el valor de k_c en base a la Ec. (16.110).

$$k_c = \frac{1}{\sqrt{Q_{01} Q_{02}}} \quad (16.110)$$

obteniéndose el mismo resultado.

16.18.6) Calcular el valor instantáneo de la corriente $i_1(t)$ del circuito de la Fig. 16.87.

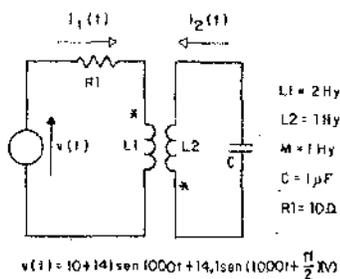


Fig. 16.87.

Solución:

Se aplicará el teorema de superposición, tomando tres estados, para:

$$v''(t) = 10$$

$$v''(t) = 141 \text{ sen } 1000t$$

$$v''(t) = 14,1 \text{ sen } \left(10.000 t + \frac{\pi}{2} \right)$$

a) Para $v'(t) = 10$

El circuito primario se reduce al mostrado en la Fig. 16.88.a), donde:

$$\bar{Z}'_R = \frac{\omega_0^2 M^2}{Z''_{22}} = 0$$

por ser una componente continua.

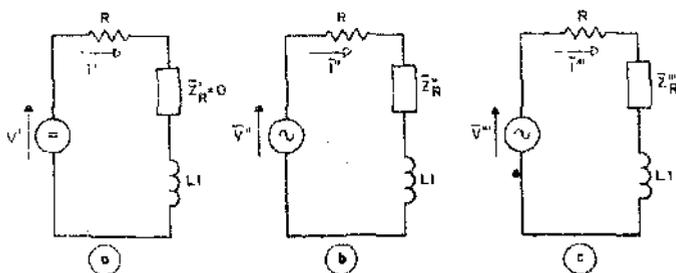


Fig. 16.88

Para el régimen permanente es:

$$i'(t) = \frac{v'(t)}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

b) Para $v''(t) = 141 \text{ sen } 1000 t$, (Fig. 16.88.b), resulta:

$$\bar{Z}''_R = \frac{\omega_1^2 M^2}{Z''_{22}} = \frac{10^6 \cdot 1}{j \left(\omega_1 L_2 - \frac{1}{\omega_1 C_2} \right)} = \frac{10^6}{j0} \Rightarrow \infty$$

En consecuencia

$$\bar{I}''_{1m} \frac{\bar{V}''_m}{\bar{Z}''_{11} + \bar{Z}''_R} \approx 0$$

y

$$\therefore i''_1(t) = 0$$

c) Para $v'''(t) = 14,1 \text{ sen } 10000 t$, (Fig. 16.88.c), queda:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_R''' &= \frac{\omega_2^2 M^2}{\bar{Z}_{22}'''} = \frac{\omega_2^2 M^2}{j \left(\omega_2 L_2 - \frac{1}{\omega_2 C_2} \right)} = \\ &= \frac{10^8}{j \left(10^4 - \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-6}} \right)} = j 1,01 \cdot 10^4 \Omega\end{aligned}$$

$$\therefore \bar{I}_{1m}''' = \frac{\bar{V}_m'''}{\bar{Z}_{11}''' + \bar{Z}_R'''} = \frac{14,1 e^{j\pi/2}}{R_1 + j\omega_2 L_1 + \bar{Z}_R'''} = \frac{14,1 e^{j\pi/2}}{10 + j10^4 \cdot 2 - j1,01 \cdot 10^4}$$

$$\therefore \bar{I}_{1m}''' = \frac{14,1 e^{j90^\circ}}{9,9 \cdot 10^3 e^{j89,94^\circ}} = 1,42 \cdot 10^{-3} e^{j0,06^\circ}$$

cuyo valor instantáneo es:

$$i_1'''(t) = J_m [I_{1m}'''] = J_m [\bar{I}_{1m}''' e^{j\omega_2 t}] = J_m [1,42 \cdot 10^{-3} e^{j0,06^\circ} e^{j10^4 t}]$$

resultando:

$$i_1'''(t) = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ sen } (10^4 t + 0,06^\circ)$$

Finalmente, aplicando el principio de superposición, se obtiene:

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) + i_1'''(t) = 1 + 0 + 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ sen } (10^4 t + 0,06^\circ) A$$

16.18.7) Dado el circuito de la Fig. 10.89, hallar todas las pulsaciones y anchos de banda típicos de la transferencia $H(\omega) = \left| \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}} \right|$ para el circuito doble sintonizado de la Fig. 16.89.

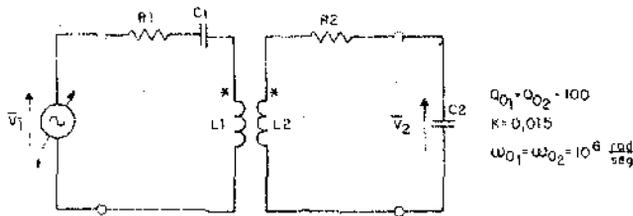


Fig. 16 89

Solución:

Como $Q_{01} = Q_{02}$ y $\omega_{01} = \omega_{02}$, se puede aplicar el método del párrafo 16.15.3.

De acuerdo a la Ec. (16.110), el acoplamiento crítico es:

$$k_c = \frac{1}{\sqrt{Q_{01} Q_{02}}} = \frac{1}{\sqrt{10^2 \cdot 10^2}} = 0,01$$

De modo que el circuito tiene un acoplamiento k superior al crítico k_c .

En consecuencia, puede aplicarse el procedimiento gráfico resumido en la Fig. 16.52 para hallar las pulsaciones y anchos de banda de la Fig. 16.53.

Como $Q_0 \gg 5$ y $k \ll 0,5$, puede aplicarse el método.

Los valores de los polos resultan:

$$p_{1;2} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j\omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right) = -\frac{10^6}{2 \cdot 100} \pm j 10^6 \left(1 - \frac{0,015}{2}\right)$$

$$\therefore p_{1;2} = [-5000 \pm j 992500] \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\text{y } p_{3;4} = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j\omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right) = -\frac{10^6}{2 \cdot 100} \pm j 10^6 \left(1 + \frac{0,015}{2}\right)$$

$$\therefore p_{3;4} = [-5000 \pm j 1007500] \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

En la Fig. 16.90 se han representado los polos p_1 y p_3 del semiplano complejo superior y se han realizado las construcciones explicadas en el párrafo 16.15.3 para el caso $k > k_c$.

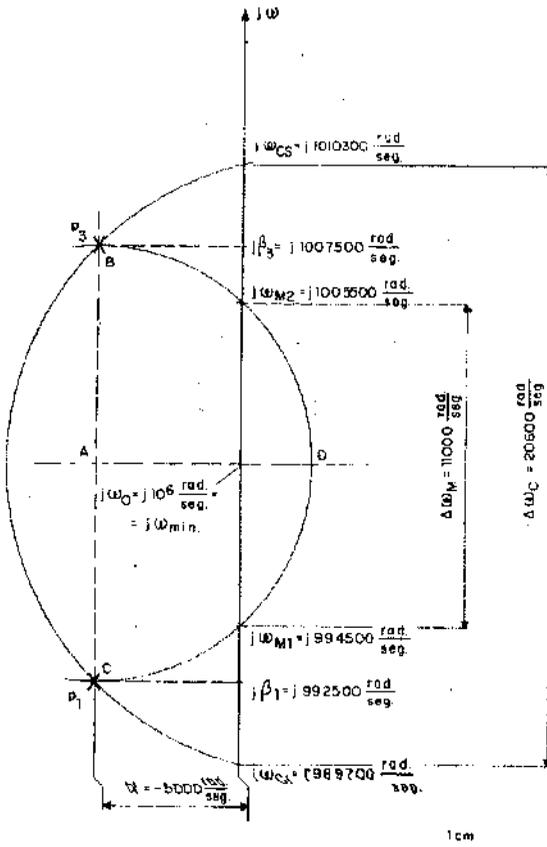


Fig. 16.90

1°) Con centro en A y radio \overline{AB} , se traza un arco de circunferencia que permite obtener las pulsaciones de los máximos de $H(\omega)$. Ellas son:

$$\omega_{M1} = 994.500 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$\omega_{M2} = 1.005.500 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

de modo que la separación entre los máximos es:

$$\Delta\omega_M = \omega_{M2} - \omega_{M1} = 11000 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

- 2°) Con centro en D y medio \overline{DB} se traza un arco de circunferencia que permite obtener las pulsaciones de corte para una caída de 3 dB. Se obtienen:

$$\omega_{CS} = 1010300$$

$$\omega_{CI} = 989700$$

resultando un ancho de banda:

$$\Delta\omega_c = \omega_{CS} - \omega_{CI} = 20600 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

16.19 Problemas propuestos

- 16.19.1) Determinar el valor de la corriente I_2 por aplicación del teorema de Thevenin en las secciones $A-A$ y $B-B$ del circuito de la figura 16.91.

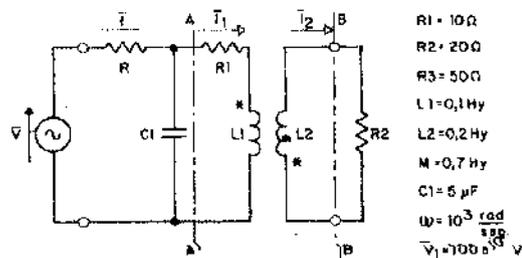


Fig. 16.91

Resultado:

$$\bar{I}_2 = (0,011 - j 0,15) \text{ A}$$

- 16.19.2) Determinar la polaridad y los valores de M y k necesarios para que el circuito de la figura 16.92 esté en resonancia.

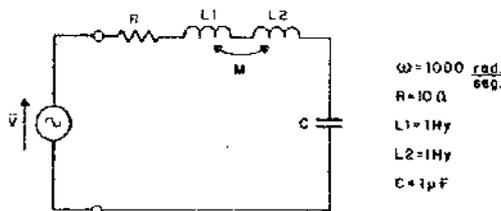


Fig. 16.92

Resultados:

$$M = 0,5 \quad k = 0,5$$

16.19.3) Dado el circuito de la figura 16.93, hallar:

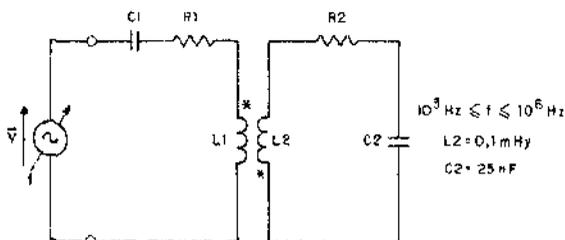


Fig. 16.93

- La expresión de la impedancia reflejada.
- La frecuencia para la cual dicha impedancia es resistiva.
- El intervalo de frecuencia para el cual la impedancia reflejada es de carácter capacitivo.

Resultados:

$$a) \quad \bar{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}$$

$$b) \quad f = 10^5 \text{ Hz.}$$

$$c) \quad 10^5 \text{ Hz} < f \leq 10^6 \text{ Hz}$$

16.19.4) Los valores de los parámetros de un transformador con núcleo ferromagnético son:

Resistencia del primario: $R_1 = 100 \text{ ohm}$ Resistencia del secundario: $R_2 = 1000 \text{ ohm}$ Inductancia de dispersión del primario: $L_{d1} = 0,05 \text{ H}$ Inductancia de dispersión del secundario: $L_{d2} = 0,54 \text{ H}$

Capacitancia parásita del secundario: $C_2 = 15 \text{ pF}$

Inductancia de magnetización del primario: $L_p = 20 \text{ H}$

El transformador está cargado con una resistencia $R_C = 1 \text{ M ohm}$ y alimentado por un generador de resistencia interna R_g .

Se pide hallar, suponiendo despreciables los efectos de C_1 y R'_C :

- La frecuencia de resonancia del circuito parcial de alta frecuencia para un factor de selectividad $Q_0 = 0,75$.
- El valor que debe darse a la resistencia R_g para que $Q_0 = 0,75$.
- El valor de la frecuencia de corte inferior f_{ci}

Resultados:

- $f_0 = 13767 \text{ Hz}$.
- $R_g = 1808 \text{ ohm}$.
- $f_{ci} = 14,9 \text{ Hz}$

16.19.5) Para el circuito de la figura 16.94, calcular los siguientes valores:

- La impedancia \bar{Z}_{11} de la malla izquierda.
- Las impedancias \bar{Z}_{R2} , \bar{Z}_{R4} y \bar{Z}_{R6} reflejadas por las mallas de la derecha sobre la de la izquierda.
- La impedancia de excitación $\bar{Z}_{A,B}$.
- La corriente compleja eficaz del primario, \bar{I}_1 .
- Las tensiones complejas eficaces \bar{V}_R , \bar{V}_L y \bar{V}_C .

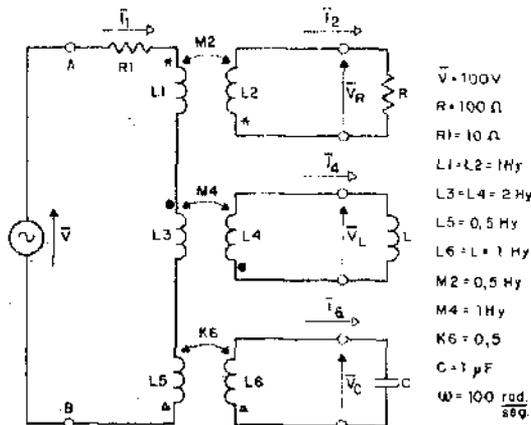


Fig. 16.94

Respuestas:

a) $\bar{Z}_{11} = (10 + j 350) \text{ ohm.}$

b) $\bar{Z}_{R2} = (12,5 - j 12,5) \text{ ohm.}$

$$\bar{Z}_{R4} = -j 33,33 \text{ ohm}$$

$$\bar{Z}_{R6} = + j 1,39 \text{ ohm.}$$

c) $\bar{Z}_{AB} = (22,5 + j 305,56) \text{ ohm.}$

d) $\bar{I}_1 = (0,24 - j 0,33) \text{ A}$

e) $\bar{V}_R = (- 8,75 + j 7,55) \text{ V}$

$$\bar{V}_L = (- 10,87 - j 0,8) \text{ V}$$

$$\bar{V}_C = (12,82 + j 0,94) \text{ V}$$

Régimen permanente de circuitos trifásicos

17.1 Introducción: Este capítulo tiene por objeto plantear ideas básicas sobre el estudio de los circuitos trifásicos, y algunas particularidades de los mismos.

Se examinarán con cierto detalle los sistemas perfectos y la forma de concebir las fuentes polifásicas a partir de generadores monofásicos ideales. Luego del planteo de algunas definiciones fundamentales, se analizará la concatenación de los sistemas trifásicos y las relaciones entre las variables eléctricas, finalizando con el planteo de las potencias en dichos circuitos.

A modo de información se mencionarán luego los sistemas desequilibrados, incluyendo algunos ejemplares básicos para ilustrar el tema. Esta información sólo tiene por misión ser una introducción al estudio de dichos sistemas, que en principio, no constituye el objeto de este capítulo.

El estudio de los sistemas equilibrados se completa mediante la presentación de problemas resueltos y propuestos.

17.2 Generalidades

Hasta este capítulo, la transmisión de la energía de un generador a una carga, se efectuaba por medio de una línea bifilar que los conectaba entre sí, pues tanto el generador como la carga poseían dos bornes de conexión. Esto caracteriza al llamado *sistema monofásico*.

Como se verá luego, considerando varios sistemas monofásicos conectados de manera definida se llega al llamado *sistema polifásico*, donde cada una de sus partes constitutivas se denomina fase. Adviértase que la palabra fase se

emplea para señalar una parte correspondiente del sistema polifásico de circuitos eléctricos. Es evidente entonces, que según sea el número de fases del sistema excitador y carga, los circuitos pueden ser bifásicos, trifásicos, tetrafásicos, etcétera.

El más difundido es el sistema trifásico, y es el que se analizará en este capítulo. Por otra parte si bien es cierto que la maquinaria industrial posee generalmente motores trifásicos que se alimentan de generadores trifásicos, también estos últimos pueden alimentar a cargas monofásicas conectadas convenientemente. Es de hacer notar que la mayoría de los circuitos trifásicos puede resolverse considerando sólo una fase, mediante los métodos generales conocidos al presente. Solamente, los sistemas desequilibrados requieren un estudio especial.

El hecho de que los sistemas de potencia sean trifásicos se debe a que éstos presentan marcadas ventajas respecto de los monofásicos, entre otros, mejor aprovechamiento del cobre y el hierro en los generadores, así como también el cobre en los cables de distribución.

Adicionalmente, como se demostrará, resulta que en los llamados sistemas perfectos la potencia instantánea es constante y no variable instantánea como en el sistema monofásico, lo que trae aparejado una mejor marcha de las máquinas eléctricas rotativas.

17.3 Definiciones fundamentales

Los distintos autores introducen para el tratamiento de los sistemas polifásicos denominaciones como: equilibrado, simétrico, balanceado, perfecto, regular, etc. A veces asignan el mismo concepto a distintos vocablos e incluso definen de distinta manera a alguno de los términos precitados. En este libro se seguirá la conceptualización introducida por el Ing. Miguel Simonoff en sus obras editadas por la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la Universidad Nacional de La Plata: "Oscilaciones eléctricas" (1936) y "Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica" (1942), en lo referente a los sistemas de tensiones y corrientes, complementándola con una clasificación de los sistemas de cargas.

Un sistema polifásico está constituido por n tensiones senoidales de la misma frecuencia, conectadas a n cargas a través de n pares de conductores, dando lugar a n corrientes que circulan por los mismos. Cada circuito constituido por un generador, un par de conductores y la carga asociada a ellos se denomina *fase*. En las Figs. 17.1.a) y 17.1.b), se muestra en los dominios del tiempo y de frecuencia el caso particular de tres tensiones del mismo valor eficaz e igualmente defasadas entre sí. Nótese que la suma de los fasores de

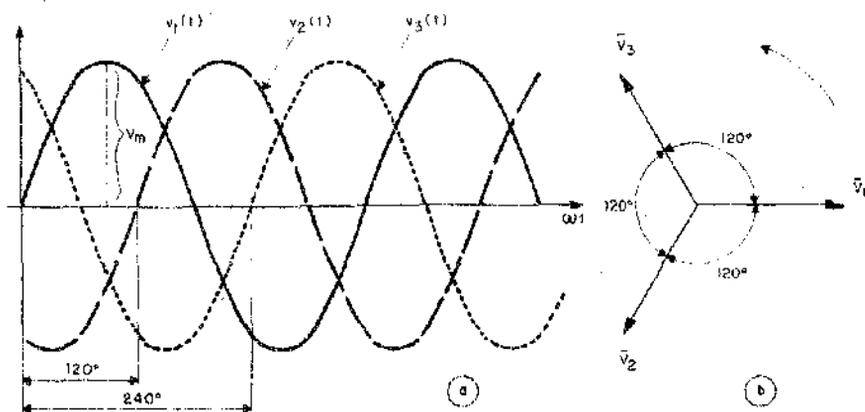


Fig. 17.1

la Fig. 17.1.b) es siempre nula. Todo sistema de tensiones o corrientes poli-fásicos cuya resultante es nula, se denomina *equilibrado*. Por lo tanto, desde el punto de vista de la resultante, los sistemas de tensiones y corrientes se dividen en:

Sistemas de tensiones
o corrientes

- | | |
|---|---|
| } | 1) equilibrados (resultante nula) |
| | 2) desequilibrados (resultante no-nula) |

Los sistemas de tensiones o corrientes pueden tener todos los fasores de la misma amplitud, en cuyo caso se denominan *regulares*.

Si todos los fasores están igualmente defasados entre sí en $2\pi/n$, se denominan *propios*. Si cumplen simultáneamente ambas condiciones, son sistemas *perfectos*. En consecuencia, desde el punto de vista de la simetría los sistemas de tensiones o corrientes se clasifican en:

Sistema de tensiones
y corrientes

- | | | | |
|---|----------------|-----------------------------------|---|
| } | 1) simétricos | 1.1) regulares
(en amplitud) | 1.1.3) perfectos
(en amplitud
y fase) |
| | | 1.2) propios
(en fase) | |
| | 2) asimétricos | 2.1) irregulares
(en amplitud) | |
| | | 2.2) impropios
(en fase) | |

Nótese que un sistema de tensiones o corrientes *perfecto* es necesariamente *equilibrado*, pero puede no cumplirse la inversa. Esto es, un sistema equilibrado puede no ser simétrico.

En efecto, un sistema de n tensiones equilibrado o no, conectado a un sistema de n cargas mediante n conductores (sin neutro), genera siempre un sistema de corrientes equilibrado, que puede no ser simétrico.

Finalmente se dirá que un sistema de cargas es *balanceado* cuando está constituido por n cargas iguales. Luego desde el punto de vista del sistema de cargas, es:

$$\text{Sistema de cargas} \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ balanceado (cargas iguales)} \\ 2) \text{ desbalanceado (cargas diferentes)} \end{array} \right.$$

17.4 Sistemas perfectos

17.4.1) **Generalidades:** De acuerdo a las definiciones introducidas en el párrafo anterior, un sistema polifásico perfecto de tensiones, puede ser expresado en el dominio temporal como:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_m \text{sen } \omega t \\ v_2(t) &= V_m \text{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \\ v_i(t) &= V_m \text{sen} \left[\omega t - \frac{2\pi}{n} (i-1) \right] \\ v_n(t) &= V_m \text{sen} \left[\omega t - \frac{2\pi}{n} (n-1) \right] \end{aligned}$$

Al aplicar estas tensiones a n circuitos bifilares constituidos por un sistema de cargas balanceado, se dará lugar a un sistema de corrientes también perfecto.

Para el sistema trifásico es $n = 3$, resultando un desfase de 120° entre las distintas tensiones.

En las Figs. 17.1.a) y 17.1.b) se muestra un sistema trifásico perfecto de tensiones.

El orden en que los fasores armónicos pasan por un eje dado, se denomina *secuencia* u *orden de alternación* de las fases. Así en la Fig. 17.1.b), si se considera la rotación positiva en el sentido antihorario indicado, los fasores pasarán por un determinado punto en el orden 1-2-3-1-..., denominándose a la misma *secuencia* 1-2-3 o *secuencia directa*.

Si se cambia el sentido de rotación del generador o se permutan dos de los tres conductores se invierte la secuencia de fases. En la Fig. 17.2 los fasores pasan en el orden 3 - 2 - 1 - 3 . . . , dando lugar a la llamada *secuencia 3 - 2 - 1* o *secuencia inversa*.

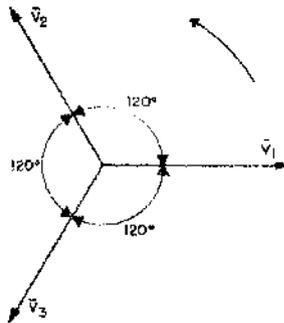


Fig. 17.2

17.4.2) **Concatenación de los sistemas trifásicos:** Existen dos maneras de concatenar tanto los generadores como las cargas, y son las llamadas concatenación en estrella y concatenación en triángulo.

a) *Concatenación en estrella*

En la Fig. 17.3 se muestra la concatenación en estrella de un generador trifásico representado a partir de generadores monofásicos.

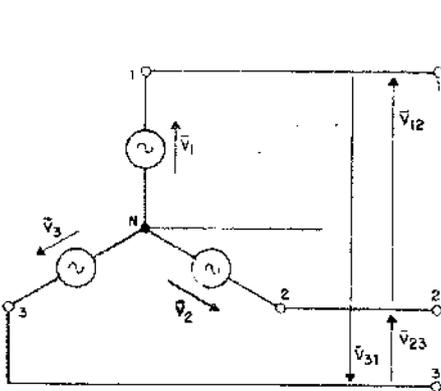


Fig. 17.3

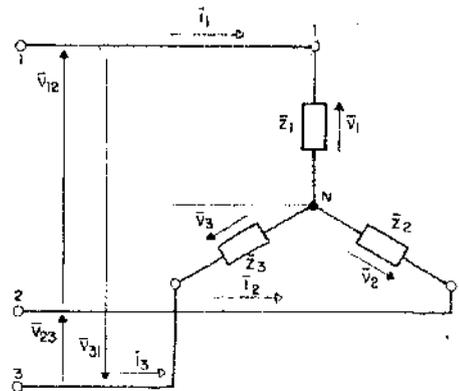


Fig. 17.4

El punto común N se denomina punto neutro, y eventualmente, el conductor que pueda unir este punto, con un punto homólogo en la carga se denomina conductor neutro. Los conductores que unen los otros puntos del generador con la carga se denominan conductores de línea.

\bar{V}_1 , \bar{V}_2 y \bar{V}_3 se denominan tensiones de fase o tensiones simples, mientras que \bar{V}_{12} , \bar{V}_{23} y \bar{V}_{31} tensiones de línea o tensiones compuestas. Por simple inspección se advierte que las corrientes en los generadores y las líneas serán iguales, no así la tensión entre líneas en comparación a la tensión por fase.

Si bien es cierto, que un mismo circuito, los generadores y la carga pueden tener distinto esquema de conexiones, para encontrar las relaciones entre las tensiones de línea y fase se considerará el circuito de la Fig. 17.4. Se supone un sistema perfecto de tensiones de secuencia directa que alimenta a una carga balanceada constituida por tres impedancias iguales conectadas en estrella. Claro que, independientemente de la forma de conexión de la carga, a las impedancias, tensiones y corrientes en las ramas de la misma se las denomina impedancias de fase \bar{Z}_f , tensión de fase \bar{V}_f y corriente de fase \bar{I}_f en forma genérica. Las tensiones entre líneas se denominan \bar{V}_L y, y las corrientes en las mismas \bar{I}_L .

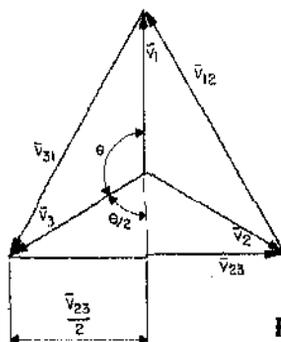


Fig. 17.5

En base a los supuestos anteriores puede construirse el diagrama fasorial ilustrado en la Fig. 17.5. Téngase en cuenta que debe cumplirse que $\bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0$, al ser el sistema perfecto y por lo tanto equilibrado y que la suma adecuada de las tensiones por fase darán las tensiones entre líneas. Además, las tensiones por fase mantienen el mismo defasaje relativo de 120° . Se observa que, por ejemplo, para el módulo de la tensión entre los puntos 2 y 3 resulta:

$$\frac{V_{23}}{2} = V_3 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (17.1)$$

pero

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \quad (17.2)$$

reemplazando la Ec. (17.2) en la Ec. (17.1) y operando:

$$V_{23} = 2 V_3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2 V_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore$$

$$V_{23} = \sqrt{3} V_3$$

y generalizando: $V_L = \sqrt{3} V_f$ (17.3)

además es inmediato que: $I_L = I_f$ (17.4)

La Ec. (17.5) indica que el módulo de la tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión de fase. La Ec. (17.4) muestra que los módulos de las corrientes de línea y fase son iguales.

b) Concatenación en triángulo

En la Fig. 17.6 se ilustra la concatenación en triángulo de un generador trifásico, representado a partir de generadores monofásicos. Dicha disposición forma un circuito cerrado, y las líneas de distribución se toman desde los vértices del triángulo. Nótese que si bien es posible conectar generadores en triángulo, no es muy ventajoso, puesto que al carecer de neutro no existe un punto natural para conectarlo a tierra y asegurar la protección del sistema. Advertiéndose además, que en esta conexión, el sistema debe ser siempre equilibrado, pues el triángulo ofrece un camino de cortocircuito a la corriente que puede circular dentro del mismo si el sistema no lo es, lo que trae aparejado serios problemas al generador.

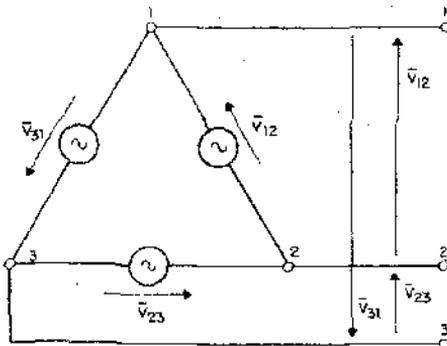


Fig. 17.6

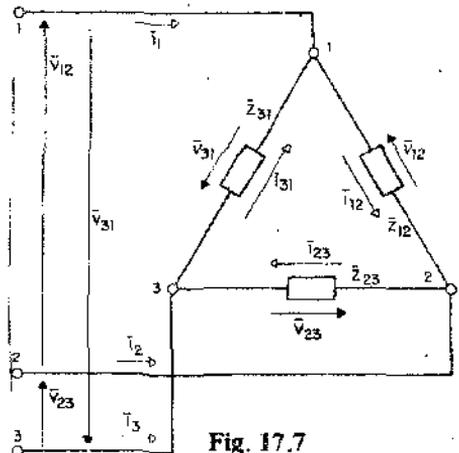


Fig. 17.7

Por simple inspección se advierte que en este tipo de conexión la tensión entre líneas es igual a la tensión por fase, en cambio la corriente de línea difiere de la de fase.

Con el objeto de encontrar la relación entre las corrientes de línea y las de fase se tendrá en cuenta el circuito de la Fig. 17.7.

Se supone un sistema perfecto de tensiones de secuencia directa conectado a una carga balanceada, lo que dará lugar a un sistema perfecto de corrientes.

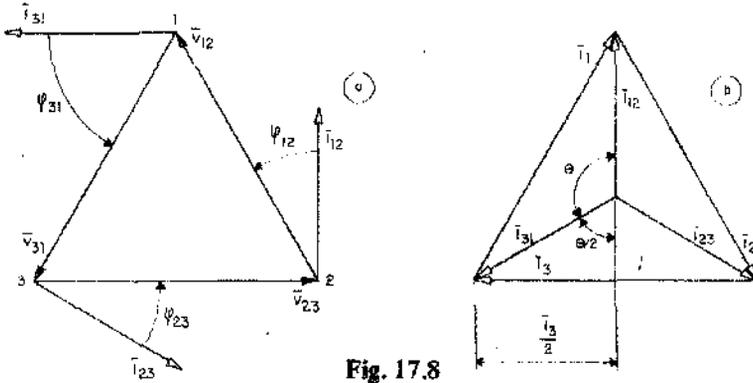


Fig. 17.8

La nomenclatura respecto a las tensiones y corrientes de línea y fase son las comentadas anteriormente. En base a todo esto puede construirse el diagrama parcial ilustrado en la Fig. 17.8.a), en el que las impedancias por fase se han supuesto de carácter inductivo, de allí que las corrientes atrasen respecto de las correspondientes tensiones. También aquí debe cumplirse que $\vec{V}_{12} + \vec{V}_{23} + \vec{V}_{31} = 0$. Por las condiciones impuestas será también $I_{12} = I_{23} = I_{31}$ y $\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31}$ por lo cual $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 0$. Por lo tanto, podrá construirse el diagrama fasorial de corrientes mostrado en la Fig. 17.8.b) en el que se trasladaron a un mismo punto el origen de los factores correspondientes a las corrientes de fase, manteniendo entre ellas el mismo defasaje relativo de 120° . Por adecuada, la suma de las corrientes de fase se obtienen las correspondientes de línea. En el mismo se observa que, por ejemplo, para el módulo de la corriente \vec{I}_3 resulta:

$$\frac{I_3}{2} = I_{31} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = I_{31} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore I_3 = \sqrt{3} I_{31}$$

generalizando resulta: $I_L = \sqrt{3} I_f$ (17.5)

por simple inspección: $V_L = V_f$ (17.6)

La Ec. (17.5) indica que el módulo de la corriente de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que el correspondiente a la de la fase. La Ec. (17.6) muestra que son iguales los módulos de las tensiones de línea y fase.

17.4.3) **Potencia en sistemas trifásicos perfectos:** Independientemente a la forma de conexión, por lo expuesto en el Cap. 7, es sabido que la potencia activa por fase será:

$$P_f = V_f I_f \cos \varphi_f$$

y por ser el sistema trifásico perfecto, la *potencia activa total* será:

$$P = 3 V_f I_f \cos \varphi_f \quad (17.7)$$

De manera análoga que en el Cap. 7, la *potencia reactiva total* para el sistema trifásico es:

$$P_q = 3 V_f I_f \sen \varphi_f \quad (17.8)$$

y la *potencia aparente total* será:

$$\overline{P}_s = 3 \overline{V}_f \overline{I}_f^* = 3 V_f e^{j\theta} V_f I_f e^{j\theta} I_f^* \quad (17.9)$$

donde naturalmente, su módulo es:

$$P_s = 3 V_f I_f$$

Es de hacer notar que en los sistemas monofásicos, cuando $P_q = 0$, puede decirse que desde los bornes de entrada al circuito es o se comporta como resistivo puro.

En cambio en un sistema trifásico hay que aplicar este concepto en forma cuidadosa, pues en las distintas fases pueden existir cargas de carácter reactivo inductivo y reactivo capacitivo de forma que la potencia reactiva total pueda ser nula, lo que no indica que desde cualquier par de terminales el circuito se comporte como resistivo puro. Esta situación puede darse en sistemas desequilibrados.

Por otra parte, en las Ecs. (17.7); (17.8) y (17.9) los parámetros que intervienen son los de fase. Pero puede ocurrir que si por ejemplo la concatenación es estrella y no se tiene acceso al neutro, no se conocerá la tensión de fase. Además, si la concatenación es en triángulo debería abrirse el mismo para medir la corriente de fase. Todo esto muestra la conveniencia de expre-

sar las ecuaciones anteriormente mencionadas en función de los parámetros de línea.

Teniendo en cuenta que para la concatenación en estrella las relaciones entre los parámetros de línea y fase están dadas por las Ecs. (17.3) y (17.4); y para la concatenación triángulo por las Ecs. (17.5) y (17.6) reemplazando estas ecuaciones en las Ecs. (17.7), (17.8) y (17.9) se encuentra que *independientemente del tipo de conexión* será:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi_f \quad (17.10)$$

$$P_q = \sqrt{3} V_L I_L \sen \varphi_f \quad (17.11)$$

$$\bar{P}_s = \sqrt{3} V_L e^{j\theta} v_f I_L e^{j\theta r_f^*} = P + j P_q \quad (17.12)$$

donde su módulo es $P_s = \sqrt{3} V_L I_L$

Se recuerda que φ_f es el ángulo correspondiente a la impedancia de carga por fase, y no se relaciona con el ángulo entre V_L e I_L .

Finalmente, por las consecuencias que trae aparejado es útil estudiar la expresión de la potencia instantánea total.

Para el caso perfecto en estudio y suponiendo cargas de carácter inductivo, las tensiones y corrientes instantáneas pueden expresarse como:

$$v_1(t) = V_f \sqrt{2} \sen \omega t \quad ; \quad i_1(t) = I_f \sqrt{2} \sen (\omega t - \varphi_f)$$

$$v_2(t) = V_f \sqrt{2} \sen \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) ; \quad i_2(t) = I_f \sqrt{2} \sen \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi - \varphi_f \right)$$

$$v_3(t) = V_f \sqrt{2} \sen \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) ; \quad i_3(t) = I_f \sqrt{2} \sen \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi - \varphi_f \right)$$

la potencia por fase se calcula como: $p(t) = v(t) i(t)$

$$\therefore p_1(t) = 2 V_f I_f \sen \omega t \sen (\omega t - \varphi_f)$$

$$p_2(t) = 2 V_f I_f \sen \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \sen \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi - \varphi_f \right)$$

$$p_3(t) = 2 V_f I_f \sen \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \sen \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi - \varphi_f \right)$$

recordando que: $\sen \alpha \sen \beta = \frac{1}{2} \left[\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \right]$

Las expresiones anteriores resultan:

$$p_1(t) = V_f I_f \cos \varphi_f - V_f I_f \cos (2 \omega t - \varphi_f) \quad (17.13)$$

$$p_2(t) = V_f I_f \cos \varphi_f - V_f I_f \cos \left(2 \omega t - \frac{4}{3} \pi - \varphi_f \right) \quad (17.14)$$

$$p_3(t) = V_f I_f \cos \varphi_f - V_f I_f \cos \left(2 \omega t - \frac{8}{3} \pi - \varphi_f \right) \quad (17.15)$$

Puesto que la potencia instantánea total será:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$$

se realiza la suma de las Ecs. (17.13), (17.14) y (17.15), donde se anulan al sumarse los segundos términos del segundo miembro, resultando:

$$p(t) = 3 V_f I_f \cos \varphi_f = P \quad (17.16)$$

La Ec. (17.16) indica que la potencia instantánea en los sistemas perfectos no es función del tiempo; es decir, que es constante e igual a la potencia activa.

Además, se observa, por comparación con la expresión de la potencia instantánea hallada en el Cap. 7, Ec. (7.22), que carece del término pulsatorio que existía para el sistema monofásico. Esto crea condiciones ventajosas respecto al funcionamiento de las máquinas trifásicas desde el punto de vista mecánico, pues se eliminan las vibraciones en el funcionamiento de los mismos.

17.4.4) Resolución de los sistemas perfectos: Los sistemas perfectos se resuelven por los métodos de análisis de circuitos en régimen senoidal permanente ya conocidos. Pero antes, de dar algunos ejemplos, es conveniente efectuar ciertas observaciones y luego plantear una forma de simplificar los cálculos.

Una primera observación se refiere a la elección de algunas de las tensiones dato como referencia con un ángulo de fase nulo. Esto se debe a que generalmente, se conocen los módulos de las tensiones de excitación pero no su fase. La elección de una de ellas como referencia determinará los ángulos de fase de las demás tensiones del circuito. Si arbitrariamente se toma como referencia a \bar{V}_{23} , en los diagramas de la Fig. 17.9 se representan para esa condición todas las tensiones para la secuencia 1-2-3 y para la 3-2-1.

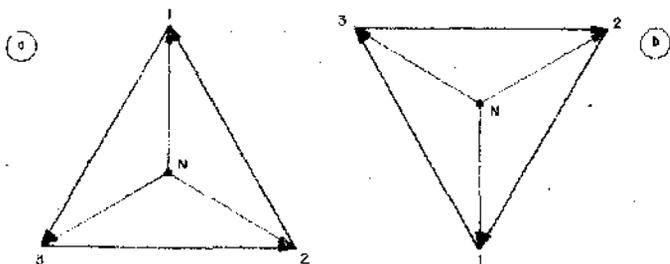


Fig. 17.9

De la Fig. 17.9.a) para el caso de secuencia 1 - 2 - 3 se desprende que:

$$\bar{V}_{12} = V_L e^{j120^\circ}$$

$$\bar{V}_{23} = V_L e^{j0}$$

$$\bar{V}_{31} = V_L e^{j240^\circ}$$

$$\bar{V}_{1N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j90^\circ}$$

$$\bar{V}_{2N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j330^\circ} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$$

$$\bar{V}_{3N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j210^\circ} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{-j150^\circ}$$

De la Fig. 17.9.b) para el caso de secuencia 3 - 2 - 1 resulta:

$$\bar{V}_{12} = V_L e^{j240^\circ}$$

$$\bar{V}_{23} = V_L e^{j0}$$

$$\bar{V}_{31} = V_L e^{j120^\circ}$$

$$\bar{V}_{1N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j270^\circ} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{-j90^\circ}$$

$$\bar{V}_{2N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}$$

$$\bar{V}_{3N} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j150^\circ}$$

con lo cual el problema de la elección de fase queda unívocamente definido.

Una segunda observación es la referida al conductor neutro que en el caso de la Fig. 17.4 une el punto común o neutro de la estrella de carga, con su homólogo en el generador de la Fig. 17.3. Debido a que el sistema de tensión que se aplica es perfecto, y la carga es balanceada, existirá un sistema perfecto de corrientes. Por aplicación de la 1ª Regla de Kirchhoff resulta que la corriente en el conductor neutro será:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Esto significa que para las condiciones impuestas, el conductor neutro no transporta ninguna corriente, y en principio podría eliminarse si se tiene la certeza que la carga será siempre balanceada. Pero esto trae aparejado un riesgo, pues si por algún motivo varían algunas de las impedancias de carga, desbalanceándose el sistema, al no existir el conductor neutro se producirán tensiones asimétricas en las fases de la carga, a pesar que las tensiones provistas por el generador sean perfectas.

Es por ello, además de otras razones, que en general es conveniente la inclusión del conductor neutro. Al no ser la carga perfectamente balanceada, la suma de las tres corrientes de línea no será nula, pero en general pequeña, lo que hace que el conductor neutro pueda tener menos sección que las de línea. Además hay que tener en cuenta que en general las líneas trifásicas son las que alimentan a las cargas monofásicas, donde ellas se conectan entre un conductor de línea y el neutro.

Finalmente, se planteará una forma de reducir cálculos en la solución de los sistemas trifásicos perfectos. Esta reducción de cálculos se debe al simple hecho que, por las condiciones impuestas, bastará con analizar una sola fase,

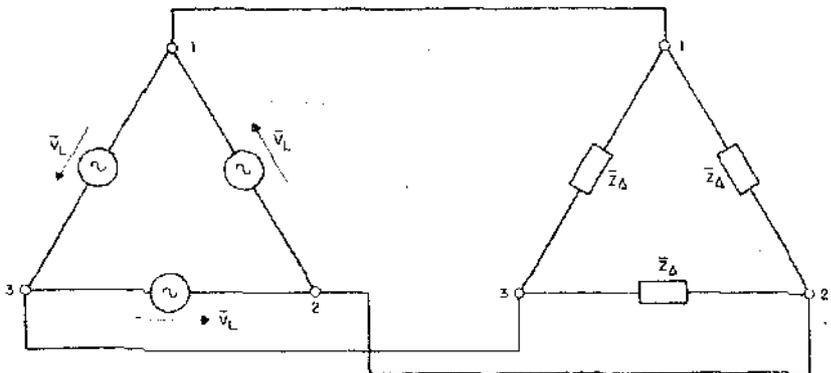


Fig. 17.10

y transportar los resultados a las restantes con igual módulo y el defasaje correspondiente. Cuando el problema es referido a una conexión en estrella de generador y carga, su solución es inmediata, pues basta sólo considerar la tensión de fase de excitación y la impedancia por fase de la carga. Deberá operarse un procedimiento previo, cuando se presenta, por ejemplo, la disposición indicada en la Fig. 17.10. El procedimiento general consiste en transformar el circuito, reemplazando las conexiones en triángulo de generador y carga por su equivalente en estrella.

En lo que respecta a la carga, debe recordarse lo expuesto en el Cap. 14 respecto de las transformaciones estrella-triángulo. Las Ecs. (14.31), (14.32) y (14.33) permiten transformar tres impedancias conectadas en triángulo a un equivalente de tres impedancias conectadas en estrella. Como en este caso las tres impedancias del triángulo son iguales, las impedancias por fase de la estrella equivalente balanceada resultan tres veces más pequeñas que las impedancias por fase del triángulo, es decir:

$$\bar{Z}_\lambda = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}$$

Respecto de la excitación, deberá cumplirse que el módulo de las tensiones de fase del generador equivalente conectado en estrella, sea $\sqrt{3}$ veces menor que las tensiones de línea dadas, es decir:

$$V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

de esta forma se llega al circuito equivalente mostrado en la Fig. 17.11.a). A partir del mismo se encuentra el *circuito equivalente monofásico* ilustrado en la Fig. 17.11.b). El mismo, está constituido por una fase del equivalente trifásico de cuatro conductores cuya tensión es igual al módulo de la tensión de fase, a la que se le asigna una fase nula, y cuya impedancia de carga es igual a una de las impedancias de la estrella equivalente. De esta forma podrá hallarse la corriente de línea que resultará con un ángulo de fase respecto a la referencia adoptada para la tensión, y como ésta se tomó con fase nula dicho ángulo será $-\varphi_Z$.

Todas las corrientes de línea poseerán igual módulo que la hallada, y estarán defasadas entre sí en 120° . Finalmente, las corrientes de fase en las impedancias conectadas en el triángulo original poseerán un módulo $\sqrt{3}$ veces menor que las corrientes de línea. Sus ángulos de fase se determinarán estableciendo los ángulos de fase de las tensiones entre líneas, a las que se le sumará, con su signo, el ángulo de fase hallado para la corriente de línea en el equivalente monofásico. Véase el problema 17.5.3.

Nótese, que en el equivalente de la Fig. 17.11.b) se ha cerrado el circuito por tierra. Esto se debe a que al ser nula la corriente en el conductor neutro, no existirán en él, caídas de tensión ni pérdidas de potencia, por lo cual debe eliminárselo para los cálculos y no considerar su resistencia. Solamente, si los requisitos del problema lo imponen, debería considerarse la resistencia del conductor de línea.

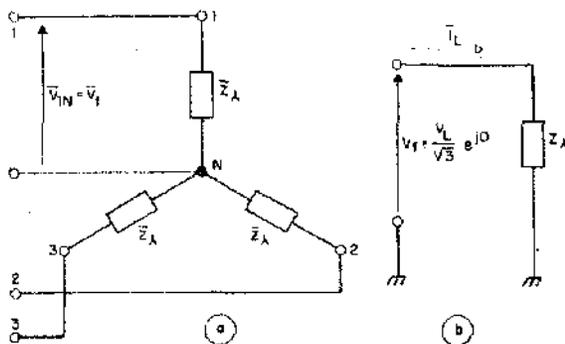


Fig. 17.11

17.5 Sistemas asimétricos y desequilibrados

Cuando las tensiones que provee el generador trifásico no son simétricas, es decir con amplitudes y/o defasajes desiguales, o las cargas no son balanceadas, resultará en general, que las corrientes en los circuitos son asimétricas y, según la conexión, no son equilibradas. Por lo tanto, se llega al sistema asimétrico y/o desequilibrado por asimetría del generador, o por desbalance de la carga, o por ambas razones a la vez. Algunos de los problemas que se presentan en la práctica, son sencillos de resolver, otros en cambio reciben un tratamiento específico.

El caso a tratar es el siguiente: los generadores trifásicos se diseñan, en principio, para suministrar tensiones perfectas. Las líneas trifásicas, además de conectarse a receptores trifásicos, alimentan también a cargas monofásicas, que se tratan de distribuir de igual forma en cada una de las fases. Esto no siempre se puede lograr adecuadamente y la carga se presenta desbalanceada. Es de hacer notar que estos problemas con *cargas desbalanceadas estáticas* se pueden resolver fácilmente por los métodos empleados hasta el presente, lo que puede comprarse mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1:

Para el circuito y datos indicados en la Fig. 17.12, siendo la excitación de secuencia inversa 3-2-1 se desea calcular las corrientes en los conductores de línea y en el neutro.

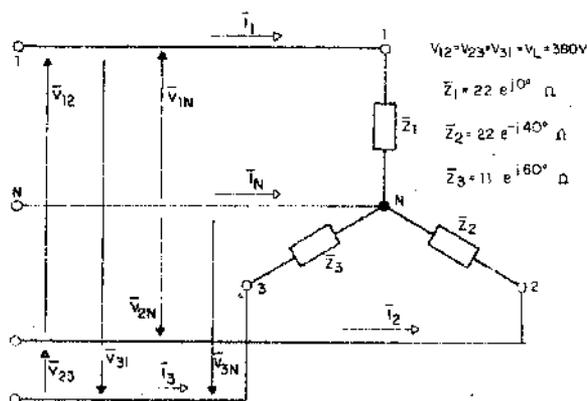


Fig. 17.12

Solución:

De acuerdo a lo explicado en el párrafo 17.3.4 resulta:

$$\bar{V}_{1N} = 220 e^{j270^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{2N} = 220 e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{3N} = 220 e^{j150^\circ} \text{ V}$$

por lo que las corrientes en las líneas serán:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{1N}}{\bar{Z}_1} = \frac{220 e^{j270^\circ}}{22 e^{j10^\circ}} = 10 e^{j270^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{2N}}{\bar{Z}_2} = \frac{220 e^{j30^\circ}}{22 e^{-j40^\circ}} = 10 e^{j70^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{3N}}{\bar{Z}_3} = \frac{220 e^{j150^\circ}}{11 e^{j60^\circ}} = 20 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

y la corriente en el neutro:

$$\bar{I}_N = -(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3) = -[(0 - j10) + (3,42 + j9,4) + (0 + j20)]$$

$$\bar{I}_N = -(3,42 + j19,4) = 19,7 e^{j80^\circ} \text{ A} = 19,7 e^{-j100^\circ} \text{ A}$$

Nótese que las corrientes de línea son de distinta amplitud, no guardan el desfase relativo de 120° y circula corriente por el conductor neutro.

Ejemplo 2:

Para el circuito y datos indicados en la Fig. 17.13, siendo la excitación de secuencia directa 1 - 2 - 3 se desea calcular las corrientes de fase y de línea.

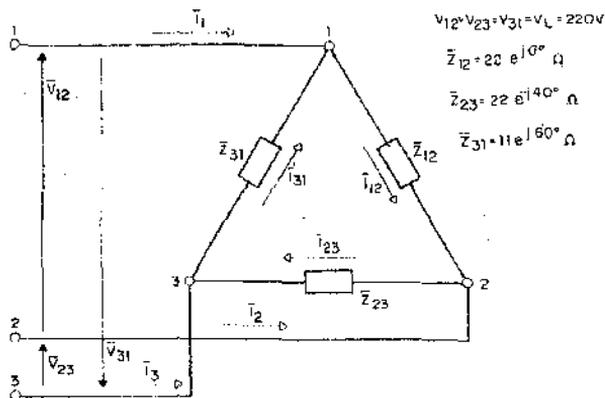


Fig. 17.13

Solución:

De acuerdo a lo explicado en el párrafo 17.3.4 resulta:

$$\bar{V}_{12} = 220 e^{j120^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{23} = 220 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{31} = 220 e^{j240^\circ} \text{ V}$$

por lo tanto, las corrientes en las fases de la carga resultan:

$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{Z_{12}} = \frac{220 e^{j120^\circ}}{22 e^{j0^\circ}} = 10 e^{j120^\circ} \text{ A} = (-5 + j8,66) \text{ A}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{Z_{23}} = \frac{220 e^{j0^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{j40^\circ} \text{ A} = (7,66 + j6,42) \text{ A}$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{Z_{31}} = \frac{220 e^{j240^\circ}}{11 e^{j60^\circ}} = 20 e^{j180^\circ} \text{ A} = (-20 + j0) \text{ A}$$

y las corrientes en las líneas son:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} = (-5 + j8,66) - (-20) = (15 + j8,66) \text{ A} = 17,32 e^{j30^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} = (-20) - (7,66 + j6,42) - (-5 + j8,66) =$$

$$= (12,66 - j2,24) \text{ A} = 12,86 e^{-j10^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} = (-20) - (7,66 + j6,42) = (-27,66 - j6,42) \text{ A} =$$

$$= 28,39 e^{j139^\circ} \text{ A}$$

Se observa que tanto las corrientes de fase como de línea no poseen para cada grupo la misma amplitud ni defasaje relativo de 120° .

Es oportuno insistir sobre las condiciones en que se basa este primer caso de regímenes desequilibrados: la *carga es estática* y *los generadores ideales*, es decir que no se tienen en cuenta las caídas de tensión en los mismos. Dentro de estas restricciones se verá un último ejemplo, el cual será previamente analizado antes de efectuar su resolución. En el ejemplo N° 1 se observa que a pesar de ser desbalanceada la carga, al ser el sistema de tensiones aplicado perfecto, el valor eficaz de la tensión de cada una de las impedancias de carga será constante e igual, al valor de la tensión de fase.

Pero ¿qué sucede si a esa carga desbalanceada se le suprime el conductor neutro?, como se muestra en la Fig. 17.14. Es evidente que las tensiones por fase difieren entre sí, y en el punto común de esas tres impedancias de carga no se encontrará el potencial del neutro N , sino a otro potencial que se designará con N' .

Recuérdese que en el caso de sistemas equilibrados, ver Fig. 17.9, el punto neutro N correspondía al centro de gravedad del triángulo de las tensiones de línea.

En el caso de la Fig. 17.14 las tensiones por fase son distintas entre sí, y en general pueden dar lugar a un diagrama fasorial como el ilustrado en la Fig. 17.15, para secuencia inversa 3-2-1, donde se ubica arbitrariamente N' , y el punto que corresponde al centro de gravedad del triángulo de las tensiones de línea N . Puede observarse el desplazamiento del punto neutro; y la tensión $\bar{V}_{N'N}$ recibe generalmente el nombre de *tensión de desplazamiento del neutro*. Si bien el problema presentado se resuelve fácilmente mediante los métodos conocidos, las tensiones por fase y las corrientes de línea podrán obtenerse más rápidamente encontrándose una expresión para la tensión de desplazamiento $\bar{V}_{N'N}$ que no dependa de las tensiones de fase referidas al punto N' sino al N .

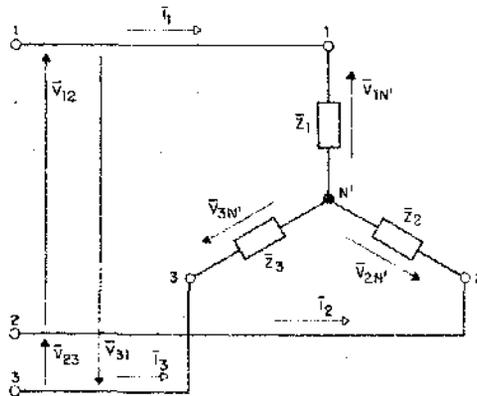


Fig. 17.14

Con ese objeto, se plantea la 1ª Regla de Kirchhoff al nodo N' de la Fig. 17.14 resultando:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (17.17)$$

pueden expresarse dichas corrientes de línea en función de las tensiones en las cargas y sus correspondientes admitancias, teniendo en cuenta que:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} ; \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} ; \quad \bar{Y}_3 = \frac{1}{\bar{Z}_3}$$

En virtud de lo antedicho la Ec. (17.17) puede escribirse:

$$\bar{V}_{1N'} \cdot \bar{Y}_1 + \bar{V}_{2N'} \cdot \bar{Y}_2 + \bar{V}_{3N'} \cdot \bar{Y}_3 = 0 \quad (17.18)$$

pero de la Fig. 17.15 se desprende que:

$$\bar{V}_{1N'} = \bar{V}_{1N} + \bar{V}_{NN'} \quad (17.19)$$

$$\bar{V}_{2N'} = \bar{V}_{2N} + \bar{V}_{NN'} \quad (17.20)$$

$$\bar{V}_{3N'} = \bar{V}_{3N} + \bar{V}_{NN'} \quad (17.21)$$

reemplazando las Ecs. (17.19), (17.20) y (17.21) en la Ec. (17.18) es:

$$(\bar{V}_{1N} + \bar{V}_{NN'}) \bar{Y}_1 + (\bar{V}_{2N} + \bar{V}_{NN'}) \bar{Y}_2 + (\bar{V}_{3N} + \bar{V}_{NN'}) \bar{Y}_3 = 0$$

$$\therefore \bar{V}_{1N} \bar{Y}_1 + \bar{V}_{2N} \bar{Y}_2 + \bar{V}_{3N} \bar{Y}_3 = - \bar{V}_{NN'} (\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) \quad (17.22)$$

teniendo en cuenta que $\bar{V}_{NN'} = -\bar{V}_{N'N}$ la Ec. (17.22) se puede expresar también como:

$$\bar{V}_{NN'} = \frac{\bar{V}_{1N} \bar{Y}_1 + \bar{V}_{2N} \bar{Y}_2 + \bar{V}_{3N} \bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3} \quad (17.23)$$

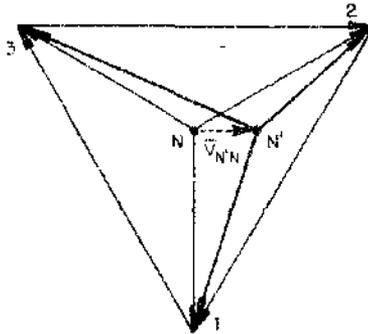


Fig. 17.15

En la Ec. (17.23), las tensiones \bar{V}_{1N} ; \bar{V}_{2N} y \bar{V}_{3N} se determinan en general, para la secuencia dada, mediante el procedimiento descrito en la Fig. 17.9. Una vez calculada la tensión $\bar{V}_{NN'}$ se podrán calcular las tensiones reales en la carga mediante la aplicación de las Ecs. (17.19), (17.20) y (17.21). En el conocimiento de estas últimas, por aplicación de la Ley de Ohm pueden encontrarse los valores de las corrientes en las líneas como se detalla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3:

Para el circuito y datos indicados en la Fig. 17.16, siendo la excitación de secuencia inversa 3-2-1 se desea calcular las tensiones en la carga, la corriente en las líneas y construir el diagrama fasorial.

Solución:

De acuerdo a lo explicado en el párrafo 17.3.4, resulta:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1N} &= 220 e^{j270^\circ} & \text{V} \\ \bar{V}_{2N} &= 220 e^{j30^\circ} & \text{V} \\ \bar{V}_{3N} &= 220 e^{j150^\circ} & \text{V} \end{aligned}$$

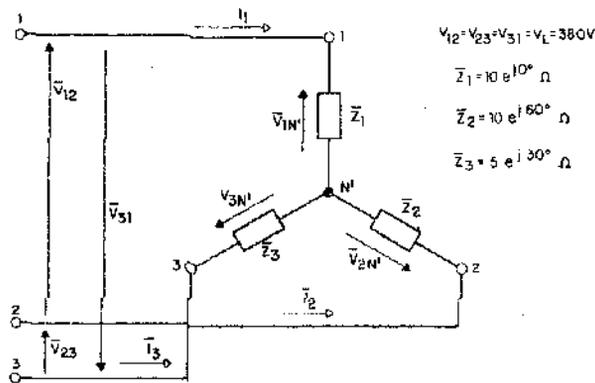


Fig. 17.16

además, las admitancias de carga serán:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{10 e^{j0^\circ}} = 0,1 e^{j0^\circ} \Omega = 0,1 \Omega$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{10 e^{j60^\circ}} = 0,1 e^{-j60^\circ} \Omega = (0,05 - j0,086) \Omega$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{5 e^{j30^\circ}} = 0,2 e^{-j30^\circ} = (0,17 - j0,1) \Omega$$

Previo al cálculo de $V_{N'N}$ dado por la Ec. (17.23) se realizarán cálculos parciales:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 &= 0,1 + (0,05 - j0,086) + (0,17 - j0,1) = \\ &= (0,32 - j0,186) \Omega \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = 0,37 e^{-j30^\circ} \Omega$$

por otra parte:

$$\bar{V}_{1N} \bar{Y}_1 = 220 e^{j270^\circ} 0,1 e^{j0^\circ} = 22 e^{j270^\circ} \text{ A} = -j 22 \text{ A}$$

$$\bar{V}_{2N} \bar{Y}_2 = 220 e^{j30^\circ} 0,1 e^{-j60^\circ} = 22 e^{-j30^\circ} \text{ A} = (19 - j11) \text{ A}$$

$$\bar{V}_{3N} \bar{Y}_3 = 220 e^{j150^\circ} 0,2 e^{-j30^\circ} = 44 e^{j120^\circ} \text{ A} = (-22 + j38) \text{ A}$$

en consecuencia:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{1N} \bar{Y}_1 + \bar{V}_{2N} \bar{Y}_2 + \bar{V}_{3N} \bar{Y}_3 &= -j22 + (19 - j11) + (-22 + j38) = \\ &= (-3 + j5) \text{ A} = 5,83 e^{j121^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

Con los valores hallados puede aplicarse la Ec. (17.23) resultando:

$$\bar{V}_{NN'} = \frac{5,83 e^{j121^\circ}}{0,37 e^{-j30^\circ}} = 15,75 e^{j151^\circ} \text{ V}$$

Pueden ahora calcularse las tensiones por fase en la carga:

$$\bar{V}_{1N'} = \bar{V}_{1N} + \bar{V}_{NN'} = 220 e^{j270^\circ} - 15,75 e^{j151^\circ}$$

$$\bar{V}_{2N'} = \bar{V}_{2N} + \bar{V}_{NN'} = 220 e^{j30^\circ} - 15,75 e^{j151^\circ}$$

$$\bar{V}_{3N'} = \bar{V}_{3N} + \bar{V}_{NN'} = 220 e^{j150^\circ} - 15,75 e^{j151^\circ}$$

operando:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{1N'} &= -j220 - (-13,77 + j7,63) = (13,77 - j227,63) \text{ V} = \\ &= 228 e^{-j86,53^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{2N'} &= (190,52 + j110) - (-13,77 + j7,63) = (204,29 + j102,37) \text{ V} = \\ &= 228,5 e^{j26,61^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{3N'} &= (-190,52 + j110) - (-13,77 + j7,63) = (-176,75 + j102,37) = \\ &= 204,25 e^{j150^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

y las corrientes de línea:

$$\bar{I}_1 = \bar{V}_{1N'} \bar{Y}_1 = 228 e^{-j86,53^\circ} 0,1 e^{j0^\circ} = 22,8 e^{-j86,53^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{V}_{2N'} \bar{Y}_2 = 228,5 e^{j26,61^\circ} 0,1 e^{-j60^\circ} = 22,85 e^{-j37,39^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{V}_{3N'} \bar{Y}_3 = 204,25 e^{j150^\circ} 0,2 e^{-j30^\circ} = 40,85 e^{j120^\circ} \text{ A}$$

En la Fig. 17.17 se muestra el diagrama fasorial de tensiones de línea y de fase. A efectos ilustrativos se agrega el punto neutro N , con el objeto de poner en evidencia la tensión de desplazamiento del neutro.

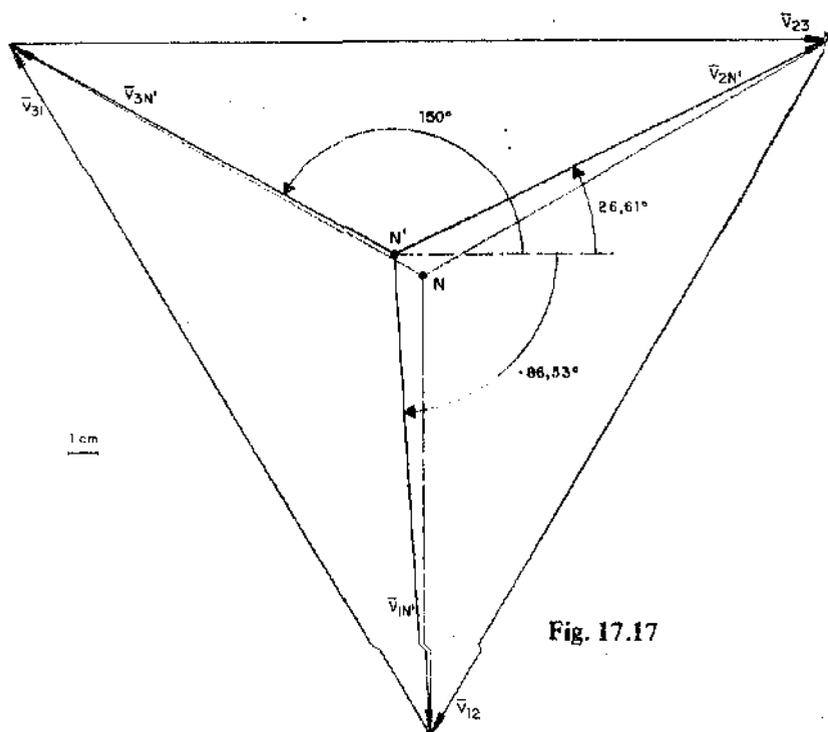


Fig. 17.17

Finalmente, es interesante destacar que existe otro caso, que sólo se mencionará pero no se analizará, que es el siguiente. Cuando las tensiones aplicadas a una carga dinámica por ejemplo un motor trifásico, son desbalanceadas, las corrientes no podrán determinarse en base a un equivalente de carga constituido por tres impedancias iguales conectadas en triángulo o en estrella.

Además, si se tienen en cuenta las caídas de tensión en el generador, ellas no podrán calcularse como tensiones sobre tres impedancias iguales. Se observa que este nuevo caso presentado es general; tensiones desequilibradas y cargas desbalanceadas. La forma de resolución específica empleada para el cálculo de los regímenes desequilibrados como los mencionados se denomina *método de las componentes simétricas*. Naturalmente que se aplican también los métodos del capítulo 13. Este método se basa en el hecho de que un sistema de n fasores cualquiera, puede hacerse equivalente al resultado de la

superposición de n sistemas simétricos de n fasores. En otras palabras, el sistema desequilibrado, es reemplazado para los cálculos por n sistemas simétricos.

En el caso de los sistemas trifásicos, los tres conjuntos de componentes simétricas reciben el nombre de componente directa o de fase positiva; componente inversa o de fase negativa y componente homopolar o de fase nula. Los dos primeros sistemas perfectos y el último simétrico en amplitud.

Una de las aplicaciones fundamentales del método de las componentes simétricas, es la referida al análisis de las averías que se producen en las líneas de transmisión de energía, donde se desean determinar las tensiones y corrientes en la zona defectuosa, y especialmente las corrientes de cortocircuito. Es interesante destacar también, que de este método se desprende también la forma de calcular las potencias en los sistemas desequilibrados, que difiere de la empleada para los sistemas perfectos, ya que resulta no nulo el término pulsatorio de la potencia instantánea.

La experiencia en la aplicación de este método indica que es adecuado para la solución de problemas complejos, pero no así para los sistemas sencillos, pues complica su solución en comparación con la brindada por los métodos clásicos empleados hasta el presente. Su estudio resulta imprescindible para quienes deben analizar la producción y distribución de energía en sistemas industriales de potencia, tema éste que excede el objeto del presente libro.

17.6 Problemas resueltos

17.6.1) Sea una línea de cuatro conductores con un sistema perfecto de 380 V de tensión entre líneas con secuencia inversa 3 - 2 - 1, y que alimenta a una carga balanceada conectada en estrella, en la cual cada una de sus impedancias vale $Z = 22 e^{j40^\circ} \Omega$. Se desea:

- Dibujar el circuito de carga, indicando las corrientes y tensiones, y para estas últimas adoptar la referencia correspondiente.
- Calcular las corrientes en las líneas y la potencia total disipada de la carga.
- Construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

Solución:

- En la Fig. 17.18 se dibuja el circuito pedido. Teniendo en cuenta lo explicado en el párrafo 17.3.4 respecto de la Fig. 17.9.b) pueden determinarse las tensiones por fase. Dado que $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} \cong 220 \text{ V}$

resulta:

$$\bar{V}_{1N} = 220 e^{j270^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{2N} = 220 e^{j30^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{3N} = 220 e^{j150^\circ} \text{ V}$$

b) Las corrientes de las líneas resultan:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{1N}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j270^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{j230^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{2N}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j30^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{-j10^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{3N}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j150^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{j110^\circ} \text{ A}$$

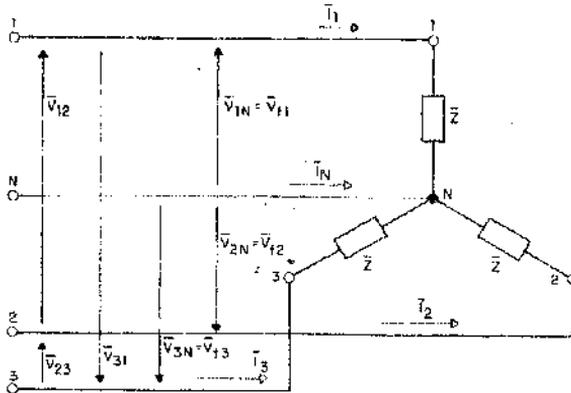


Fig. 17.18

Adviértase la esperada igualdad en el módulo de las corrientes y el desfase relativo entre los mismos de 120° .

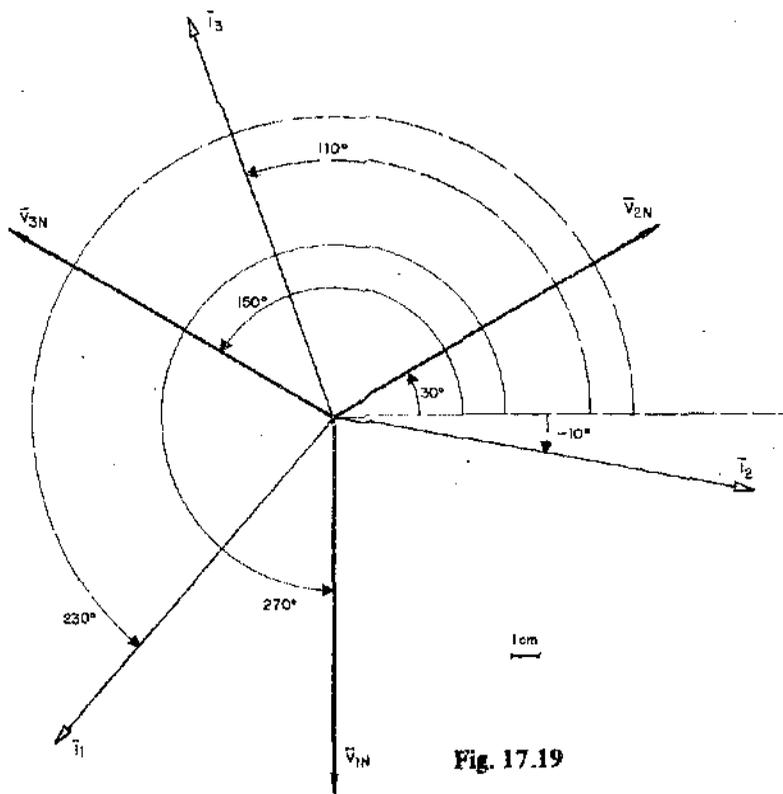
Naturalmente, se verifica que es nula la corriente en el conductor neutro, puesto que:

$$\bar{I}_N = -(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3) = -(10 e^{j230^\circ} + 10 e^{-j10^\circ} + 10 e^{j110^\circ}) = 0$$

La potencia total disipada en la carga es, según la Ec. (17.10):

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi_f = \sqrt{3} 380 10 \cos 40^\circ = 5042 \text{ W}$$

c) El diagrama fasorial se ilustra en la Fig. 17.19.



17.6.2) Sea una línea de tres conductores, con un sistema perfecto de 220 V, de tensión entre líneas, con secuencia directa 1-2-3, y que alimenta a una carga balanceada conectada en triángulo, en la cual cada una de sus impedancias vale $\bar{Z} = 22 e^{j40^\circ} \Omega$. Se desea:

- Dibujar el circuito de carga, indicando las corrientes y tensiones, y para estas últimas adoptar la referencia correspondiente.
- Calcular las corrientes de fase y de línea.

c) Construir el diagrama fasorial de tensiones y corrientes.

Solución:

a) En la Fig. 17.20 se dibuja el circuito pedido. Teniendo en cuenta el análisis efectuado en el párrafo 17.3.4, respecto de la Fig. 17.9.a) se desprende que:

$$\bar{V}_{12} = 220 e^{j120^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{23} = 220 e^{j0^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{31} = 220 e^{j240^\circ} \quad \text{V}$$

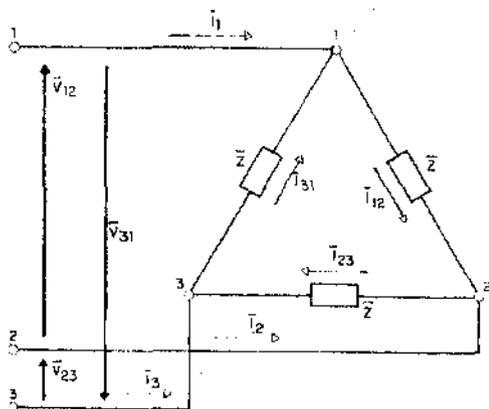


Fig. 17.20

b) Las corrientes de las fases de carga resultan:

$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j120^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{j80^\circ} \text{ A} = (1,73 + j9,84) \text{ A}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j0^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{-j40^\circ} \text{ A} = (7,66 - j6,42) \text{ A}$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{\bar{Z}} = \frac{220 e^{j240^\circ}}{22 e^{j40^\circ}} = 10 e^{j200^\circ} \text{ A} = (-9,39 - j3,42) \text{ A}$$

Por aplicación de la 1ª. Regla de Kirchoff a cada una de las uniones del triángulo de carga resulta:

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} = (1,73 + j9,84) - (-9,39 - j3,42) = (11,2 + j13,26) \text{ A} \equiv \\ &= 17,3 e^{j50^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_2 &= \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12} = (7,66 - j6,42) - (1,73 + j9,84) = (5,93 - j16,26) \text{ A} = \\ &= 17,3 e^{-j70^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_3 &= \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} = (-9,39 - j3,42) - (7,66 - j6,42) = (-17,05 + j3) \text{ A} = \\ &= 17,3 e^{-j190^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

Obsérvese que se mantienen los desfases de 120° y que las corrientes de línea resultan con un módulo $\sqrt{3}$ veces mayor que las de fase.

c) El diagrama fasorial se ilustra en la Fig. 17.21.

17.6.3) Determinar las corrientes de fase y de línea para el problema 17.5.2 por el método del circuito equivalente monofásico.

Solución:

De acuerdo al análisis efectuado en el párrafo 17.3.4, resulta:

$$\bar{Z}_\lambda = \frac{\bar{Z} \Delta}{3} = \frac{22 e^{j40^\circ}}{3} = 7,33 e^{j40^\circ} \Omega$$

$$y \quad \bar{V}_f = \bar{V}_{LN} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} e^{j0} = \frac{220}{\sqrt{3}} e^{j0} = 127 e^{j0} \text{ V}$$

El equivalente monofásico se ilustra en la Fig. 17.22. La corriente de línea en dicho equivalente, resulta:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_f}{\bar{Z}_\lambda} = \frac{127 e^{j0}}{7,33 e^{j40^\circ}} = 17,33 e^{-j40^\circ} \text{ A}$$

puesto que la corriente en la línea I_L atrasa respecto de \bar{V}_{LN} en 40° , las corrientes \bar{I}_1 , \bar{I}_2 e \bar{I}_3 atrasarán igual ángulo respecto de sus tensiones asocia-

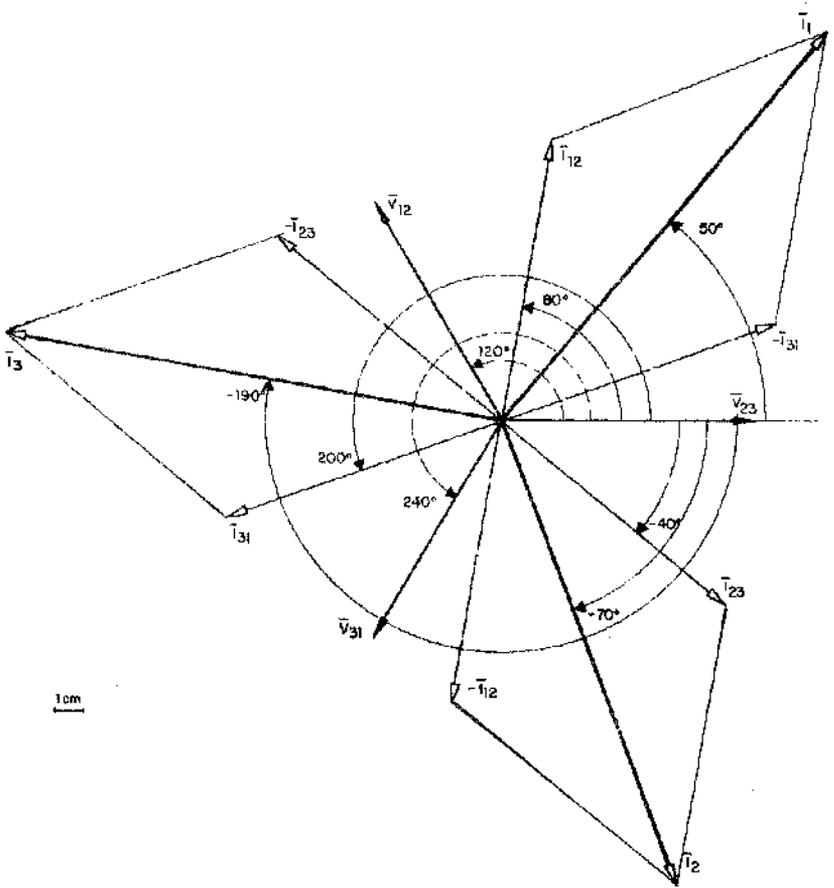


Fig. 17.21

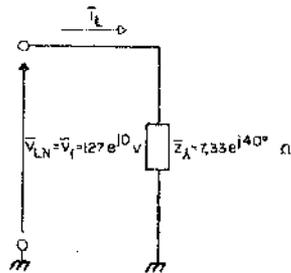


Fig. 17.22

das \bar{V}_{1N} , \bar{V}_{2N} y \bar{V}_{3N} respectivamente. Empleando los conceptos asociados a la Fig. 17.9.a) resulta para dichos términos:

$$\bar{V}_{1N} = 127 e^{j90^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{2N} = 127 e^{j330^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{3N} = 127 e^{j210^\circ} \quad \text{V}$$

en consecuencia las corrientes de línea resultaN;

$$\bar{I}_1 = I_L e^{j(\theta_{V_{1N}} + \theta_{I_L})}$$

$$\bar{I}_2 = I_L e^{j(\theta_{V_{2N}} + \theta_{I_L})}$$

$$\bar{I}_3 = I_L e^{j(\theta_{V_{3N}} + \theta_{I_L})}$$

por lo cual:

$$\bar{I}_1 = 17,33 e^{j(90^\circ - 40^\circ)} = 17,33 e^{j50^\circ} \quad \text{A}$$

$$\bar{I}_2 = 17,33 e^{j(330^\circ - 40^\circ)} = 17,33 e^{j290^\circ} \quad \text{A} = 17,33 e^{-j70^\circ} \quad \text{A}$$

$$\bar{I}_3 = 17,33 e^{j(210^\circ - 40^\circ)} = 17,33 e^{j170^\circ} \quad \text{A} = 17,33 e^{-j190^\circ} \quad \text{A}$$

Por otra parte, para el módulo de las corrientes de fase en la carga original se cumple:

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{17,33}{\sqrt{3}} = 10 \quad \text{A}$$

a su vez para la secuencia dada es:

$$\bar{V}_{12} = 220 e^{j120^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{23} = 220 e^{j0^\circ} \quad \text{V}$$

$$\bar{V}_{31} = 220 e^{j240^\circ} \quad \text{V}$$

por lo cual:

$$\bar{I}_{12} = I_f e^{j(\theta_{V_{12}} + \theta_{I_L})}$$

$$\bar{I}_{23} = I_f e^{j(\theta_{V_{23}} + \theta_{I_L})}$$

$$\bar{I}_{31} = I_f e^{j(\theta_{V_{31}} + \theta_{I_L})}$$

resultando:

$$\bar{I}_{12} = 10 e^{j(120^\circ - 40^\circ)} = 10 e^{j80^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{23} = 10 e^{j(0^\circ - 40^\circ)} = 10 e^{-j40^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{31} = 10 e^{j(240^\circ - 40^\circ)} = 10 e^{j200^\circ} \text{ A}$$

Los resultados coinciden con los del problema anterior.

17.7 Problemas propuestos

17.7.1) Sea una línea de cuatro conductores con un sistema perfecto de 440 V de tensión entre líneas, con secuencia directa 1-2-3, y que alimenta a una carga balanceada conectada en estrella, en la cual cada una de sus impedancias vale $\bar{Z} = 25,4 e^{-j30^\circ} \Omega$. Se desea:

- Dibujar el circuito de carga, indicando las corrientes y tensiones, y para estas últimas adoptar la referencia correspondiente.
- Calcular las corrientes en las líneas y las potencias aparente, activa y reactiva totales.

Respuestas

- a) El circuito es el mostrado en la Fig. 17.18. Las tensiones de fase resultan:

$$\bar{V}_{1N} = 254 e^{j90^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{2N} = 254 e^{j330^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{3N} = 254 e^{j210^\circ} \text{ V}$$

- b) $\bar{I}_1 = 10 e^{j120^\circ} \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 10 e^{j360^\circ} \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 10 e^{j240^\circ} \text{ A}$

$$\bar{P}_s = 7621 e^{-j30^\circ} \text{ VA}$$

$$P = 6599 \text{ W}$$

$$P_q = -3810 \text{ VAR}$$

17.7.2) Sea una línea de tres conductores con un sistema perfecto de 380 V de tensión entre líneas con secuencia inversa 3-2-1, que alimenta a una carga balanceada conectada en triángulo, de la cual cada una de sus impedancias vale $\bar{Z} = 38 e^{j60^\circ} \Omega$. Se desea:

- Dibujar el circuito de carga, indicando las corrientes y tensiones, y para estas últimas adoptar la referencia correspondiente.
- Calcular las corrientes de fase y de línea.

Respuestas

- a) En el circuito mostrado en la Fig. 17.20, las tensiones de línea resultan:

$$\bar{V}_{12} = 380 e^{j240^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{23} = 380 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{31} = 380 e^{j120^\circ} \text{ V}$$

- b)
- $$\bar{I}_{12} = 10 e^{j180^\circ} = -10 \text{ A}$$
- $$\bar{I}_{23} = 10 e^{-j60^\circ} = (5 - j8,66) \text{ A}$$
- $$\bar{I}_{31} = 10 e^{j60^\circ} = (5 + j8,66) \text{ A}$$
- $$\bar{I}_1 = (-15 - j8,66) = 17,32 e^{j210^\circ} \text{ A}$$
- $$\bar{I}_2 = (15 - j8,66) = 17,32 e^{-j30^\circ} \text{ A}$$
- $$\bar{I}_3 = (0 + j17,32) = 17,32 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

NOTA: Adviértase que los problemas 17.6.1 y 17.6.2 son similares a los 17.5.1 y 17.5.2. Existen algunos cambios de valores, y se modificaron las secuencias. Para ambos grupos se emplearon, según correspondía, los circuitos de las Figs. 17.18 y 17.20, pues estos no se alteran con el cambio de secuencia; lo que sí se modifica es el diagrama fasorial.

17.7.3) Para el circuito y datos indicados en la Fig. 17.23 se desea:

- Dibujar el circuito equivalente monofásico.
- Calcular el módulo de la corriente en las líneas y las potencias totales aparente, activa y reactiva.

Respuestas

a) Se muestra en la Fig. 17.24

b) $I_L = 17,90 \text{ A}$

$$\bar{P}_s = 6820,8 e^{-j45^\circ} \text{ VA}$$

$$P = 4823 \text{ W}$$

$$P_q = -4823 \text{ VAR}$$

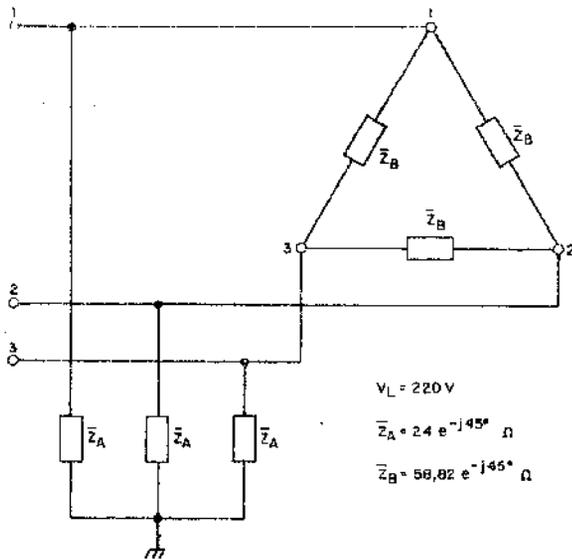


Fig. 17.23

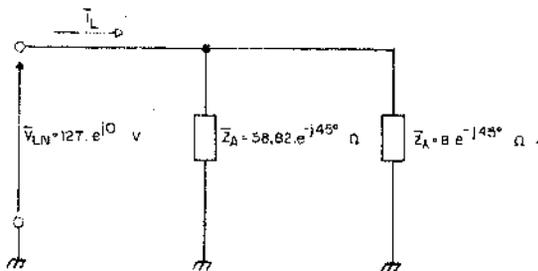


Fig. 17.24

Bibliografía

I) MATEMATICA

- Rey Pastor, J.; Pi Calleja, P.; Trejo, C.A. -- **Análisis Matemático** -- Volúmenes I, 1952; II, 1957 -- III 1959; Kapelus, Buenos Aires.
- Sokolnikoff, I.S.; Sokolnikoff, E.S. -- **Matemática Superior para Ingenieros y Físicos.** -- Librería y Editorial Nigar S.R.L., Buenos Aires 1956.
- Kaplan, W. -- **Cálculo Avanzado** -- Cecsca, México 1964.
- Pipes, L.A. -- **Applied Mathematics for Engineers and Physicists** -- Mc Graw-Hill Book Co., New York 1958.
- Moretti, G. -- **Métodos Matemáticos de la Física, Tomo I** -- Imprenta y Casa Editora Coni, Buenos Aires 1959.
- Sadosky, M. -- **Cálculo Numérico y Gráfico** -- Ediciones Librería del Colegio -- Buenos Aires 1952.
- Lewis, W.E.; Price, D.G. -- **The Application of Matrix Theory to Electrical Engineering.** -- Chapman and Hall Ltd. -- London 1965.
- Kurosch, A.G. -- **Curso de Algebra Superior** -- Editorial Mir -- Moscú 1975.
- Phillips, H.B. -- **Ecuaciones Diferenciales** -- Uteha -- México 1945.
- Hartman, P. -- **Ordinary Differential Equations** -- John Wiley and Sons -- New York 1964.
- Phillips, E.G. -- **Funciones de una Variable Compleja y sus Aplicaciones** -- Editorial Dossat S.A. -- Madrid 1958.
- Churchill, R.V. -- **Introduction to Complex Variables and Applications** -- Mc Graw-Hill Book Co. -- New York 1948.
- Le Page, W.R. -- **Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers** -- Mc Graw-Hill Book Co -- New York 1961.
- Churchill, R.V. -- **Operational Mathematics** -- Mc Graw-Hill Book Co. -- New York 1958.
- Spiegel, M.R. -- **Theory and Problems of Laplace Transforms** -- Mc Graw-Hill Book Co. -- New York 1965.
- Schwartz, L. -- **Theorie des Distributions, Tome I 1950, Tome II 1951** -- Hermann, París.
- Schwartz, L. -- **Theorie Elementaire des Distributions** - Les Cours de Sorbonne París 1955.
- Schwartz, L. -- **Convolution** - Les Cours de Sorbonne -- París 1955.
- Schwartz, L. -- **Series de Fourier** -- Les Cours de Sorbonne -- París 1955.
- Schwartz, L. -- **Transformations de Laplace** - Les Cours De Sorbonne -- París 1955.
- Sanford, R.S. -- **Physical Networks** Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- Balabanian, N. -- **Fundamentals of Circuit Theory** -- Allyn and Bacon, Inc. Boston 1961.
- Cassell, W.L. -- **Linear Electric Circuits.** -- John Wiley & Sons, Inc. New York 1964.
- Chan, Shu-Park -- **Introductory Topological Analysis of Electrical Networks** -- Holt, Rinehart & Winston, Inc. -- New York -- 1969.
- Truxal, D.F. (Jr.) -- **Electric Networks, Analysis and Synthesis** -- Mc Graw-Hill, Book Co. New York 1965.
- Asefline, J.A. -- **Transform Method in Linear System Analysis** -- Mc Graw-Hill Co. Inc. New York 1958.
- Cooper, G.R. & Mc Gillem, C.D. -- **Methods of Signal and System Analysis** -- Holt, Rinehart & Winston, New York 1965.
- Cheng, D.K. -- **Analysis of Linear Systems** -- Addison-Wesley Publishing Co. Inc. Reading Massachusetts 1959.

- Kim W.H. and Chien, R.T.W. - *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*, Columbia University Press, New York 1962.
- Desoer, C.A. and Kuh, E.S. - *Basic Circuit Theory*. Mc Graw-Hill Co. New York 1966.
- Cauer, W. - *Synthesis of Communications Networks* - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1958.
- Seshu, S. and Balabanian, N. - *Linear Network Analysis* - John Wiley Sons, New York 1959.
- Van Valkenburg. - *Introduction to Modern Network Synthesis* - John Wiley & Sons - New York 1960.
- Weinberg, L. - *Network Analysis and Synthesis* Valkenburg Mc Graw - Hill Book Co. New York 1962.
- Guillemin, E.A. - *Communication Networks* - Vol I 1931, Vol. II 1935 - John Wiley and Sons, New York.
- Guillemin, E.A. - *Theory of Linear Physical Systems* - John Wiley and Sons, New York 1963.
- Craft Electronic Staff - *Electronic Circuits and Tubes* - Mc Graw-Hill Book Co., Inc. New York 1947.
- Langford-Smith, F. - *Radiotron Designer's Handbook* - RCA 1953.
- Littauer, R. - *Pulse Electronics* - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1965.
- Millman, J. & Halkias C.C. - *Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems* - Mc Graw-Hill Book Co. New York 1972.
- Landee, R.W., Davis D.C. and Albrecht, A.P. - *Electronic Designer's Handbook* - Mc Graw-Hill Co., New York 1957.
- Tropper - *Théorie des Circuits Électriques* Dunod, París 1956.
- Gille, Decaulne Et Pelegrin - *Méthodes Modernes D'Études Des Systèmes Asservis* - Dunod París 1960.
- Basseras, G. - *Exercices & Problèmes de Radioélectricité al Usage del Ingenieur* - Eyrolles, París 1962.
- Le Corbeiller, P. *Analyse Matricielle des Reseaux Electriques* - Dunod - París 1954.

II) TEORIA DE CIRCUITOS Y SU APLICACION EN ELECTRONICA .

- Van Valkenburg, M.E. - *Análisis de Redes* - Limusa - México 1977.
- Balabanian, N.; Bickart, T.A.; Seshu, S. - *Teoría de Redes Eléctricas* - Reverte S.A. - Barcelona 1972.
- Lagasse, J. - *Estudio de los Circuitos Eléctricos*. Tomo I 1963, Tomo II 1964 - Paraninfo, Madrid.
- Skilling, H. H. - *Circuitos en Ingeniería Eléctrica*. - Ccesa, México 1959.
- Skilling, H. H. - *Redes Eléctricas* - Limusa, México 1977.
- Miembros del Personal de Massachusetts - Institute of Tecnology - *Circuitos Eléctricos* - Ccesa, México 1959.
- Guillemin E.A. - *Introducción a la Teoría de los circuitos* - Reverté S.A. - Barcelona 1959.
- Brenner, E. y Javid, M. - *Análisis de Circuitos Eléctricos* - Mc Graw-Hill Book Company, Inc. - Ediciones Del Castillo S.A. - New York - Madrid 1966.
- Tuttle, D.F. (Jr.) - *Redes Eléctricas* - Editorial Dossat S.A. - Madrid 1964.
- Masson, S.J. y Zimmermann H.J. - *Circuitos Señales y Sistemas Electrónicos* - Ccesa, México 1962.
- Kaufmann, A., Grabowsky, B. y Thouzery, J. - *Análisis de las Redes Eléctricas* - Paraninfo, Madrid 1967.
- Zeveke, G.V. - Ionkin, P.A. - *Principios de Electrotécnia* - Tomo I 1958 Cartago - Buenos Aires.
- Netushil, A.V. - Strajov, S.V. - *Principios de Electrotécnia* - Tomo II 1959 - Cartago, Buenos Aires.

- Everitt, W.L. - Anner, G.E. - **Ingeniería de Comunicaciones** - Arbó, Buenos Aires 1961.
- Kuo, B.C. - **Sistemas Automáticos de Control** - Ceca - Barcelona 1970.
- Schwartz, M. - **Transmisión de la Información, Modulación y Ruido**. 2º Edición - H.A.S.A. Buenos Aires 1973.
- Gray, T.S. - **Electrónica Aplicada** - Reverte, Barcelona 1955.
- Terman F.E. - **Ingeniería Electrónica y de Radio** - Arbó 1952.
- Di Marco, A. - **Electrónica**, El Ateneo, Buenos Aires 1962.
- Angelo, E.J. (Jr.) - **Circuitos Electrónicos** - Mc Graw-Hill Book Inc. - Ediciones Del Castillo S.A. - New York - Madrid 1966.
- Alley, Ch. L. y Atwood, K.W. - **Ingeniería Electrónica**. - Limusa-Wiley S.A. - México 1968.
- Gray P.E. - Searle, C.L. - **Principios de Electrónica** - Reverté, Barcelona 1973.
- Schilling, D.L., Belove, C. - **Circuitos Electrónicos, Discretos e Integrados**.
- Kuo, F.F. - **Network Analysis and Synthesis** - John Wiley and Sons, Inc. - New York 1962.
- Josephs, H.J. - **Heaviside's Electric Circuit Theory** - Methuen and Co. Ltd. - London 1946.
- Angelo, E.J. (Jr.) - Papoulis, S.A. - **Pole-zero Patterns** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1964.
- Ryder, J.D. - **Introduction to Circuit Analysis** - Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.N. 1973.
- Cohen A.R. - **Linear Circuits and Systems - Part I** 1965, Regents Publishing Co. Inc. New York 1965.
- Edminister J.A. - **Electric Circuits** - Schaum Publishing Col New York 1965.
- Reza. F.M. and Seely, S. - **Modern Network Analysis** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1959.
- Lenage W.R. and Seely S. - **General Network Analysis** - Mc Graw-Hill Book Co. - New York 1952.
- Bode, H.W. - **Network Analysis and Feedback Amplifier Design** - Van Nostrand Book Co. Princeton, N.J. 1945.

Este libro se terminó de imprimir en los talleres de Nueva Librería S.R.L., Balcarce 873 (1064) Buenos Aires, Argentina, Tel.: 362-9266, en el mes de julio de 1993.

LOS AUTORES:

CARLOS MARCO

Ingeniero en Electrónica

Profesor adjunto interino de "Teoría de los Circuitos I" en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional

Inició su actividad docente en el año 1962, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica en 1969, en la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional.

A partir de 1970 comienza su actividad docente Universitaria como ayudante de trabajos prácticos en las cátedras de Electrónica General y Electrónica aplicada (Ingeniería Eléctrica) dependientes del Departamento de Electrónica de la F.R.B.A. — U.T.N.

En 1971 Ayudante de Trabajos Prácticos en las Cátedras de "Teoría de los Circuitos I"; en 1972 Jefe de Trabajos Prácticos a cargo del dictado de dicha materia; siendo designado Profesor Adjunto Interino a partir de 1973.

Ha publicado diversas guías de trabajos prácticos, participado en Comités de Ingeniería y Seminarios de perfeccionamiento docente.

Es jefe del Departamento de Electrónica de la Escuela Técnica O.R.T. de Buenos Aires.

Los datos curriculares del Ing. Carlos Marco se reproducen en la solapa de la contratapa.

