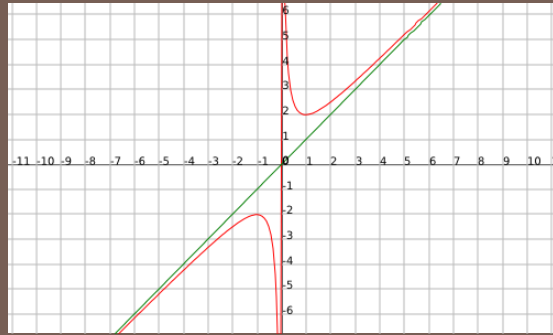




TEMA 7: LÍMITS DE FUNCIONS I CONTINUÏTAT

7.7 Branques infinites. Asímtotes

- Hem vist moltes gràfiques en les hi ha trams de corba que s'allunyen indefinidament (**branques infinites**).
- Quan aquestes branques infinites s'aproximen a una recta s'anomenen **asímtotes**.
- Hi ha de tres tipus:
 - ▣ Verticals
 - ▣ Horitzontals
 - ▣ Obliqües

Asímtotes verticals

- Hi ha una asímtota vertical (AV) $x = a$ quan:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

(o qualsevol dels límits laterals a^+ o a^-)

- En les funcions racionals trobarem A.V. en valors de x que són arrels del denominador i no del numerador.
- Si fem el límit en aquest punt apareix la indeterminació $k/0$ i caldrà fer límits laterals.

Exercici 15, pàg. 141, apartat a

- Troba les asímtotes verticals i situa'n la corba respecte a aquestes:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} \quad D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

Estudi $x = 0$

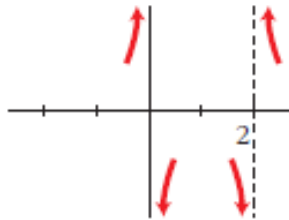
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x} = \frac{2}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{array} \right.$$

Hi ha una A.V. ($x=0$)

□ *Estudi en $x = 2$*

$$\square \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = \frac{6}{0} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Hi ha una AV ($x=2$)



Asíntotas horitzontals

□ Són branques infinites que apareixen quan $x \rightarrow \pm\infty$

□ Hi ha una asímptota horitzontal (AH) $y = a$ quan:

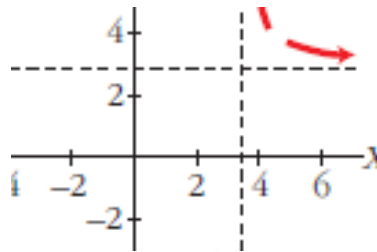
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad (\text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a)$$

□ Hi ha A.H en les funcions racionals $P(x)/Q(x)$ en les que els graus de $P(x)$ i $Q(x)$ són iguals o el grau de $P(x)$ és menor que el de $Q(x)$

- Estudia si hi ha asímptotes horitzontals en les següents funcions i situa la corba respecte a aquestes:

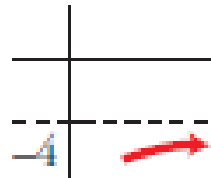
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-2}{2x-7} = \frac{5}{2}$ A.H. $y = 5/2$

x	100
y (asímtota)	$5/2 = 2,5$
f(x) (corba)	$498/193 = 2,58$



□ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ A.H. $y = -4$

x	100
y (asímtota)	-4
f(x) (corba)	$-119999/30000 = -3,999..$



Asíntotes obliques

- Una asíntota obliqua és una recta del tipus $y=mx+n$, a la qual s'aproxima la funció quan x tendeix a $+\infty$ o a $-\infty$.
- Totes les funcions racionals el grau del numerador de les quals supera en una unitat el grau del denominador tenen una asíntota obliqua.
- Si en una funció hi ha una asíntota obliqua mai hi haurà una asíntota horitzontal, aquestes son incompatibles.

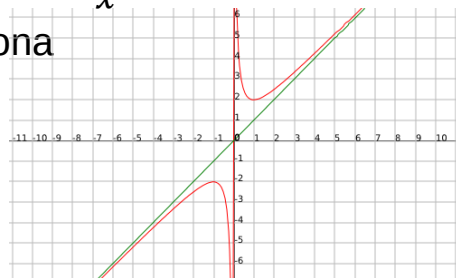
□ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$

Però en aquest cas si fem la divisió indicada s'obté:

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

El quocient ens proporciona l'equació de l'asíntota:

$$y = x$$



$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x+1} = +\infty$$

Però en aquest cas si fem la divisió indicada

s'obté:
$$\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$$

El quocient ens proporciona

l'equació de l'asímtota:

$$y = 3x - 3$$

