

UNITAT 8: LÍMITS

8.1. Concepte de límit

Anomenem **límit** al nombre al que tendeix una successió o sèrie de nombres. Escriurem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

i llegirem "el límit de la successió a_n quan n tendeix a infinit és L ".

E1

a) $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow$

n	1	2	...	10	...	1000	...	∞
a_n	1	0,5		0,1		0,001		0

En aquesta successió veiem que a mesura que el valor de n és més gran, el valor de a_n és més petit; s'apropa a 0. Escriurem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

n	1	2	...	10	...	1000	...	∞
a_n	1	1,3		1,8		1,99		2

$\rightarrow$

En aquesta successió veiem que a mesura que el valor de n és més gran, el valor de a_n es va apropant a un nombre concret, 2. Escriurem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \frac{2 \cdot \infty}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty} = 2$$

c) $a_n = n^2 + 1 \rightarrow$

n	1	2	...	10	...	100	...	∞
a_n	2	5		101		10001		∞

En aquesta successió veiem que a mesura que el valor de n és més gran, el valor de a_n cada vegada és més i més gran. Escriurem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1 = \infty + 1 = \infty$$

8.2. Primera indeterminació: $\frac{\infty}{\infty}$

Quan al resoldre un límit surti la indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$, dividirem numerador i denominador per la potència de major exponent.

E2

Seguint l'exemple b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \frac{2 \cdot \infty}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

8.2.1. Si el grau del denominador és més gran que el del numerador

El resultat serà 0.

E3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^3 + 2n} = \frac{2 \cdot \infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^3}}{\frac{n^3 + 2n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

8.2.2. Si el grau del numerador és més gran que el del denominador

El resultat serà infinit.

E4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n}{3n - 5} = \frac{2 \cdot \infty + 4 \cdot \infty}{\infty - 5} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 4n}{n^2}}{\frac{3n - 5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 + \frac{4}{n}}{1}}{\frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{2 + \frac{4}{\infty}}{\frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty}} = \frac{2 + 0}{0 - 0} = \infty$$

8.2.3. Si el grau del numerador és igual que el del denominador

El resultat serà igual a la divisió entre els coeficients dels termes de major grau.

E5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n}{2n^2 - 7n} = \frac{4 \cdot \infty + 5 \cdot \infty}{2 \cdot \infty - 7 \cdot \infty} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 + 5n}{n^2}}{\frac{2n^2 - 7n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 + \frac{5}{n}}{1}}{\frac{2}{1} - \frac{7}{n}} = \frac{4 + \frac{5}{\infty}}{2 - \frac{7}{\infty}} = \frac{4 + 0}{2 - 0} = 2$$

A1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{1 + n^2} =$$

A2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{1 + n^3} =$$

A3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 1}{-n^2} =$$

A4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + n^2} =$$

8.3. Segona indeterminació: $\frac{0}{0}$

S'han de descompondre factorialment numerador i denominador, i simplificar tot el que sigui possible.

E6

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-1}{n^2-7n+6} = \frac{1-1}{1-7+6} = \frac{0}{0}$$

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \quad n_1 = 6; n_2 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-1}{(n-6) \cdot (n-1)} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-6} = \frac{1}{-5} = -0,2$$

A5

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n-2}{n^2-4} =$$

8.4. Tercera indeterminació: $\infty - \infty$

Transformem la resta en una sola fracció.

E7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n} - n = \frac{\infty}{\infty} - \infty = \infty - \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+n^2-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

A6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n}{n^4-2n^2} =$$

A7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4-3n^3}{n^2+5} =$$

A8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{7n-n^2} =$$

A9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n-2n^2} =$$

A10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n^3+n^2)}{10+2n^2} =$$

A11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-8n^2+4n}{-2n^2+n}} =$$

A12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n^3}{n^3} \right)^{\left(\frac{2n^2+1}{n^2} \right)} =$$

A13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\left(\frac{-n^2+1}{n} \right)} =$$

A14

$$\lim_{n \rightarrow 4} \frac{n^2-5n+4}{n-4} =$$

A15

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n} - n =$$

A16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-8n+15}{n^2-4n+3} =$$

A17

$$\lim_{n \rightarrow 5} \frac{n^2-5n}{n^2-6n+5} =$$

A18

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - \frac{n^3+1}{n^2-1} =$$

A19

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{2n+1}} =$$

A20

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n-1}{-n^2+2} =$$

A21

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n-1}{n+1} - n =$$

A22

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2+2n-3}{n^2-1} =$$

A23

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2}{2n^2 - 3n} =$$

A24

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 5n}{n^4} =$$

A25

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 3n + 1} =$$

A26

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n - 1}{-n^2 + 2} =$$

A27

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{n + 2} - n =$$

A28

$$\lim_{n \rightarrow -2} \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 4n + 4} =$$

A29

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)}{\left(\frac{n^3}{2n^4 + 8}\right)} =$$

A30

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1} =$$

A31

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^5 - n}{9n^5 - 97} \right)^{-n^2} =$$

A32

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 - n}{5n^2 - 9} - \frac{n^2 + n}{3n^4} \right)^{-5} =$$

A33

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^3 - n}{7n - 7} - 10 \right)^{\frac{-3n^4}{3n + 3}} =$$

A33

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} =$$